

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”**



**Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**

Laurea Magistrale in Fisica

**Metodi inversi per la caratterizzazione di porte
logiche superconduttive a due qubit
Inverse methods for the characterization of
superconductive two-qubit gates**

Relatori:

Dr. Procolo Lucignano
Dr. Gianluca Passarelli

Candidato:

Giovanni Acanfora
Matr. N94000513

Anno Accademico 2020/2021

Indice

Introduzione	1
1 Computazione quantistica	5
1.1 Qubit: definizione e proprietà	6
1.2 Porte logiche quantistiche	10
1.3 Possibili realizzazioni di sistemi a due livelli	13
1.4 I criteri di DiVincenzo per la computazione quantistica	15
2 Implementazione porta CNOT	16
2.1 Giunzione Josephson	16
2.2 Circuito superconduttivo	22
2.2.1 Risonatore	22
2.2.2 Fixed-frequency transmon	28
2.3 Cross-Resonance gate	34
3 Metodi di caratterizzazione	40
3.1 Quantum tomography	40
3.1.1 Quantum state tomography	40
3.1.2 Quantum process tomography	41
3.2 Interleaved randomized benchmarking	47
3.3 Optimal parent hamiltonians per stati dipendenti dal tempo	49
3.3.1 Metodo inverso per hamiltoniani dipendenti dal tempo	50
3.3.2 Optimal parent hamiltonian	53
4 Simulazioni	59
4.1 Premesse	59
4.2 Metodo	60
4.3 Calcolo dell'errore sui coefficienti	64
4.4 Applicazione	68
A Gruppo di Clifford	73

B Hamiltoniano effettivo	75
B.1 Rotazione 1	75
B.2 Trasformazione di Schrieffer-Wolff	80
B.3 Rotazione 2 e RWA	94
B.4 Diagonalizzazione a blocchi	97
C Prodotto scalare Hilbert-Schmidt	101
D Kernel di un operatore lineare	103
E State fidelity tra stati puri	104
F Errore su B e su \vec{h}^{opt}	106
Bibliografia	117

Introduzione

L'oggetto di questa tesi è lo studio della fidelity di una porta quantistica a due qubit basata sull'utilizzo di un metodo che, tramite misure ripetute dello stato del sistema effettuate in diversi istanti temporali, punta a stimare i valori attesi degli osservabili locali.

Questo problema è di estremo interesse per i grandi produttori di queste componenti [1][2][3] perché misurare accuratamente la fidelity delle porte logiche quantistiche consente di avere un forte controllo sull'evoluzione degli stati durante l'esecuzione degli algoritmi quantistici.

Il nostro approccio si basa sull'utilizzo della *quantum state tomography* ma, grazie ad una scelta delle osservabili da misurare dettata dal modello teorico, questa non deve essere completa di conseguenza il costo computazionale del metodo si riduce notevolmente predisponendolo alla scalabilità.

La *computazione quantistica* da vari decenni è al centro dell'interesse di una parte della comunità scientifica perché potrebbe fornire gli strumenti necessari alla soluzione di alcuni problemi di natura computazionale che risultano non risolvibili in tempi ragionevoli utilizzando la *computazione classica* [4].

Nel primo capitolo di questo lavoro di tesi vengono introdotti i fondamenti di questa scienza:

1. i *qubit*, ossia i quanti di informazione utilizzati nel paradigma quantistico, e le loro proprietà derivati dal principio di sovrapposizione e dell'entanglement [5];
2. le *porte logiche quantistiche*, ossia gli strumenti necessari a trasformare i qubit, e le loro proprietà di reversibilità e universalità [5].

Verrà mostrato come l'implementazione fisica di un qubit può essere effettuata in molti modi ma la scelta di una realizzazione piuttosto che un'altra è influenzata dal soddisfacimento di alcuni criteri, esposti per la prima volta dal fisico David DiVincenzo, in base ai quali i sistemi fisici utilizzati devono essere dei sistemi a due livelli ben caratterizzati, scalabili ed avere tempi di decoerenza più lunghi del tempo necessario a trasformarli tramite le porte logiche [4].

I circuiti superconduttivi basati sull'utilizzo di giunzioni Josephson [6] si sono dimostrati essere dei sistemi fisici adatti all'implementazione dei qubit

perché soddisfano a pieno i requisiti richiesti [7][8].

