

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”**



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

Elementi di Fluidodinamica

Relatore:

Chiar.mo Prof.
Maurizio Gentile

Candidato:

Ciro Di Dato
Matr. N85001342

Anno Accademico 2020/2021

Indice

Introduzione	3
1 Concetti Introduttivi della Meccanica dei Continui	5
1.1 La cinematica di un mezzo continuo deformabile	5
1.1.1 Punto di vista di Lagrange	5
1.1.2 Punto di vista di Eulero	6
1.1.3 Traiettorie e Linee di Flusso	7
1.1.4 Derivate Materiali e Locali	8
1.2 Tensore Velocità di Rotazione e di Deformazione	8
1.2.1 Significato Fisico del Tensore Velocità di Rotazione e di Deformazione	10
1.3 Equazione di Continuità della Massa	12
1.3.1 Interpretazione Fisica dell'Equazione di Continuità	13
1.4 Forze agenti su un Mezzo Continuo Deformabile	13
1.5 Teoremi Generali	15
1.6 Tensore degli Sforzi ed Equazione del Moto di un Mezzo Continuo Deformabile	16
1.6.1 Teorema di Cauchy	17
1.6.2 Equazioni del moto di un Mezzo Continuo Deformabile	19
1.6.3 Simmetria del Tensore degli sforzi	19
2 Dinamica dei Fluidi Perfetti	21
2.1 Fluidi Perfetti	21
2.2 Statica dei Fluidi Barotropici	23
2.2.1 ESEMPIO: Fluido Incomprimibile in equilibrio nel campo gravitazionale	24
2.2.2 ESEMPIO: Gas Perfetto in equilibrio nel campo gravitazionale	25
2.3 Teoremi Fondamentali di Conservazione di un Fluido Perfetto	25
2.3.1 Conservazione dell'Energia	26

2.3.2	Conservazione della Quantità di Moto	27
2.3.3	Conservazione del Momento Angolare	28
2.4	Moti particolari di un Fluido Perfetto	28
2.4.1	Moto Irrotazionale	29
2.4.2	Moto Stazionario	31
2.5	Dinamica dei fluidi perfetti	32
2.5.1	ESEMPIO: Teorema del trinomio di Bernoulli	35
2.5.2	ESEMPIO: Teorema di Torricelli	36
2.5.3	ESEMPIO: Il Tubo di Venturi	37
3	Dinamica dei Fluidi Viscosi	39
3.1	Fluidi Viscosi	39
3.1.1	Equazioni di Navier-Stokes	40
3.1.2	Moto dei Fluidi Viscosi	41
3.2	Esempi di moti di Fluidi Viscosi	42
3.2.1	Moto di Poiseuille	42
3.2.2	Moto di Hagen-Poiseuille	44
3.2.3	Moto di Couette	46
	Bibliografia	49

Introduzione

La dinamica dei fluidi è un problema che riguarda prevalentemente la fisica classica e che ha origini antiche. I fluidi sono sempre stati argomento di grande rilievo, basti pensare che nell'Antica Grecia venivano considerati come l'*archè*, il principio; per fare un esempio, Talete (640/625 a.C. – 548/545 a.C.) poneva l'acqua come principio unico alla base di tutto e Anassimene (586 a.C. circa – 528 a.C.) considerava l'aria come l'elemento alla base di ogni cosa. I risultati più consistenti della fluidodinamica risalgono a partire dal XVII secolo con i magistrali contributi da parte di Evangelista Torricelli (1608-1647), Blaise Pascal (1623-1662) e Daniel Bernoulli (1700-1782), per citarne alcuni. La dinamica dei fluidi presenta numerose applicazioni nella vita quotidiana. Può essere usata per il calcolo di forze e momenti di superfici riguardo lo studio di profili alari in campo aeronautico o automobilistico, per studi di comfort ambientale, diffusione di sostanze inquinanti e nei campi della geofluidodinamica quali meteorologia e oceanografia. La fluidodinamica può essere applicata a tutte le problematiche di moti in condotti, estremamente importanti nel campo dell'ingegneria petrolchimica, nello studio dei motori e del condizionamento, ma anche per lo studio delle correnti di traffico o delle vie di fuga. Il seguente lavoro di tesi è diviso in tre capitoli:

- Nel capitolo 1 vengono trattati i concetti introduttivi necessari per lo studio della meccanica dei continui, analizzando i tensori velocità di deformazione e di rotazione e degli sforzi, l'equazione di continuità per la massa ed i teoremi generali per i mezzi continui.
- Nel capitolo 2 si è entrati nel merito dei fluidi perfetti, studiandone la statica e la dinamica, i teoremi di conservazione ed infine alcune applicazioni.
- Nel capitolo 3 sono stati studiati i fluidi viscosi, ricavandone le equazioni di Navier-Stokes, ed infine alcuni esempi di moti particolari.

Capitolo 1

Concetti Introduttivi della Meccanica dei Continui

1.1 La cinematica di un mezzo continuo deformabile

Prima di studiare le equazioni di bilancio, distinguiamo i due punti di vista principali per lo studio del problema: quello lagrangiano e quello euleriano.

1.1.1 Punto di vista di Lagrange

Consideriamo un mezzo continuo deformabile tale che:

a $t = t_0$ occupa un dominio $\mathcal{D}(t_0) = \mathcal{D}_0$ di volume V_0 nello spazio fisico Euclideo E_3

a $t > t_0$ occupa un dominio $\mathcal{D} = \mathcal{D}(t)$ di volume V

Conoscere il moto del mezzo significa seguire e determinare il moto di ogni particella. Consideriamo una particella che:

a $t = t_0$, si trova nel punto $P_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$

a $t > t_0$, si trova nel punto $P(x_1, x_2, x_3)$

Poichè la posizione della particella dipende sia dal tempo t che dalla posizione iniziale, possiamo scrivere:

$$x_i = x_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

Analogamente, in forma vettoriale:

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t) \quad (1.2)$$

dove \vec{r} e \vec{r}_0 sono i vettori posizione dei punti P e P_0 rispettivamente.
 Le quantità x_1^0, x_2^0, x_3^0, t prendono il nome di *variabili lagrangiane*.
 Le equazioni (1.1) e (1.2) ci consentono di ricavare il moto della particella P che a $t = t_0$ si trova in P_0 .

Per ricavare il moto del mezzo, dobbiamo trovare l'equazione del moto per ogni singola particella.

Assumiamo che il vettore \vec{r} definito in precedenza sia continuo rispetto alle variabili di Lagrange e almeno due volte differenziabile e che ci sia una corrispondenza tra i domini \mathcal{D} e \mathcal{D}_0 , vale a dire:

$$\det(J) = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} \neq 0$$

dove J è la matrice Jacobiana della trasformazione (1.1).

La traiettoria della particella è data dall'equazione (1.1), dove la posizione iniziale \vec{r}_0 è fissata mentre il tempo t varia.

Usando l'equazione (1.2), possiamo ricavare la velocità e l'accelerazione della particella:

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) \quad (1.3)$$

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2}(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) \quad (1.4)$$

1.1.2 Punto di vista di Eulero

Invece di seguire le particelle in moto, scegliamo un punto fisso $P(x_1, x_2, x_3)$ e cerchiamo la velocità e l'accelerazione della particella del mezzo continuo che transita nel punto $P(x_1, x_2, x_3)$ all'istante t .

Utilizzando l'equazione (1.1) per esprimere x_1^0, x_2^0, x_3^0 in termini di x_1, x_2, x_3 e sostituendoli nell'equazione (1.3), otteniamo il campo velocità al tempo t :

$$\vec{v} = \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.5)$$

dove x_1, x_2, x_3, t sono dette *variabili Euleriane*

Una volta noto il campo velocità, le equazioni parametriche delle particelle del mezzo sono determinate integrando il sistema di equazioni differenziali al prim'ordine

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.6)$$

L'integrale generale del sistema descritto dalle equazioni (1.6) è:

$$x_i = x_i(C_1, C_2, C_3, t) \quad (1.7)$$

dove C_1, C_2, C_3 sono le costanti di integrazione e sono determinate dalle condizioni iniziali:

$$x_i^0 = x_i(C_1, C_2, C_3, t_0) \quad (1.8)$$

Dunque, l'equazione (1.7) diventa:

$$x_i = x_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$$

che corrisponde esattamente alle equazioni (1.1) ricavate precedentemente dal punto di vista di Lagrange.

Infine, conoscendo la velocità, possiamo calcolarne la derivata per ricavare il campo accelerazione nelle variabili Euleriane:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.9)$$

che restituisce:

$$\vec{a} = \vec{a}(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.10)$$

1.1.3 Traiettorie e Linee di Flusso

Eliminando il tempo dalle tre equazioni parametriche (1.1), otteniamo due equazioni in x_i e x_i^0 , dove $i = 1, 2, 3$, vale a dire una famiglia di curve dipendenti dai tre parametri x_1^0, x_2^0, x_3^0 .

Ogni traiettoria è tangente alla velocità in ogni punto e in ogni momento.

Scriviamo l'equazione differenziale delle traiettorie nel modo seguente:

$$\frac{dx_1}{v_1(\vec{r}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\vec{r}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\vec{r}, t)} \quad (1.11)$$

Analogamente otteniamo lo stesso sistema di equazioni proiettando sugli assi la seguente relazione vettoriale:

$$\vec{v} \times d\vec{r} = 0$$

OSSERVAZIONE

Se nelle equazioni (1.11) scegliessimo un valore fissato di t , otterremo una famiglia di curve tangente alla velocità in quell'istante.

Queste curve prendono il nome di *Linee di Flusso*.

1.1.4 Derivate Materiali e Locali

Sia $f(x_1, x_2, x_3, t)$ una funzione definita sul dominio $\mathcal{D} \subset E_3$ per $t_0 \leq t \leq t_1$. Calcoliamo la derivata di f rispetto al tempo distinguendo due casi:

(a) Se x_i ($i = 1, 2, 3$) sono le coordinate di una particella in moto di un mezzo, avremo:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)f \quad (1.12)$$

che definiamo derivata *materiale* o *totale* di f .