I criteri di DiVincenzo, in realtà, riguardano anche le porte logiche e stabiliscono che un sistema fisico è una buona implementazione per le porte logiche quantistiche se questo permette di realizzare un *insieme universale di porte logiche*[4][7][8]. L'individuazione e la successiva implementazione degli insiemi universali è fondamentale per la computazione perché, grazie ad essi, combinando opportunamente il ristretto numero di elementi che ne fanno parte, è possibile effettuare tutte le trasformazioni possibili senza dover ricorrere all'uso di tutte le porte logiche realizzabili.

Ancora una volta, i circuiti superconduttivi costituiscono dei validi supporti fisici per la realizzazione di porte logiche quantistiche che soddisfano il requisito stabilito da DiVincenzo [7][8][9].

Un esempio di *insieme universale di porte logiche* è il seguente

$$\{ \hat{H}, \hat{S}, \hat{T}, \hat{U}_{\text{CNOT}} \}$$

tutti gli operatori presenti al suo interno sono a singolo qubit, solamente \hat{U}_{CNOT} , l'operatore che descrive la porta CNOT, è a due qubit [8].

La sua presenza all'interno di un qualunque insieme universale è indispensabile perché, essendo una porta a due qubit, è in grado di generare entanglement senza il quale la computazione quantistica non potrebbe avere luogo in maniera efficiente.

L'implementazione della CNOT tramite circuiti superconduttivi, attualmente, è possibile grazie alla *porta logica di cross-resonance*[7][8][9], la quale, opportunamente combinata con altre porte a singolo qubit, viene utilizzata per realizzare un circuito equivalente ad una porta CNOT

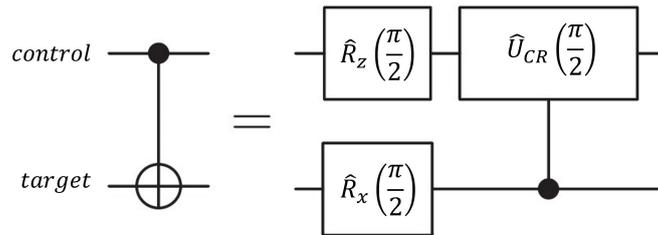


Figura 1: Circuito equivalente alla porta CNOT

Data la sua importanza, l'oggetto del secondo capitolo sarà una dettagliata descrizione del circuito necessario ad implementare la porta di cross-resonance finalizzata ad ottenere il modello teorico che lo descrive.

Il *circuito di cross-resonance* si ottiene accoppiando capacitivamente, tramite un circuito LC in parallelo, due *fixed-frequency transmons* e collegando il primo di questi ad un generatore di tensione che eroga un segnale avente una frequenza uguale a quella caratteristica del secondo *transmons*[7] (Figura 2).

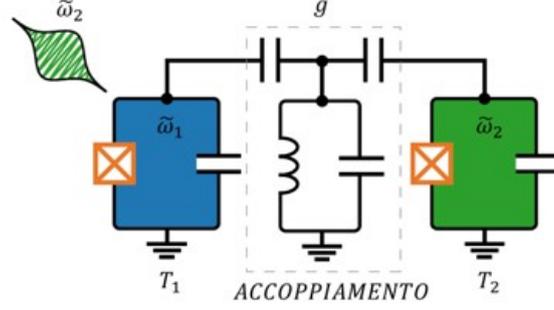


Figura 2: Circuito di Cross-Resonance

Un fixed-frequency transmon è realizzato grazie ad un circuito formato da una capacità di shunt in parallelo con una giunzione Josephson caratterizzata da una propria capacità e induttanza [7][10].

Si ricavata l'hamiltoniana classica di ciascuno dei circuiti presenti in quello di cross-resonance e, grazie al principio di corrispondenza e all'introduzione di opportuni operatori bosonici di creazione e distruzione, si ottengono gli hamiltoniani quantistici che li descrivono.

Il circuito LC è descritto dall'hamiltoniano di un oscillatore armonico a singolo modo ω_r [7] mentre il *fixed-frequency transmons* dall'hamiltoniano di un oscillatore anarmonico con anarmonicità δ_j e frequenza ω_j [7], dove $j = 1, 2$ è l'indice che individua il *transmon*.