(b) Se x_i ($i = 1, 2, 3$) sono le coordinate di un punto fisso, avremo:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.13)$$

che definiamo derivata *spaziale* o *locale* di f .

OSSERVAZIONE

Applichiamo quanto detto al caso dell'accelerazione, vale a dire osserviamo come sono collegate le accelerazioni sostanziale e locale:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \quad (1.14)$$

1.2 Tensore Velocità di Rotazione e di Deformazione

Consideriamo una particella di un mezzo continuo deformabile che al tempo t occupa la posizione P e sia $\mathcal{D}(t)$ una regione contenente il punto P .

Assumiamo che durante l'intervallo di tempo dt la particella si sia spostata da P a P' mentre la regione $\mathcal{D}(t)$ si trasforma in una regione $\mathcal{D}(t + dt)$ contenente il punto P' .

L'obiettivo che ci poniamo è quello di studiare la deformazione del dominio D durante il moto, ovvero come variano le distanze relative tra i suoi punti. Prendiamo un'altra particella nel punto P_1 di $\mathcal{D}(t)$ e sia P'_1 la sua immagine all'istante $t + dt$.

Sia $\vec{u} = d\vec{r}$ il vettore posizione infinitesimo che descrive il vettore $P\vec{P}'$ e sia \vec{v} la velocità del punto P; avremo:

$$d\vec{r} = \vec{u} = \vec{v}dt \quad (1.15)$$

Poichè il mezzo continuo è deformabile, allora la posizione elementare è funzione delle coordinate del punto P:

$$\vec{u} = \vec{u}(x_1, x_2, x_3)$$

Facciamo adesso le seguenti considerazioni:

la distanza tra P e P_1 al tempo t è data dal vettore $\vec{\xi}$;

la distanza tra P' e P'_1 al tempo $t + dt$ è data dal vettore $\vec{\xi}'$;

Le variazioni di \vec{u} e $\vec{\xi}$ durante il moto saranno pari a:

$$\delta\vec{u} = P_1\vec{P}'_1 - P\vec{P}' = \vec{u}_1 - \vec{u} \quad (1.16)$$

$$d\vec{\xi} = P'\vec{P}'_1 - P\vec{P}_1 = \vec{\xi}' - \vec{\xi} \quad (1.17)$$

Osserviamo che:

$$\vec{\xi}' + \vec{u}_1 - \vec{\xi} - \vec{u} = 0$$

per cui:

$$d\vec{\xi} = \delta\vec{u} \quad (1.18)$$

Assumendo che il gradiente di spostamento $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ha elementi infinitesimi, possiamo scrivere:

$$\delta\vec{u} = \vec{u}_1(\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r} + \vec{\xi}) - \vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}) + \xi_j \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + \dots - \vec{u}(\vec{r}) \simeq \xi_j \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}$$

Tramite questa linearizzazione di $\delta\vec{u}$ l'equazione (1.18) diventa:

$$d\vec{\xi} = \xi_j \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \quad (1.19)$$

o

$$d\xi_i = \xi_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Nel caso di coordinate ortogonali, le quantità $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ sono le componenti di un tensore cartesiano di ordine 2.

Ponendo:

$$A_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

avremo:

$$d\xi_i = A_{ij}\xi_j \quad (1.20)$$

In quanto tensore cartesiano di ordine 2, possiamo scrivere A_{ij} come somma di un tensore antisimmetrico e di uno simmetrico, cioè:

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) = \Omega_{ij} + D_{ij} \quad (1.21)$$

dove:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.22)$$

è il tensore antisimmetrico e prende il nome di *tensore velocità di rotazione*; mentre

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.23)$$

è il tensore simmetrico e prende il nome di *tensore velocità di deformazione*.

1.2.1 Significato Fisico del Tensore Velocità di Rotazione e di Deformazione

Partiamo dal tensore velocità di rotazione; sia $\vec{\Omega}$ il vettore assiale associato tale che

$$\Omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\Omega_k \quad (1.24)$$

dove ϵ_{ijk} è il *simbolo di Levi-Civita* in tre dimensioni ed è definito nel seguente modo:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j,k) \text{ è una permutazione pari} \\ -1 & \text{se } (i,j,k) \text{ è una permutazione dispari} \\ 0 & \text{se due indici coincidono} \end{cases}$$

Dunque, ignorando il secondo termine nella (1.21), avremo:

$$d\xi_i = \Omega_{ij}\xi_j = \epsilon_{ijk}\Omega_k\xi_j = (\vec{\Omega} \times \vec{\xi})_i \quad (1.25)$$

che corrisponde ad una *rotazione rigida* attorno ad un asse fissato. Dalla (1.22) notiamo che $\vec{\Omega}$ è dato da:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{u} \quad (1.26)$$

Mettendo insieme la (1.16) e la (1.17) con la (1.25), otteniamo:

$$\vec{\xi}' = \vec{\xi} + d\vec{\xi} = \vec{\xi} + \vec{\Omega} \times \vec{\xi} \quad (1.27)$$

il che sta a significare che il tensore antisimmetrico Ω_{ij} produce una rotazione rigida infinitesima senza deformazione quando le sue componenti sono molto piccole.

Valutiamo adesso il tensore velocità di deformazione; omettendo il primo termine della (1.21) avremo:

$$d\xi_i = D_{ij}\xi_j = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{1}{2} D_{jk} \xi_j \xi_k \right) \quad (1.28)$$

Consideriamo la quadrica

$$\frac{1}{2} D_{jk} \xi_j \xi_k = \text{costante} \quad (1.29)$$

Che prende il nome di *quadrica di deformazione* e i suoi assi vengono detti *assi principali di deformazione*.

Essa è invariante rispetto a trasformazioni ortogonali, motivo per cui possiamo scegliere il sistema di coordinate con origine in P e gli assi orientati lungo quelli della quadrica.

Scriviamo la quadrica nella forma canonica

$$D_{11}\xi_1^2 + D_{22}\xi_2^2 + D_{33}\xi_3^2 = \text{costante} \quad (1.30)$$

che mostra che le deformazioni elementari:

$$d\xi_1 = D_{11}\xi_1$$

$$d\xi_2 = D_{22}\xi_2$$

$$d\xi_3 = D_{33}\xi_3$$

sono effettuate lungo gli assi della quadrica.

OSSERVAZIONE

Considerando la (1.29), poniamo la costante pari ad 1:

se $D_{11}, D_{22}, D_{33} > 0$ la quadrica è un *ellissoide* e la deformazione è una *dilatazione*; in particolare, se $D_{11}=D_{22}=D_{33}$ l'ellissoide diventa una *sfera*;

se D_{11}, D_{22}, D_{33} hanno segni diversi, la quadrica è un *iperboloide* e la deformazione è una *contrazione*;

se gli elementi della matrice di rotazione sono nulli avremo una *deformazione pura*.

1.3 Equazione di Continuità della Massa

In un corpo continuo \mathcal{C} , consideriamo che la massa sia distribuita con continuità su tutta la regione \mathcal{V} occupata da \mathcal{C} all'istante t .

Diremo che esiste una funzione $\rho(\vec{r}, t)$ di classe C^1 detta *densità di massa* tale che, se V^* è una parte arbitraria di \mathcal{C} in \mathcal{V}^* , la massa di V^* all'istante t risulta essere:

$$m = \int_{V(t)} \rho(\vec{r}, t) d\tau$$

dove $V(t)$ è immagine di V^* all'istante t e volume materiale.

Supponiamo che durante il moto la massa non vari nel tempo, per cui:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (1.31)$$

e di conseguenza

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(\vec{r}, t) d\tau = 0$$

Teniamo conto del **Teorema del trasporto**: sia $f(\vec{r}, t)$ una funzione regolare su \mathcal{V} per ogni t appartenente all'intervallo $[a, b]$ e $V(t)$ è un volume materiale, allora:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\vec{r}, t) d\tau = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\vec{v}) \right] d\tau$$

Nel nostro caso, applicando il teorema del trasporto avremo:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(\vec{r}, t) d\tau = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) \right] d\tau = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{v} \right] d\tau \quad (1.32)$$

Per la (1.31), la (1.32) diventa:

$$\int_{V(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{v} \right] d\tau = 0 \quad (1.33)$$

Quanto appena trovato vale per ogni $V(t)$ appartenente a $\mathcal{V}(t)$.

Per la continuità della funzione integranda e per l'arbitrarietà di V , la relazione (1.33) è equivalente alla seguente condizione locale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.34)$$

L'equazione appena trovata prende il nome di *Equazione di continuità per la massa*, un'equazione differenziale alle derivate parziali del prim'ordine che mette in relazione la velocità \vec{v} con la densità ρ .

1.3.1 Interpretazione Fisica dell'Equazione di Continuità

Portiamo il secondo termine del primo membro della (1.34) a destra e integriamo ambo i membri su un volume arbitrario, fissato V interno al mezzo:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) d\tau \quad (1.35)$$

Applicando il teorema di Gauss-Green:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\tau = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (1.36)$$

dove $d\vec{S}$ è un elemento orientato della superficie S che delimita V .
Si vuole dare ancora più consistenza al significato fisico.

Sia, dunque, \vec{v} la velocità di una particella che attraversa la superficie S in un intervallo di tempo dt . Sia inoltre dm la massa della particella proporzionale al volume di un cilindro infinitesimo di area di base $d\vec{S}$ e generatrice $\vec{v}dt$, cioè:

$$dm = \rho(\vec{v} \cdot d\vec{S}dt)$$

La quantità $\rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$ rappresenta la massa che fluisce per unità di tempo attraverso la superficie infinitesima $d\vec{S}$.

Scegliendo la normale diretta verso l'esterno, $\rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$ è definita positiva se la massa lascia il volume V , poichè $\vec{v} \cdot \vec{n} > 0$, mentre è definita negativa se la massa entra nel volume V , poichè $\vec{v} \cdot \vec{n} < 0$.

Di conseguenza, $\oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$ rappresenta la massa totale che lascia il volume V o vi entra per unità di tempo mentre la quantità $\rho \vec{v}$ prende il nome di *densità di corrente*.