L'operatore che descrive l'intero circuito è, quindi, formato da un termine relativo al circuito LC, da due termini relativi ai *transmons* e dal termine di accoppiamento alla Jaynes-Cummings che descrive l'interazione di ciascun *transmon* con il risonatore [9]

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^2 \left[\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \frac{\delta_j}{2} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j - \mathbb{1}) \right] + \omega_r \hat{c}^\dagger \hat{c} + \sum_{j=1}^2 g_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{c} + \hat{b}_j \hat{c}^\dagger)$$

dove gli operatori $\hat{b}_j^\dagger, \hat{b}_j$ creano e distruggono quanti di eccitazione relativi ai *transmons* mentre \hat{c}^\dagger, \hat{c} creano e distruggono quanti di eccitazione del campo elettromagnetico quantizzato, ossia fotoni. Scegliendo opportunamente le componenti circuitali, si fa in modo che l'anarmonicità δ_j dei *transmons* possa essere considerata infinita, così che l'hamiltoniano che lo descrive si riduca a quello di un sistema a due livelli [9].

Inoltre, ponendosi nel caso in cui l'energia di interazione g_j tra i modi del risonatore e i *transmons* è molto più piccola dell'energia dei *transmons* liberi, si può effettuare una trasformazione di Schrieffer-Wolff [11] finalizzata ad integrare i gradi di libertà del risonatore ed ottenere un hamiltoniano effettivo

trattando perturbativamente il termine di interazione [7][8][9]. L'hamiltoniano che si ottiene ha la seguente forma [9]

$$\hat{H}_{CR} = a(\hat{\sigma}_z \otimes \mathbb{1}_2) + b(\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x)$$

in essa compaiono gli operatori di Pauli e non quelli bosonici di creazione e distruzione visti nella precedente espressione perché, avendo isolato solo i primi due livelli dello spettro energetico dei *transmons*, risulta più comodo utilizzare i dicotomici operatori di spin. La forma esplicita dei coefficienti a , b , sebbene verrà esplicitamente ricavata, non sarà di alcuna utilità per le operazioni successive.

La derivazione da principi primi dell'*hamiltoniano di cross-resonance* serve a capire quali sono gli operatori $\hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_k$, con $j, k = 0, 1, 2, 3$, necessari a descrivere la porta logica in esame.

Nel terzo capitolo verranno esposti alcuni dei metodi più utilizzati per caratterizzare i dispositivi qunatistici reali, oltre ai ben noti *interleaved benchmarking*[12][2] e *quantum process tomography*[13], verrà descritto il metodo della *optimal parent hamiltonian* [14]. Grazie a quest'ultimo, utilizzando le informazioni relative al modello teorico acquisite nel precedente capitolo, verrà caratterizzato il circuito di cross-resonance.

La *optimal parent hamiltonian*, come la quantum process tomography, si basa sulla *quantum state tomography*, però, differentemente da esso, può essere utilizzato anche avendo a disposizione una tomografia incompleta dello stato in uscita dal dispositivo da caratterizzare [14]. Le informazioni derivanti dal modello teorico vengono sfruttate da questo metodo per ridurre ulteriormente le risorse computazionali da utilizzare per ricostruire l'hamiltoniano di cross-resonance del circuito reale.

Un'altra importante caratteristica del metodo della *optimal parent hamiltonian* è che quest'ultimo effettua una ricostruzione dell'hamiltoniano di un dispositivo seguendo l'evoluzione temporale dello stato iniziale che esso stesso determina e immagazzina le informazioni acquisite nel corso dell'evoluzione in un funzionale di costo [14]; la *quantum process tomography*, invece, effettua questa ricostruzione basandosi sulla forma dello stato in un solo istante temporale, pertanto risulta meno accurata [13].

Nel quarto capitolo, grazie all'hamiltoniano di cross-resonance di un circuito reale noto tramite metodi diversi da quelli precedentemente menzionati, sono state simulate delle evoluzioni a partire da certi stati iniziali e, utilizzando questi dati, è stato applicato il metodo della *optimal parent hamiltonian*. I coefficienti dell'hamiltoniano calcolati utilizzando questo metodo sono stati confrontati con quelli dell'hamiltoniano noto e, da questo confronto, è stato possibile stimare l'errore sulla stima dei coefficienti.

Capitolo 1

Computazione quantistica

Perché utilizzare la computazione quantistica?

Il mondo microscopico è governato dalle leggi della meccanica quantistica quindi è logico pensare di costruire dispositivi che sfruttino tali leggi perché, così facendo, un giorno si potrebbe arrivare a sfruttare tutte le potenzialità computazionali che essi offrono, se, invece, si utilizzassero dispositivi modellizzati secondo le leggi della teoria classica newtoniana, le loro potenzialità risulterebbero certamente limitate. In realtà, bisogna aggiungere che, attualmente, non si conoscono nemmeno le reali potenzialità dei computer classici ma, nonostante ciò, basandosi sulla precedente argomentazione che confronta le potenzialità dei due approcci, si è deciso di indirizzare la ricerca verso la computazione quantistica[4].

Questa disciplina punta alla realizzazione di strumenti computazionali le cui componenti di base, le porte logiche, funzionano sfruttando le proprietà degli stati quantistici quali sono il principio di sovrapposizione, l'interferenza probabilistica e le correlazioni non-locali dovute all'entanglement. Tali dispositivi predono il nome di *computer quantistici* e le loro componenti di base *porte logiche quantistiche*.

La transizione verso un approccio alternativo a quello della computazione classica è anche dovuto alla necessità di disporre di strumenti di calcolo sempre più performanti in grado di effettuare operazioni che i dispositivi classici o non sono in grado di svolgere o per i quali impegnerebbero troppo tempo. Si è visto che utilizzando i computer quantistici c'è stata una generale riduzione dei tempi necessari ad effettuare determinate operazioni anche se tale riduzione non è della stessa entità per tutte le operazioni: in alcuni casi la computazione quantistica non ha portato alcuna riduzione dei tempi necessari alla computazione, in altri il miglioramento è stato moderato, in altri ancora è stato esponenziale[4][7].

1.1 Qubit: definizione e proprietà

Mentre la *computazione classica* si basa sulla logica binaria e sfrutta gli stati classici 0, 1, chiamati *bit*, la *computazione quantistica* si basa sull'algebra lineare e sfrutta gli stati quantistici $|0\rangle$, $|1\rangle$ [5].

Quest'ultimi godono di proprietà completamente differenti rispetto agli stati classici, infatti essi sono vettori appartenenti ad uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e, in quanto tali, tra loro è possibile definire un prodotto scalare da cui deriva una definizione di norma e per essi vale il principio di sovrapposizione come conseguenza della linearità di \mathcal{H} .

L'applicazione del principio di sovrapposizione in un simile contesto è totalmente nuova, però, in generale, è ben nota in fisica dato che tale principio vale in tutti gli spazi vettoriali e riveste un ruolo particolarmente rilevante in elettromagnetismo, infatti, grazie ad esso, è possibile spiegare fenomeni come l'interferenza e la diffrazione. Da un punto di vista interpretativo, però, l'interferenza tra i campi elettromagnetici è diversa da quella tra i vettori d'onda perché in quest'ultimo caso si tratta di interferenza probabilistica.

Una proprietà totalmente nuova di cui godono esclusivamente gli stati quantistici è l'entanglement, una correlazione non-locale che sussiste tra due o più stati che li rende intimamente interconnessi ed è removibile solo attraverso una misura.

L'entanglement, dal punto di vista della computazione e dell'informazione quantistica, rappresenta una fondamentale risorsa che permette di effettuare operazioni che utilizzando gli stati classici non potrebbero essere svolte. I protocolli di comunicazione quantistica (teletrasporto, superdense coding, etc.), in particolare quelli in cui l'informazione viene crittografata, sono basati sull'entanglement, senza il quale o non potrebbero esistere oppure non si otterrebbero vantaggi rispetto all'utilizzo di stati classici [15][16].

Anche gli algoritmi utilizzati nella computazione quantistica, ad esempio la *quantum Fourier transform*[15], non possono prescindere dall'entanglement perchè se lo facessero, sarebbe possibile emularli con algoritmi classici.

Principio di sovrapposizione

Gli stati $|0\rangle$, $|1\rangle$ costituiscono la base computazionale ortonormale e si rappresentano nel seguente modo

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

un generico stato di un sistema quantistico in cui sono accessibili solamente due stati è rappresentato da un vettore che è ottenuto dalla combinazione lineare dei vettori di base

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \tag{1.1}$$

dove i coefficienti α, β sono complessi, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, e devono soddisfare la seguente condizione di normalizzazione

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (1.2)$$

affinchè valga l'interpretazione probabilistica del vettore d'onda stabilita dalla regola di Born. Il vettore d'onda (1.1) è la più generale rappresentazione di un *qubit*, il quanto di informazione utilizzato nella computazione quantistica. I qubit sono il corrispettivo quantistico dei bit classici ma, come spiegato in precedenza, rispetto a quest'ultimi godono di molte più proprietà. In sintesi, quindi, da un punto di vista fisico, un qubit è un sistema a due livelli, ossia un sistema che può trovarsi solo in due stati, in $|0\rangle$ con probabilità $|\alpha|^2$ e in $|1\rangle$ con probabilità $|\beta|^2$.