OSSERVAZIONE

Se il mezzo è incomprimibile ed omogeneo, allora avremo:

$$\rho(\vec{r}, t) = \text{cost}$$

e la (1.34) si riduce a:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

il che significa che, in questo caso, il campo velocità è solenoidale.

1.4 Forze agenti su un Mezzo Continuo Deformabile

L'azione di una forza su un mezzo continuo deformabile dipende dalla particella agente, a seconda che essa giaccia sulla frontiera del corpo o nel suo volume.

Consideriamo una porzione del mezzo in moto che al tempo t occupa il volume $V(t)$, delimitato dalla superficie $S(t)$.

Possiamo distinguere le forze agenti sul mezzo in due categorie:

(a) *Forze di Massa*: agiscono su particelle tridimensionali appartenenti al dominio \mathcal{D} contenente il mezzo. Esse sono proporzionali alla massa Δm della particella contenute nel volume $\Delta \tau$.

Introduciamo un campo $\vec{b}(\vec{r}, t)$ di *forze specifiche di massa*, che ha dimensioni di un'accelerazione, tale che la risultante delle forze agenti su \mathcal{D} si esprime come:

$$\vec{F}_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} \rho(\vec{r}, t) \vec{b}(\vec{r}, t) d\vec{r} \quad (1.37)$$

dove la quantità $\rho \vec{b}$ è detta *forza specifica di volume*.

(b) *Forze di Contatto*: agiscono sulle particelle che formano la superficie di bordo del mezzo.

Scelto un elemento di superficie $\partial \mathcal{D}$, avente come versore normale \hat{n} , supponiamo che la forza $d\phi$ agente su \mathcal{D} attraverso l'elemento $d\sigma$, sia esprimibile come segue:

$$d\phi = \vec{\Phi}(\vec{r}, \hat{n}, t) d\sigma$$

da cui

$$\phi_{\mathcal{D}} = \int_{\partial \mathcal{D}} d\phi = \int_{\partial \mathcal{D}} \vec{\Phi}(\vec{r}, \hat{n}, t) d\sigma \quad (1.38)$$

dove $\vec{\Phi}(\vec{r}, \hat{n}, t)$ prende il nome di *sforzo specifico* e l'insieme $\{\vec{\Phi}(\vec{r}, \hat{n}, t)\}$ è detto *stato di tensione*.

OSSERVAZIONE

Sia $\Phi = |\vec{\Phi}|$

- se $\vec{\Phi} \cdot \hat{n} = -\Phi$ lo sforzo è una *pressione*;
- se $\vec{\Phi} \cdot \hat{n} = \Phi$ lo sforzo è una *trazione*;
- se $\vec{\Phi} \cdot \hat{n} = 0$ si ha lo *sforzo di taglio*;

Forze di massa e di contatto possono essere raggruppate in due classi:

- *Forze di massa (superficiali) esterne* che derivano dai corpi esterni al mezzo;
- *Forze di massa (superficiali) interne* dovute alla mutua interazione delle particelle del mezzo. In accordo con il terzo principio della dinamica, considerate due porzioni di un mezzo che al tempo t occupano i domini \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 in contatto tra loro tramite la superficie S , avremo:

$$\vec{\Phi}(\vec{r}, -\hat{n}, t) = -\vec{\Phi}(\vec{r}, \hat{n}, t) \quad (1.39)$$

1.5 Teoremi Generali

Per definizione, la *quantità di moto* di un mezzo continuo deformabile, che occupa il dominio $\mathcal{D}(t)$ di volume V , delimitato dalla superficie S , è:

$$\vec{P} = \int_V \vec{v} dm = \int_V \rho \vec{v} d\tau \quad (1.40)$$

Il *momento angolare* del sistema, preso l'origine O di un sistema di coordinate cartesiane, vale:

$$\vec{L} = \int_V \vec{r} \times \vec{v} dm = \int_V \rho \vec{r} \times \vec{v} d\tau \quad (1.41)$$

Nella meccanica dei continui, assumiamo validi i teoremi sul momento angolare e sulla quantità di moto validi per i sistemi meccanici discreti.

Definiamo innanzitutto il *raggio vettore del centro di massa o del baricentro*:

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \int_V \rho \vec{r} d\tau \quad (1.42)$$

dove

$$M = \int_V \rho d\tau$$

Riscriviamo la (1.40) nel modo seguente, considerando la (1.42):

$$\vec{P} = M \vec{v}_G = M \dot{\vec{r}}_G \quad (1.43)$$

ottenendo, così, il **I Teorema del Centro di Massa**.

Conoscendo \vec{P} ed \vec{L} , possiamo scrivere le **Equazioni Cardinali della Meccanica**:

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt} \\ \vec{\mathcal{M}}^{(e)} = \frac{d\vec{L}}{dt} \end{cases} \quad (1.44)$$

dove $\vec{F}^{(e)}$ è la risultante delle forze esterne agenti sul sistema e $\vec{\mathcal{M}}^{(e)}$ è il momento risultante delle forze esterne.

Sfruttando la (1.43), riscriviamo la prima equazione delle (1.44) nel modo seguente:

$$\vec{F}^{(e)} = M \ddot{\vec{r}}_G$$

ottenendo il **II Teorema del Centro di Massa**.

In maniera analoga, definiamo l'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 d\tau$$

Nella meccanica dei continui, rimangono validi anche il **I Teorema di König**:

$$\vec{L} = \vec{L}_G + \vec{L}'$$

(dove \vec{L}_G e \vec{L}' sono rispettivamente il momento angolare relativo al moto del centro di massa ed il momento angolare relativo al moto del sistema rispetto al centro di massa)

ed il **II Teorema di König**:

$$T = T_G + T'$$

(dove T_G e T' sono rispettivamente l'energia cinetica di traslazione del centro di massa e l'energia cinetica rispetto ad un riferimento con origine nel baricentro).

Includiamo adesso anche le forze di massa e di contatto.

Per la quantità di moto e per la I Equazione Cardinale, avremo l'**Assioma 1**:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} d\tau = \int_V \rho \vec{b} d\tau + \oint_S \vec{\Phi} dS \quad (1.45)$$

Mentre per il momento angolare e per la II Equazione Cardinale, avremo l'**Assioma 2**:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{r} \times \vec{v} d\tau = \int_V \rho \vec{r} \times \vec{b} d\tau + \oint_S \vec{r} \times \vec{\Phi} dS \quad (1.46)$$

1.6 Tensore degli Sforzi ed Equazione del Moto di un Mezzo Continuo Deformabile

Per ogni dominio \mathcal{D} di frontiera appartenente al sistema continuo \mathcal{C} in quiete, scriviamo la prima equazione cardinale per l'equilibrio e ricordando la (1.37) e la (1.38) avremo:

$$\int_{\mathcal{D}} \rho(\vec{r}, t) \vec{b}(\vec{r}, t) d\vec{r} + \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{\Phi}(\vec{r}, t, \hat{n}) d\sigma = 0 \quad (1.47)$$

Analogamente procediamo per la seconda equazione cardinale per l'equilibrio:

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{r} \times \rho(\vec{r}, t) \vec{b}(\vec{r}, t) d\vec{r} + \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{r} \times \vec{\Phi}(\vec{r}, t, \hat{n}) d\sigma = 0 \quad (1.48)$$

Passiamo alle equazioni della dinamica inserendo le *forze specifiche di inerzia* $-\rho\vec{a}$ tra le forze di massa. Dunque, le equazioni (1.47) e (1.48) diventano:

$$\int_{\mathcal{D}} \rho(\vec{r}, t) [\vec{b}(\vec{r}, t) - \vec{a}] d\vec{r} + \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{\Phi}(\vec{r}, t, \hat{n}) d\sigma = 0 \quad (1.49)$$

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{r} \times \rho(\vec{r}, t) [\vec{b}(\vec{r}, t) - \vec{a}] d\vec{r} + \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{r} \times \vec{\Phi}(\vec{r}, t, \hat{n}) d\sigma = 0 \quad (1.50)$$

OSSERVAZIONE

Osserviamo che le incognite della (1.47) e della (1.48) sono la densità e lo stato di tensione in ogni punto interno del mezzo e nelle (1.49) e (1.50) si aggiunge come incognita il moto del sistema.

1.6.1 Teorema di Cauchy

Per ogni versore $\hat{n} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \hat{e}_i$, lo sforzo specifico $\vec{\Phi}$ assume la forma:

$$\vec{\Phi}(\vec{r}, \hat{n}, t) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{\Phi}(\vec{r}, \hat{e}_i, t) \quad (1.51)$$

DIMOSTRAZIONE

Fissato (\vec{r}, t) , prendiamo un tetraedro Δ [Figura: 1.1] con tre spigoli paralleli ai versori $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ uscenti dal punto \vec{r} e una faccia normale ad \hat{n} . Indichiamo con σ_i le facce con normale \hat{e}_i e con σ la faccia con normale \hat{n} . Assumiamo che l'altezza δ relativa a quest'ultima sia sufficientemente piccola affinché il tetraedro sia contenuto nel mezzo in esame. Scriviamo l'equazione (1.49) per

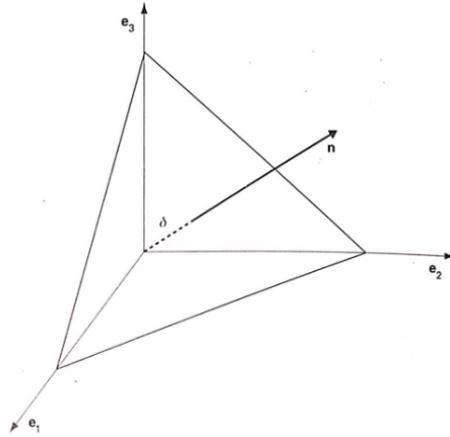


Figura 1.1: Tetraedro di Cauchy

il tetraedro tenendo presente che i versori \hat{e}_i sono normali interni e usando la relazione (1.39) avremo:

$$\int_{\Delta} \rho(\vec{b} - \vec{a}) d\vec{y} - \sum_{i=1}^3 \int_{\sigma_i} \vec{\Phi}(\vec{y}, \hat{e}_i, t) d\sigma + \int_{\sigma} \vec{\Phi}(\vec{y}, \hat{n}, t) d\sigma = 0 \quad (1.52)$$

Dividiamo ambo i membri per $|\sigma|$ e facciamo comparire i valori medi delle funzioni integrande tenendo conto che:

$$|\Delta| = \frac{1}{3}\delta|\sigma|$$

$$|\sigma_i| = |\alpha_i||\sigma|$$

Avremo:

$$\frac{\delta}{3|\Delta|} \int_{\Delta} \rho(\vec{b} - \vec{a}) d\vec{y} - \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{|\sigma|} \int_{\sigma_i} \vec{\Phi}(\vec{y}, \hat{n}, t) d\sigma + \frac{1}{|\sigma|} \int_{\sigma} \vec{\Phi}(\vec{y}, \hat{n}, t) d\sigma = 0 \quad (1.53)$$

Mandando δ a 0, assumendo la continuità della funzione integranda, la relazione (1.53) diventa:

$$\vec{\Phi}(\vec{r}, \hat{n}, t) - \sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{\Phi}(\vec{r}, \hat{e}_i, t) = 0$$

$$\vec{\Phi}(\vec{r}, \hat{n}, t) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{\Phi}(\vec{r}, \hat{e}_i, t)$$

■

La (1.51) ci permette di esprimere lo stato di tensione in (\vec{r}, t) mediante gli sforzi relativi a tre versori mutuamente ortogonali. Le componenti di questi sforzi definiscono il *tensore degli sforzi*:

$$T_{ij}(\vec{r}, t) = \vec{\Phi}(\vec{r}, \hat{e}_i, t) \cdot \hat{e}_j \quad (1.54)$$

La natura tensoriale di T_{ij} è messa in luce dalle relazioni:

$$\vec{\Phi}_j(\vec{r}, \hat{n}, t) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i T_{ij}(\vec{r}, t) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.55)$$

OSSERVAZIONE

Le componenti diagonali di T_{ij} indicano compressione o trazione, mentre quelle non diagonali sono associate a sforzi di taglio.

1.6.2 Equazioni del moto di un Mezzo Continuo Deformabile

TEOREMA

La dinamica dei sistemi continui si basa sulla cosiddetta equazione indefinita di moto:

$$\rho(\vec{b} - \vec{a}) + \nabla \cdot \vec{T} = 0 \quad (1.56)$$

dove:

$$\nabla \cdot \vec{T}(\vec{r}, t) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} \hat{e}_j \quad (1.57)$$

DIMOSTRAZIONE

Trasformiamo l'integrale superficiale nella (1.49) utilizzando l'espressione (1.55) per le componenti di $\vec{\Phi}$ e applicando il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \vec{\Phi}(\vec{y}, \hat{n}, t) d\sigma = \sum_{i=1}^3 \int_{\partial\mathcal{D}} \alpha_i T_{ij} d\sigma = \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_i} d\vec{r}$$

Sostituendo quanto trovato nella (1.49) avremo:

$$\int_{\mathcal{D}} \rho(\vec{r}, t) [\vec{b} - \vec{a}] d\vec{r} + \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_i} d\vec{r} = 0$$

Sfruttando l'arbitrarietà del dominio \mathcal{D} e assumendo che la funzione integranda sia continua, avremo:

$$\rho(\vec{r}, t) [\vec{b} - \vec{a}] + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_i} = 0$$

$$\rho(\vec{b} - \vec{a}) + \nabla \cdot \vec{T} = 0$$

■

OSSERVAZIONE

sopprimendo il termine $-\rho\vec{a}$ nella (1.56) otteniamo l'equazione indefinita di equilibrio:

$$\rho\vec{b} + \nabla \cdot \vec{T} = 0$$

1.6.3 Simmetria del Tensore degli sforzi

TEOREMA

Per ogni sistema continuo il tensore degli sforzi è simmetrico.

DIMOSTRAZIONE

Prendiamo la (1.55) e consideriamo il seguente prodotto vettoriale:

$$\vec{r} \times \vec{\Phi}(\vec{r}, \hat{n}, t) = \sum_{i,j=1}^3 x_i \vec{\Phi}_j \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_{i,j,k=1}^3 \alpha_k x_i T_{kj} \hat{e}_i \times \hat{e}_j$$

Consideriamo il secondo integrale della (1.50). Per il teorema della divergenza diventa:

$$\int_{\partial \mathcal{D}} \vec{r} \times \vec{\Phi}(\vec{r}, t, \hat{n}) d\sigma = \int_{\mathcal{D}} \sum_{i,j=1}^3 T_{kj} \hat{e}_i \times \hat{e}_j d\vec{r} + \int_{\mathcal{D}} \vec{r} \times (\nabla \cdot \vec{T}) d\vec{r}$$

La (1.50) dunque diventa:

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{r} \times \rho(\vec{b} - \vec{a}) d\vec{r} + \int_{\mathcal{D}} \sum_{i,j=1}^3 T_{kj} \hat{e}_i \times \hat{e}_j d\vec{r} + \int_{\mathcal{D}} \vec{r} \times (\nabla \cdot \vec{T}) d\vec{r} = 0$$

Ricordando la (1.56) avremo:

$$\int_{\mathcal{D}} \sum_{i,j=1}^3 T_{kj} \hat{e}_i \times \hat{e}_j d\vec{r} = 0$$

Per l'arbitrarietà del dominio \mathcal{D} e supponendo la continuità della funzione integranda avremo:

$$\sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \hat{e}_i \times \hat{e}_j d\vec{r} = 0$$

cioè:

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (i \neq j)$$

■

OSSERVAZIONE

Le equazioni del moto (1.56) insieme all'equazione di continuità (1.34) rappresentano un sistema di 4 equazioni alle derivate parziali in 10 incognite (la densità di massa, le tre componenti della velocità e le 6 componenti indipendenti del tensore degli sforzi). Dunque, per conoscere completamente il moto del mezzo, bisogna conoscere informazioni supplementari, parte delle quali si determina sperimentalmente. Così facendo, si definiscono diverse tipologie del mezzo continuo deformabile.

Capitolo 2

Dinamica dei Fluidi Perfetti

2.1 Fluidi Perfetti

Definiamo fluido un sistema continuo caratterizzato dall'assenza di sforzi di taglio in condizioni di equilibrio. Se tale circostanza è verificata anche in condizioni dinamiche, allora il fluido si dice ideale o perfetto.

In altre parole, in un fluido ideale non esistono forze d'attrito tra le particelle che lo compongono.

Vediamo il seguente:

TEOREMA DI PASCAL

In un fluido, il tensore degli sforzi ha la seguente rappresentazione

$$T_{ij} = -p(x_1, x_2, x_3, t)\delta_{ij} \equiv -p\delta_{ij} \quad (2.1)$$

dove lo scalare $p(x_1, x_2, x_3, t) \geq 0$ è detto **pressione**.

DIMOSTRAZIONE

Per ipotesi, in un fluido ideale vi sono soltanto sforzi normali, vale a dire:

$$\vec{\Phi}(\hat{n}) = -p(\hat{n})\mathbb{1} \cdot \hat{n} = -p(\hat{n})\hat{n} \quad (2.2)$$

Dobbiamo far vedere che lo scalare p è indipendente da \hat{n} . Ricordiamo che:

$$\hat{n} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \hat{e}_i$$

Dunque possiamo scrivere:

$$\vec{\Phi}(\hat{n}) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{\Phi}(\hat{e}_i) = - \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i \hat{e}_i$$

D'altro canto, dalla (2.2) abbiamo:

$$\vec{\Phi}(\hat{n}) = \vec{T} \cdot \hat{n} = -p\mathbb{1} \cdot \hat{n} = -p\hat{n} = -p \sum_{i=1}^3 \alpha_i \hat{e}_i$$

Uguagliando le ultime due relazioni avremo:

$$p \sum_{i=1}^3 \alpha_i \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i \hat{e}_i$$

da cui:

$$p = p_i$$

ovvero l'indipendenza della pressione da \hat{n} . ■

Quando vale la (2.1) avremo:

$$\nabla \cdot \vec{T} = -\nabla p \quad (2.3)$$

che sostituita nella (1.56) restituisce l'*equazione della fluidostatica*:

$$\rho \vec{b} = \nabla p \quad (2.4)$$

e l'*equazione della dinamica dei fluidi perfetti*:

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{b} - \nabla p \quad (2.5)$$

Quando il sistema è descritto esclusivamente da un legame tra densità e pressione, l'*equazione di stato* sarà:

$$\rho = \rho(p) \quad (2.6)$$

I fluidi per i quali vale la legge di comprimibilità (2.6) si dicono *fluidi barotropici*.

OSSERVAZIONE

- se $p = p(\rho)$ il fluido perfetto si dice *comprimibile*;
- se p non dipende da ρ e ρ è costante il fluido perfetto si dice *incomprimibile*.

2.2 Statica dei Fluidi Barotropici

Supponiamo che la pressione dipenda da ρ tale che:

$$\frac{dp}{d\rho} \neq 0$$

e introduciamo la seguente funzione detta *entalpia specifica*

$$h(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad (2.7)$$

da cui:

$$\nabla h(p) = \frac{dh}{dp} \nabla p = \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.8)$$

Dalla (2.4) avremo:

$$\begin{aligned} \rho b(\vec{r}) &= \rho \nabla h(p) \\ b(\vec{r}) &= \nabla h(p) \end{aligned} \quad (2.9)$$

da cui segue la seguente

PROPOSIZIONE

La condizione necessaria per l'equilibrio di un fluido barotropico è che il campo di forze di massa U sia conservativo.

Da cui segue:

$$\vec{b}(\vec{r}) = \nabla U(\vec{r}) \quad (2.10)$$

Tenendo conto della (2.9), la (2.10) diventa:

$$\begin{aligned} \nabla h(p) &= \nabla U(\vec{r}) \\ \nabla [h(p) - U(\vec{r})] &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

La (2.11) mostra che all'interno della regione occupata dal fluido si ha:

$$h(p) - U(\vec{r}) = \text{costante} \quad (2.12)$$

Inoltre, se il fluido è anche incompressibile, ρ costante, abbiamo che:

$$\begin{aligned} h(p) &= \frac{p}{\rho} \\ \frac{p}{\rho} - U(\vec{r}) &= \text{costante} \end{aligned} \quad (2.13)$$

OSSERVAZIONE

Dall'equazione della dinamica dei fluidi perfetti (2.5) e dalla (2.8) avremo:

$$\vec{a} = \vec{b} - \nabla h \quad (2.14)$$

OSSERVAZIONE

Per la (2.12), le superfici equipotenziali sono anche superfici isobare e per la (2.6) sono anche isopicnotiche, cioè di uguale densità.

Enunciamo il seguente teorema omettendone la dimostrazione:

TEOREMA DI ARCHIMEDE

Consideriamo un sistema materiale pesante costituito da un fluido omogeneo e da un corpo rigido in esso immerso, anche parzialmente. In condizioni di equilibrio, il sistema di forze esercitate dal fluido sul corpo rigido attraverso la superficie di contatto è equivalente ad una forza opposta al peso complessivo della massa fluida rimpiazzata dal corpo rigido e applicata nel baricentro di quest'ultima che prende il nome di centro di spinta.

Osserviamo che l'equilibrio del sistema trattato nel teorema precedente è caratterizzato dalle seguenti condizioni:

- il peso del corpo uguaglia il peso della massa fluida corrispondente al volume della porzione immersa
- il centro di spinta e il baricentro del corpo si trovano sulla stessa verticale (l'equilibrio è stabile se il primo si trova più in alto del secondo, altrimenti è instabile)

2.2.1 ESEMPIO: Fluido Incomprimibile in equilibrio nel campo gravitazionale

Sul piano $x_3 = 0$, ovvero la superficie libera del fluido, dove x_3 è la verticale discendente, imponiamo le condizioni $p(x_3 = 0) = p_0$ e $U(x_3 = 0) = 0$. Avremo:

$$h(p) = \frac{p}{\rho}$$
$$U(x_3) = -gx_3$$

Per la (2.12) avremo:

$$\frac{p(x_3)}{\rho} + gx_3 = \frac{p_0}{\rho}$$
$$p(x_3) = p_0 - \rho gx_3 \quad (2.15)$$

ottenendo la **legge di Stevino** e dove ρg è il peso specifico e x_3 la profondità.

2.2.2 ESEMPIO: Gas Perfetto in equilibrio nel campo gravitazionale

Un *gas perfetto* risulta essere un fluido comprimibile per il quale:

$$p(\rho) = R\rho\theta$$

Inoltre, si ha anche:

$$U = U(x_3) = -gx_3$$

dove R è la costante caratteristica del gas e θ è la temperatura assoluta. Supponiamo che la temperatura sia costante ed uniforme e che la densità dipenda dalla profondità x_3 .

Calcoliamo l'entalpia specifica:

$$h(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)} = R\theta \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = R\theta \ln \left(\frac{p}{p_0} \right)$$

dove p_0 è la pressione a $x_3 = 0$.

Dalla (2.12) otteniamo:

$$R\theta \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) + gx_3 = \text{cost}$$

$$R\theta \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) = \text{cost} - gx_3$$

$$\ln \left(\frac{p}{p_0} \right) = \frac{\text{cost}}{R\theta} - \frac{gx_3}{R\theta} = \text{cost} - \frac{gx_3}{R\theta}$$

$$\frac{p}{p_0} = \text{cost} \cdot e^{-\frac{gx_3}{R\theta}}$$

da cui:

$$p(x_3) = p_0 \cdot e^{-\frac{gx_3}{R\theta}}$$

ricavando, così, la **formula barometrica**.

2.3 Teoremi Fondamentali di Conservazione di un Fluido Perfetto

Sia $A(\vec{r}, t)$ una qualsiasi quantità tensoriale; in virtù dell'equazione di continuità (1.34) e della (1.12) avremo:

$$\rho \frac{dA}{dt} = \rho \left(\frac{\partial A}{\partial t} + v_j \frac{\partial A}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho A v_j) \quad (2.16)$$

2.3.1 Conservazione dell'Energia

Nei fluidi perfetti non vi sono *fenomeni dissipativi*, cioè non c'è scambio di calore tra il sistema ed il mezzo circostante.

L'energia del fluido contenuta in un volume elementare è data dalla somma dell'energia cinetica e di quella potenziale. Sia ϵ l'energia interna per unità di massa, l'energia totale per unità di volume è:

$$\tilde{E} = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon \quad (2.17)$$

Consideriamo adesso il tensore di ordine 0 $A = \frac{1}{2}v^2 + \epsilon$. Per la (2.16) avremo:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}v^2 + \epsilon \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{1}{2}v^2 + \rho\epsilon \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho v_j \left(\frac{v^2}{2} + \epsilon \right) \right] \quad (2.18)$$

D'altro canto, l'equazione della termodinamica per processi reversibili è:

$$Tds = d\epsilon + pd \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (2.19)$$

dove s è l'entropia per unità di massa.

Usando l'equazione (2.5), ponendo $\vec{b} = 0$ insieme all'equazione di continuità (1.34) e a quella della termodinamica (2.19), e assumendo che il processo sia *isoentropico* ($ds = 0$), avremo:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}v^2 + \epsilon \right) &= \rho v_j \frac{dv_j}{dt} + \rho \frac{d\epsilon}{dt} = -v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j} (pv_j) + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} (pv_j) \end{aligned}$$

Confrontando quanto visto con la (2.18) avremo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{1}{2}v^2 + \rho\epsilon \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho v_j \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right] \quad (2.20)$$

dove $w = \epsilon + \frac{p}{\rho}$ è l'*entalpia per unità di massa*.

Integriamo la (2.20) su un volume V delimitato dalla superficie S ; applicando la formula di Gauss-Green otterremo la conservazione dell'energia cercata:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon \right) d\tau &= - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho v_j \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right] d\tau \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon \right) d\tau &= - \oint_S \rho v_j \left(\frac{v^2}{2} + w \right) dS_j \end{aligned} \quad (2.21)$$

Il membro di sinistra della (2.21) mostra la variazione di energia per unità di tempo, mentre quello di destra il flusso di energia che scorre tramite la superficie che contiene il dominio.

Inoltre, la quantità:

$$\rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) = \rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + \epsilon + \frac{p}{\rho} \right) \quad (2.22)$$

è il vettore *densità di flusso energetico*.

2.3.2 Conservazione della Quantità di Moto

Assumiamo che A sia il tensore v_i di ordine 1; dunque:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j)$$

Consideriamo l'equazione della dinamica dei fluidi perfetti (2.5) e scriviamola nel modo seguente:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \rho \vec{b} - \nabla p \quad (2.23)$$

ponendo $\vec{b} = 0$ avremo:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (p \delta_{ij})$$

e dunque, unendo quanto detto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) &= - \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) - \frac{\partial}{\partial x_j}(p \delta_{ij}) = - \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) \equiv \\ &\equiv - \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ij} \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ij} \quad (2.24)$$

Integrando la (2.24) su un dominio fissato V ed applicando la formula di Gauss-Green si avrà:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \tilde{P}_i d\tau = - \oint_S \Pi_{ij} dS_j \quad (2.25)$$

dove $\tilde{P}_i = \rho v_i$ ed S è la superficie chiusa che delimita il volume V .

In tal modo, abbiamo ricavato la legge di conservazione della quantità di moto.

2.3.3 Conservazione del Momento Angolare

Scegliamo il tensore $A = (\vec{r} \times \vec{v})_i = \epsilon_{ijk} x_k v_j$.

Applicando l'equazione della dinamica dei fluidi perfetti (2.5) e ponendo $\vec{b} = 0$ avremo:

$$\rho \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v})_i = \rho \frac{d}{dt} (\epsilon_{ijk} x_k v_j) = \epsilon_{ijk} x_k \rho \frac{dv_j}{dt} = -\epsilon_{ijk} x_k \frac{\partial p}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_l} (\epsilon_{ijk} x_k p \delta_{jl})$$

Sostituiamo questa espressione nella (2.16):

$$-\frac{\partial}{\partial x_l} (\epsilon_{ijk} x_k p \delta_{jl}) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon_{ijk} x_k v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \epsilon_{ijk} x_k v_i v_j)$$

ponendo $j=1$ avremo:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon_{ijk} x_k p) &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon_{ijk} x_k v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \epsilon_{ijk} x_k v_i v_j) \\ -\frac{\partial}{\partial x_j} [\epsilon_{ijk} x_k (p + \rho v_i v_j)] &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon_{ijk} x_k v_j) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Denotiamo:

$$\tilde{L}_i = \rho \epsilon_{ijk} x_k v_j \quad e \quad M_{il} = \epsilon_{ijk} x_k (p + \rho v_i v_j) \equiv \epsilon_{ijk} x_k \Pi_{jl}$$

Integrando la (2.26) su un volume fissato V delimitato dalla superficie S

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \tilde{L}_i d\tau = - \oint_S M_{il} dS_l \quad (2.27)$$

Ottenendo così il teorema della conservazione del momento angolare.

2.4 Moti particolari di un Fluido Perfetto

Siano P e P' due punti del fluido tali che a P associamo la velocità \vec{v}_P al tempo t e a P' la velocità $\vec{v}_{P'}$ al tempo $t' > t$.

La variazione di \vec{v} sarà:

$$\delta \vec{v} = \vec{v}_{P'} - \vec{v}_P = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j} \delta x_j \quad (2.28)$$

Denotando con $\delta x_j = (P\vec{P}')_j = X_j$ e proiettando la (2.28) sugli assi avremo:

$$\delta v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} X_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) X_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) X_j \equiv \Omega_{ij} X_j + D_{ij} X_j \quad (2.29)$$

con $(i, j = 1, 2, 3)$

Ragioniamo sui due termini che compongono δv_i . Nel primo termine riconosciamo:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.30)$$

che è il *tensore velocità di rotazione* corrispondente al vettore assiale:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} \quad (2.31)$$

che prende il nome di *vorticità* .

Inoltre:

$$\Omega_{ij} X_j = \epsilon_{ijk} \Omega_k X_j = (\vec{\Omega} \times \vec{X})_i \quad (2.32)$$

Nel secondo termine della (2.29), invece, riconosciamo:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.33)$$

che è il *tensore velocità di deformazione* . Inoltre:

$$D_{ij} X_j = \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{1}{2} D_{jk} X_j X_k \right) \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial X_i} \quad (2.34)$$

$$\alpha \equiv \frac{1}{2} D_{jk} X_j X_k = \text{costante} \quad (2.35)$$

dove la (2.35) è la nota *quadrica di deformazione* .

Dunque:

$$\vec{v}_{P'} = \vec{v}_P + \vec{\Omega} \times \vec{X} + \nabla \alpha$$

Quanto appena visto mostra che la velocità del fluido, in ogni suo punto, è un vettore costituito da tre termini ortogonali alla quadrica (2.35): una velocità rigida di traslazione, una velocità rigida di rotazione e una velocità rigida di deformazione.

2.4.1 Moto Irrotazionale

Consideriamo la seguente situazione. Se:

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \quad (2.36)$$

Allora avremo $\vec{\Omega} = 0$ e il moto si dice *irrotazionale* .

La (2.36) esprime la condizione necessaria e sufficiente affinché esista una funzione $\phi(\vec{r}, t)$ detta *potenziale velocità* tale che:

$$\vec{v} = \nabla \phi(\vec{r}, t) \quad (2.37)$$

Osserviamo che se al posto di ϕ ci fosse un altro potenziale velocità definito come segue:

$$\phi' = \phi + F(t) \quad (2.38)$$

avremmo:

$$\nabla\phi' = \nabla(\phi + F(t)) = \nabla\phi + \nabla F(t) = \nabla\phi = \vec{v}$$

ottenendo così lo stesso campo velocità.

Analogamente ragioniamo per il campo accelerazione; avremo:

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right] \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

che in termini vettoriali diventa:

$$\vec{a} = \nabla\psi(\vec{r}, t) \quad (2.39)$$

dove:

$$\psi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2$$

prende il nome di *potenziale accelerazione*.

Possiamo facilmente notare che la ψ verifica la stessa proprietà della ϕ nella (2.38).

Nell'ipotesi di fluido barotropico è verificata la condizione (2.10) e sostituendo \vec{b} nell'equazione (2.14), avremo:

$$\nabla \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right] = \nabla U - \nabla h$$

$$\nabla \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - U + h \right] = 0$$

che porta a:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - U + h = f_1(t) \quad (2.40)$$

dove $f_1(t)$ è una funzione esclusivamente del tempo.

La (2.40) prende il nome di *equazione di Lagrange – Bernoulli*.

In tal modo, il moto può essere determinato a partire dall'equazione di Lagrange-Bernoulli (2.40), di continuità (1.34) e di stato della termodinamica. Inoltre, dalla (2.40) possiamo definire il *trinomio di Bernoulli*:

$$B = \frac{1}{2} v^2 - U + h \quad (2.41)$$

2.4.2 Moto Stazionario

Se la velocità in forma euleriana di tutte le particelle di un fluido non dipende dal tempo, il moto si dice *permanente* o *stazionario*.

TEOREMA del TRINOMIO DI BERNOULLI

In condizioni di moto stazionario di un fluido perfetto barotropico in un campo di forze di massa conservative, per ogni punto del fluido il trinomio di Bernoulli (2.41) è costante, vale a dire:

$$\frac{1}{2}v^2 - U + h = \text{cost} \quad (2.42)$$

DIMOSTRAZIONE

L'equazione (2.5) assume la forma:

$$\begin{aligned} -\rho\vec{a} &= -\rho\nabla U + \nabla p \\ -\rho\vec{a} &= -\rho\nabla U + \rho\nabla h \\ \vec{a} &= \nabla(U - h) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Moltiplicando scalarmente per \vec{v} e tenendo presente l'ipotesi di moto stazionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}v^2 \right) &= \frac{d}{dt}(U - h) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}v^2 - U + h \right) &= 0 \end{aligned}$$

da cui la costanza di B lungo il moto di ciascun punto.

■

La (2.42) prende il nome di **equazione di Bernoulli**.

Se il fluido è anche incomprimibile avremo:

$$h(p) = \frac{p}{\rho}$$

e quindi l'equazione di Bernoulli (2.42) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v^2 - U + \frac{p}{\rho} &= \text{cost} \\ \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho U + p &= \text{cost} \end{aligned} \quad (2.44)$$

OSSERVAZIONE

L'equazione (2.41) ha il significato di energia totale per unità di massa. In particolar modo, il termine $h(p)$ svolge il ruolo di energia potenziale delle forze interne.

OSSERVAZIONE

La (2.44) è composta da tre termini, rispettivamente: *pressione dinamica*, *pressione potenziale* e *pressione statica*. Vale a dire che lungo le linee di flusso, la pressione totale si mantiene costante.

2.5 Dinamica dei fluidi perfetti

Partiamo dall'equazione di moto (2.43) e cerchiamone la forma euleriana. Per un moto generico avremo:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_i$$

che in forma vettoriale equivale a dire:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

dove $\nabla \vec{v}$ è il tensore di componenti $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

Vale la seguente identità:

$$\sum_{i=1}^3 (\vec{v} \cdot \nabla v_i) \hat{e}_i = \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}$$

Trovando, così, l'equazione di Eulero:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} = -\nabla B \quad (2.45)$$

dove B è dato dalla (2.41).

Per quanto riguarda l'accelerazione, invece, avremo:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \quad (2.46)$$

e notiamo che \vec{a} è invariante per inversione temporale.

Più in generale, il moto descritto dalla (2.45) sarà:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} = \vec{b} - \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \quad (2.47)$$

equazione che è temporalmente reversibile.

TEOREMA DI BERNOULLI

Nel moto stazionario di un fluido perfetto barotropico soggetto a forze di massa conservative, le superfici isoenergetiche sono simultaneamente superfici di corrente e di vortice. Se il moto è anche irrotazionale, tutti i punti hanno la stessa energia specifica.

DIMOSTRAZIONE

Per ipotesi di moto stazionario, la (2.45) si riduce a:

$$(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} = -\nabla B \quad (2.48)$$

Poichè ∇B è normale alle superfici $B=\text{cost}$, per la (2.48) queste risultano tangenti ai vettori \vec{v} e $\nabla \times \vec{v}$. Nel caso in cui quest'ultimo sia nullo ovunque, allora B ha lo stesso valore in tutta la massa fluida. ■

Facciamo adesso delle considerazioni e analizziamo dei teoremi e definizioni sui moti vorticosi, tenendo innanzitutto conto che i moti non vorticosi possono avvenire solo in presenza di campi di forza irrotazionali.

TEOREMA

Per un fluido perfetto barotropico, possiamo avere $\nabla \times \vec{v} = 0$ soltanto se $\nabla \times \vec{b} = 0$.

DIMOSTRAZIONE

Prendiamo la (2.47) e facciamo l'ipotesi che $\nabla \times \vec{v} = 0$. Avremo:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{b} - \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right)$$

Applichiamo l'operatore rotore ad ambo i membri:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) &= \nabla \times \left[\vec{b} - \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \right] \\ \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) &= \nabla \times \vec{b} - \nabla \times \left[\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \right] \end{aligned}$$

Il secondo termine al secondo membro scompare poichè il rotore del gradiente è nullo. Supponendo di poter scambiare l'applicazione del rotore e della derivata parziale temporale su \vec{v} , sottointendendo la necessaria regolarità di quest'ultima, avremo:

$$\nabla \times \vec{b} = 0$$

■

DEFINIZIONE (Sottoinsieme materiale)

Nel moto di un fluido diciamo materiale ogni sottoinsieme che evolve dalla configurazione di riferimento seguendo il moto del fluido stesso.

TEOREMA DI THOMSON

Nel moto di un fluido perfetto barotropico sotto l'azione di forze di massa conservative, la circolazione su ogni linea materiale chiusa resta costante.

DIMOSTRAZIONE

Prendiamo una qualsiasi curva regolare non intrecciata $\tilde{\gamma}$ nella configurazione di riferimento \tilde{C} e sia $\gamma(t)$ la sua immagine nella configurazione attuale $C(t)$. Bisogna far vedere che:

$$\oint_{\gamma(t)} \vec{v}[\vec{r}(\tilde{\vec{r}}, t)] dP = \text{cost}$$

o, analogamente:

$$\frac{d}{dt} \oint_{\gamma(t)} \vec{v}[\vec{r}(\tilde{\vec{r}}, t)] dP = 0$$

Passiamo dalle coordinate euleriane a quelle lagrangiane, ottenendo:

$$\oint_{\gamma(t)} \vec{v}[\vec{r}(\tilde{\vec{r}}, t)] dP = \oint_{\gamma(t)} \sum_i v_i dx_i = \oint_{\tilde{\gamma}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial t} x_i(\tilde{\vec{r}}, t) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} x_i(\tilde{\vec{r}}, t) d\tilde{x}_j$$

Deriviamo ambo i membri rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_{\gamma(t)} \sum_i v_i dx_i &= \oint_{\tilde{\gamma}} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial t^2} x_i(\tilde{\vec{r}}, t) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} x_i(\tilde{\vec{r}}, t) d\tilde{x}_j + \oint_{\tilde{\gamma}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial t} x_i(\tilde{\vec{r}}, t) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} x_i(\tilde{\vec{r}}, t) d\tilde{x}_j = \\ &= \oint_{\tilde{\gamma}} \sum_{i,j} a_i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} x_i(\tilde{\vec{r}}, t) d\tilde{x}_j + \oint_{\tilde{\gamma}} \sum_{i,j} v_i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} v_i(\tilde{\vec{r}}, t) d\tilde{x}_j \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} x_i(\tilde{\vec{r}}, t) = a_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} x_i(\tilde{\vec{r}}, t) = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} v_i(\tilde{\vec{r}}, t)$$

Torniamo alle variabili euleriane:

$$\frac{d}{dt} \oint_{\gamma(t)} \sum_i v_i dx_i = \oint_{\gamma(t)} \vec{a} dP + \oint_{\gamma(t)} d\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

Dalla (2.10) sappiamo che $\vec{b} = \nabla U$, dunque la (2.5) restituisce $\vec{a} = \nabla(U - p)$. In questo modo per il primo termine avremo:

$$\oint_{\gamma(t)} \vec{a} dP = \oint_{\gamma(t)} \nabla(U - p) dP = 0$$

Mentre il secondo è banalmente nullo. Dunque:

$$\frac{d}{dt} \oint_{\gamma(t)} \sum_i v_i dx_i = 0$$

o analogamente:

$$\frac{d}{dt} \oint_{\gamma(t)} \vec{v}[\vec{r}(\vec{r}, t)] dP = 0$$

Quindi la circolazione lungo la linea materiale chiusa $\gamma(t)$ risulta costante come cercato.

■

Enunciamo, infine, due ulteriori teoremi, omettendone le dimostrazioni, che forniscono ulteriori informazioni sui moti vorticosi:

TEOREMA

Nelle ipotesi del Teorema di Thomson, il moto conserva il carattere rotazionale o irrotazionale stabilito dalle condizioni iniziali.

TEOREMA

Nelle ipotesi del Teorema di Thomson, le superfici vorticose sono superfici materiali.

2.5.1 ESEMPIO: Teorema del trinomio di Bernoulli

Consideriamo un fluido incompressibile pesante e scegliamo x_3 come verticale ascendente. A meno di una costante, il trinomio di Bernoulli (2.41) sarà:

$$B = \frac{1}{2}v^2 + gx_3 + \frac{p}{\rho} \quad (2.49)$$

che possiamo esprimere come:

$$\frac{v^2}{2g} + x_3 + \frac{p}{\rho g} = \text{cost}$$

I tre termini del membro di sinistra hanno le dimensioni di una lunghezza e sono detti:

- *quota cinetica*, da cui deve cadere un grave per acquistare velocità \vec{v}
- *quota effettiva*
- *quota piezometrica*, altezza di una colonna del fluido che produce sul fondo la pressione p

2.5.2 ESEMPIO: Teorema di Torricelli

Consideriamo un recipiente contenente un liquido ed effettuiamo un foro ad una distanza h dalla superficie libera, dal quale fuoriesca il liquido. Assumendo che il moto risulti stazionario e non vorticoso, se il liquido perso viene continuamente aggiunto, la velocità di efflusso sarà la stessa che acquisterebbe un grave cadendo dalla quota h [Figura 2.1].

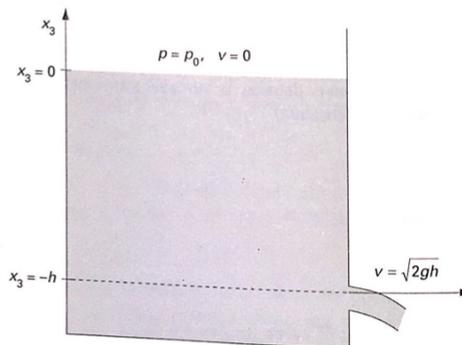


Figura 2.1: Teorema di Torricelli

DIMOSTRAZIONE

Dal *Teorema di Bernoulli* avremo che $\nabla \times \vec{v} = 0$. Dunque, il trinomio di Bernoulli (2.41) risulta costante.

Tenendo conto della (2.49), il valore di B alla superficie libera $x_3 = 0$, dove per ipotesi $v = 0$, sarà:

$$B = \frac{p_0}{\rho g}$$

mentre all'efflusso sarà:

$$B = \frac{v^2}{2g} - h + \frac{p_0}{\rho g}$$

Uguagliando i due valori di B appena ricavati avremo:

$$v = \sqrt{2gh}$$

■

2.5.3 ESEMPIO: Il Tubo di Venturi

Come conseguenza del *Teorema di Bernoulli*, nel moto stazionario solenoidale e irrotazionale, cioè $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ e $\nabla \times \vec{v} = 0$, in un tubo di corrente la pressione si abbassa dove il tubo si restringe. In altri termini, la velocità si innalza e la pressione diminuisce dopo la strozzatura [Figura 2.2] .

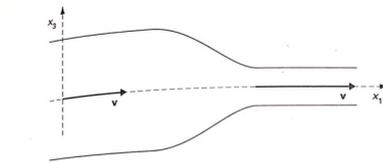


Figura 2.2: Tubo di Venturi

Capitolo 3

Dinamica dei Fluidi Viscosi

3.1 Fluidi Viscosi

Il modello di fluido ideale è una buona approssimazione di flussi reali finchè i moti sono lenti. Quando la velocità diventa elevata, non possiamo più trascurare l'attrito interno delle particelle del fluido. La resistenza mostrata dalle particelle per via del loro mutuo attrito prende il nome di *viscosità* e i fluidi con queste proprietà si dicono *viscosi* o *reali*.

OSSERVAZIONE

Un fluido viscoso in quiete si comporta come un fluido ideale e dunque posseggono lo stesso tensore degli sforzi.

Consideriamo un fluido viscoso in moto, per il quale il tensore degli sforzi sarà:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (3.1)$$

dove σ_{ij} è il *tensore degli sforzi viscosi*.

Sperimentalmente, si verifica che le tensioni che compaiono in un fluido viscoso dipendono dalla *velocità di deformazione*:

$$\theta' = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \vec{v} \quad (3.2)$$

e dal *tensore velocità di deformazione* ormai noto:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.3)$$

Per fluidi viscosi omogenei ed isotropi, possiamo esprimere σ_{ij} come segue:

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta'\delta_{ij} + 2\eta D_{ij} \quad (3.4)$$

dove $\lambda, \eta > 0$ sono i **coefficienti dinamici di viscosità**.
Dunque la (3.1) diventa:

$$T_{ij} = -(p - \lambda\theta')\delta_{ij} + 2\eta D_{ij} \quad (3.5)$$

I fluidi che obbediscono alla (3.5) si dicono *fluidi perfettamente viscosi o newtoniani*.

3.1.1 Equazioni di Navier-Stokes

Consideriamo il tensore T_{ij} (3.5) e sostituiamolo nella (1.56). Avremo:

$$\rho a_i = \rho b_i + \left(-\frac{\partial p}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right) \delta_{ij} + 2\eta \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j}$$

ma poichè

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

Sostituendo avremo:

$$\rho a_i = \rho b_i + \left(-\frac{\partial p}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right) \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

ponendo $i = j$ avremo:

$$\begin{aligned} \rho a_i &= \rho b_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) \\ \rho a_i &= \rho b_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \eta) \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

che in forma vettoriale diventa:

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{b} - \nabla p + (\lambda + \eta) \nabla \theta' + \eta \nabla^2 \vec{v} \quad (3.7)$$

dove:

$$\nabla^2 \vec{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2}$$

è il *laplaciano* di \vec{v} .

In tal modo, otteniamo la (3.6), analogamente (3.7), che prende il nome di *equazioni di Navier - Stokes*, un sistema di equazioni differenziali alle

derivate parziali non lineari del secondo ordine.

Definiamo, inoltre, il **coefficiente cinematico di viscosità**:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

OSSERVAZIONE

Se il fluido viscoso è incomprimibile, vale a dire $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, l'equazione (3.7) diventa:

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{b} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

e dunque la viscosità è determinata esclusivamente dal coefficiente η .

3.1.2 Moto dei Fluidi Viscosi

Per determinare il moto di un fluido viscoso, oltre alle equazioni di Navier-Stokes (3.7) e all'equazione di continuità (1.34), abbiamo bisogno di un'ulteriore equazione. Poiché per i fluidi viscosi rimane valida la (2.20), possiamo ricavare l'*equazione di conservazione dell'energia per i fluidi viscosi*. Abbiamo bisogno di due ulteriori termini che si aggiungeranno alla quantità

$$\rho v_j \left(\frac{v^2}{2} + w \right)$$

dell'equazione (2.20), collegata agli spostamenti del fluido.

Il primo termine che aggiungeremo, dovuto alla viscosità, sarà:

$$-v_i \sigma_{ij}$$

mentre il secondo termine, dovuto allo scambio di calore, sarà:

$$-\chi \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

dove χ è il **coefficiente di conducibilità termica** e T la temperatura.

In questo modo, l'equazione di conservazione dell'energia per i fluidi viscosi sarà:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho v_j \left(\frac{v^2}{2} + \epsilon + \frac{p}{\rho} \right) - v_i \sigma_{ij} - \chi \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \quad (3.8)$$

3.2 Esempi di moti di Fluidi Viscosi

3.2.1 Moto di Poiseuille

Consideriamo il moto stazionario di un fluido viscoso, pesante e incomprimibile in una regione compresa tra due piani orizzontali [Figura 3.1].

Assumiamo che il campo velocità sia unidimensionale:

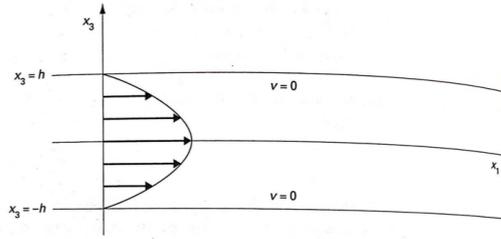


Figura 3.1: Moto di Poiseuille

$$\vec{v} = v(x_1, x_3)\hat{e}_1$$

Per $x_1 = a$ e $x_1 = b$, con $b > a$, conosciamo i valori della pressione a $x_3 = 0$, pari a p_a e p_b .

Poichè $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, v non dipende da x_1 e dunque l'accelerazione è nulla.

L'equazione del moto sarà:

$$\nabla \cdot \left(gx_3 + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{\eta}{\rho} v''(x_3)\hat{e}_1 \quad (3.9)$$

con condizioni di aderenza:

$$v(h) = v(-h) = 0 \quad (3.10)$$

Integrando la (3.9) e proiettandola lungo \hat{e}_3 avremo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(gx_3 + \frac{p}{\rho} \right) &= 0 \\ \rho gx_3 + p &= f(x_1) \\ p &= -\rho gx_3 + f(x_1) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Vogliamo adesso ricavare l'espressione di $f(x_1)$. Sostituiamo l'espressione di p nella (3.9):

$$\nabla \cdot \left(gx_3 - gx_3 + \frac{f(x_1)}{\rho} \right) = \frac{\eta}{\rho} v''(x_3)\hat{e}_1$$

$$f'(x_1) = \eta v''(x_3) \quad (3.12)$$

vale a dire che $f'(x_1)$ è costante e $f(x_1)$ è lineare in x_1 , cioè:

$$f(x_1) = Ax_1 + B$$

dove A e B sono due costanti.

Sostituiamo l'espressione di $f(x_1)$ nella (3.11):

$$p = -\rho g x_3 + Ax_1 + B$$

Imponendo $x_3 = 0$ avremo:

$$p = Ax_1 + B$$

Per $x_1 = a$ e $x_1 = b$, rispettivamente, avremo:

$$p_a = Aa + B$$

$$p_b = Ab + B$$

Ricaviamo i coefficienti A e B:

$$\begin{cases} B = p_a - Aa \\ p_b = Ab + p_a - Aa \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = p_a - Aa \\ p_b - p_a = A(b - a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{p_b - p_a}{b - a} \\ B = p_a - \frac{p_b - p_a}{b - a} a \end{cases}$$

Dunque:

$$f(x_1) = \frac{p_b - p_a}{b - a} x_1 + p_a - \frac{p_b - p_a}{b - a} a = \frac{p_a - p_b}{b - a} (a - x_1) + p_a$$

L'espressione della pressione, quindi, sarà:

$$p(x_1, x_3) = -\rho g x_3 + \frac{p_a - p_b}{b - a} (a - x_1) + p_a$$

Procediamo analogamente per $v(x_3)$, osservando che $v''(x_3)$ è costante, $v'(x_3)$ è lineare in x_3 e $v(x_3)$ è quadratica in x_3 , tale che:

$$v(x_3) = Cx_3^2 + Dx_3 + E$$

$$v'(x_3) = 2Cx_3 + D$$

$$v''(x_3) = 2C$$

Sfruttando le condizioni di aderenza (3.10) avremo:

$$\begin{cases} Ch^2 + Dh + E = 0 & x_3 = h \\ Ch^2 - Dh + E = 0 & x_3 = -h \end{cases}$$

Sommando e sottraendo tra loro le due equazioni del sistema, rispettivamente avremo:

$$\begin{cases} 2Ch^2 + 2E = 0 \\ 2Dh = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = -Ch^2 \\ D = 0 \end{cases}$$

dalla (3.12) avremo:

$$\frac{p_b - p_a}{b - a} = \eta 2C$$

$$C = \frac{1}{2\eta} \frac{p_b - p_a}{b - a}$$

quindi:

$$E = \frac{1}{2\eta} \frac{p_b - p_a}{b - a} h^2$$

Infine avremo:

$$v(x_3) = \frac{1}{2\eta} \frac{p_b - p_a}{b - a} x_3^2 + \frac{1}{2\eta} \frac{p_a - p_b}{b - a} h^2 = \frac{1}{2\eta} \frac{p_a - p_b}{b - a} (h^2 - x_3^2)$$

Osserviamo, inoltre, che il profilo di velocità è parabolico.

3.2.2 Moto di Hagen-Poiseuille

Studiamo l'analogo problema del moto di Poiseuille visto precedentemente ma in geometria assiale, trascurando l'effetto della gravità.

Sia R il raggio della condotta cilindrica e sia r la coordinata radiale avente per asse l'asse x_1 [Figura 3.2].

Vogliamo ricavare il campo di velocità $\vec{v} = v(r)\hat{e}_1$ e il campo di pressione che soddisfano la seguente equazione:

$$\nabla p = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \hat{e}_1 \quad (3.13)$$

$$\frac{dp}{dx_1} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \quad (3.14)$$

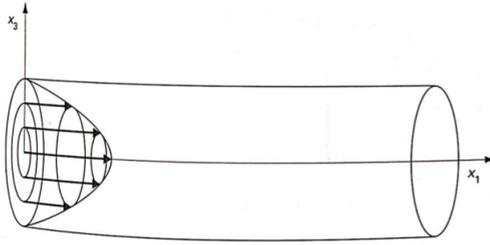


Figura 3.2: Moto di Hagen-Poiseuille

Osserviamo che il membro di sinistra dipende da x_1 e quello di destra da r , dunque sono entrambi uguali alla stessa costante. Per $p'(x_1)$ avremo:

$$-\frac{dp}{dx_1} = G$$

da cui, integrando per separazione delle variabili avremo:

$$-(p_b - p_a) = G(b - a)$$

$$G = \frac{p_a - p_b}{b - a}$$

per cui la pressione sarà:

$$p(x_1) = \frac{p_a - p_b}{b - a}(a - x_1) + p_a$$

Procediamo allo stesso modo per $v(r)$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{G}{\eta}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{G}{\eta} r$$

Integrando per separazione delle variabili:

$$r \frac{dv}{dr} = -\frac{G}{2\eta} r^2 + c_1$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{G}{2\eta} r + \frac{c_1}{r}$$

Integrando nuovamente per separazione delle variabili:

$$v(r) = -\frac{G}{4\eta} r^2 + c_1 \ln r + c_2$$

dove c_1 e c_2 sono costanti che vogliamo ricavare. Per ipotesi, devono valere le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} v(r = R) = 0 \\ \frac{dv}{dr}|_{r=0} = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

dove la prima è la condizione di aderenza alla parete del tubo, la seconda è richiesta per simmetria. Da quest'ultima, osserviamo che $c_1 = 0$, mentre dalla prima:

$$\begin{aligned} -\frac{GR^2}{4\eta} + c_2 &= 0 \\ c_2 &= \frac{GR^2}{4\eta} \end{aligned}$$

Dunque, la velocità sarà:

$$v(r) = \frac{G}{4\eta}(R^2 - r^2) \quad (3.16)$$

Infine, la portata del condotto sarà:

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi\rho \int_0^R rv(r)dr = 2\pi\rho \frac{G}{4\eta} \int_0^R r(R^2 - r^2)dr = \frac{\pi\rho G}{2\eta} \left[R^2 \int_0^R r dr - \int_0^R r^3 dr \right] = \\ &= \frac{\pi\rho G}{2\eta} \left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right] = \frac{\pi\rho G}{8\eta} R^4 = \frac{\pi G}{8\nu} R^4 \end{aligned}$$

Ottenendo così la *formula di Poiseuille* che ci permette di ricavare la viscosità del fluido mediante misure di portata.

3.2.3 Moto di Couette

Consideriamo un fluido viscoso pesante in moto laminare tra due piani orizzontali, dei quali quello inferiore è fisso mentre quello superiore trasla con velocità $v_0\hat{e}_1$ [Figura 3.3]. L'equazione del moto sarà la (3.9), cioè la stessa del caso del moto di Poiseulle, che qui riportiamo:

$$\nabla \cdot \left(gx_3 + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{\eta}{\rho} v''(x_3)\hat{e}_1$$

mentre le condizioni al contorno, ovvero quelle di aderenza del fluido alle pareti, saranno:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(h) = v_0 \end{cases} \quad (3.17)$$

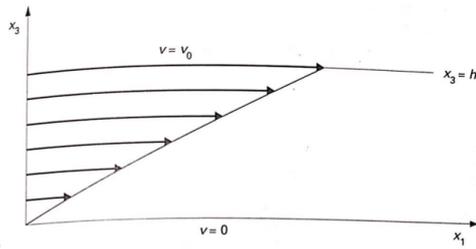


Figura 3.3: Moto di Couette

Sappiamo per ipotesi che non vi sono variazioni di pressione lungo la direzione del canale e dunque che la pressione dipende da x_3 . Avremo quindi:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0$$

e la condizione al contorno per la pressione sarà:

$$p|_{x_3=h} = p_0$$

Lungo la direzione del canale, ovvero x_1 , la (3.9) diventa:

$$\frac{\eta}{\rho} v''(x_3) = 0$$

$$v''(x_3) = 0$$

vale a dire che $v'(x_3)$ è costante e $v(x_3)$ è lineare in x_3 . Possiamo quindi scrivere che $v(x_3)$ ha una forma del tipo:

$$v(x_3) = Ax_3 + B$$

dove A e B sono due costanti. Sfruttando le condizioni di aderenza (3.17) avremo:

$$\begin{cases} v(0) = B \\ v(h) = Ah + B \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} B = 0 \\ Ah + B = v_0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} B = 0 \\ A = \frac{v_0}{h} \end{cases}$$

Il campo velocità sarà:

$$v(x_3) = \frac{v_0}{h} x_3 \quad (3.18)$$

Analogamente, ragionando sulla pressione, lungo la direzione perpendicolare al canale, ovvero x_3 , la (3.9) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(gx_3 + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

$$g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

Integrando otteniamo:

$$p(x_3) - p_0 = -\rho g(x_3 - h)$$

da cui:

$$p(x_3) = \rho g(h - x_3) + p_0 \tag{3.19}$$

Bibliografia

- [1] A. ROMANO, *Introduzione alla Meccanica classica*, Maggioli Editore, Santarcangelo di Romagna (RN), 2019.
- [2] A. FASANO, S. MARMI, *Meccanica Analitica (con elementi di meccanica statistica e dei continui)*, Bollati Boringhieri, Torino, 1994.
- [3] M. CHAICHIAN, I. MERCHES, A. TUREANU, *Mechanics: An Intensive Course*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.
- [4] S. FORTE, L. PREZIOSI, M. VIANELLO, *Meccanica dei Continui*, Springer-Verlag, Milano, 2019.
- [5] S. FOCARDI, I. MASSA, A. UGUZZONI, M. VILLA, *Fisica Generale (Meccanica e Termodinamica), II edizione*, Casa Editrice Ambrosiana, Rozzano (MI), 2014.