Sfera di Bloch

Il vettore d'onda (1.1) di un qubit può essere riscritto tenendo presente che

$$\begin{aligned} \alpha &= |\alpha|e^{i\varphi_\alpha} \\ \beta &= |\beta|e^{i\varphi_\beta} \end{aligned}$$

infatti, sostituendo queste espressioni, si ottiene

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\alpha|e^{i\varphi_\alpha} |0\rangle + |\beta|e^{i\varphi_\beta} |1\rangle \\ &= e^{i\varphi_\alpha} \left(|\alpha| |0\rangle + |\beta|e^{i(\varphi_\beta - \varphi_\alpha)} |1\rangle \right) \end{aligned}$$

trascurando la fase globale $e^{i\varphi_\alpha}$ e definendo $\varphi = \varphi_\beta - \varphi_\alpha$, si ricava

$$|\psi\rangle = |\alpha| |0\rangle + |\beta|e^{i\varphi} |1\rangle$$

dato che α, β devono soddisfare la condizione (1.2), è possibile parametrizzarli rispetto ad un angolo θ nel seguente modo

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ |\beta| &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

così da ottenere una espressione alternativa per $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad (1.3)$$

dove gli angoli φ, θ variano nei seguenti intervalli

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

L'espressione (1.3) in cui il vettore $|\psi\rangle$ è stato parametrizzato utilizzando φ e θ serve per poter rappresentare lo stato di un qubit come un punto sulla superficie di una sfera di raggio unitario nota come *sfera di Bloch*; in questo contesto, $|\psi\rangle$ è rappresentato come un vettore posizione che congiunge il centro della sfera che coincide con l'origine del sistema di riferimento con un punto sulla sua superficie. Il parametro φ è l'angolo che forma la proiezione del vettore $|\psi\rangle$ nel piano xy con il semiasse positivo delle ascisse mentre il parametro θ è l'angolo che forma il vettore $|\psi\rangle$ con il semiasse positivo dell'asse z . Nella Figura 1.1 è mostrata la rappresentazione di un generico vettore d'onda $|\psi\rangle$ sulla sfera di Bloch. Alcuni punti della sfera sono semplici

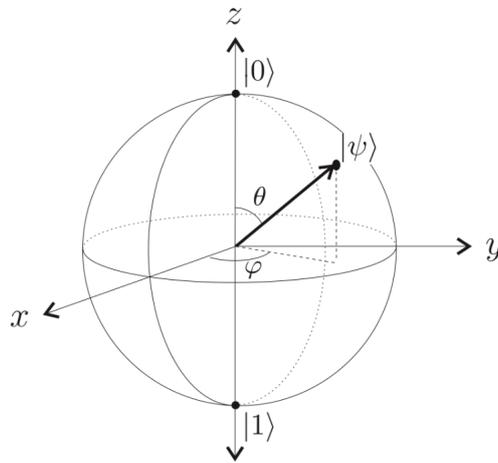


Figura 1.1: Sfera di Bloch

da identificare:

- il punto di coordinate $\varphi = \text{indefinito}$, $\theta = 0$ è il polo nord e ad esso corrisponde lo stato

$$|\psi\rangle = |0\rangle;$$

- il punto di coordinate $\varphi = \text{indefinito}$, $\theta = \pi$ è il polo sud e ad esso corrisponde lo stato

$$|\psi\rangle = |1\rangle;$$

- il punto di coordinate $\varphi = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ è il punto in cui la sfera interseca il semiasse positivo delle ascisse e ad esso corrisponde lo stato

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = |+\rangle;$$

- il punto di coordinate $\varphi = \pi$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ è il punto in cui la sfera interseca il semiasse negativo delle ascisse e ad esso corrisponde lo stato

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = |-\rangle;$$

- il punto di coordinate $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ è il punto in cui la sfera interseca il semiasse positivo delle ordinate e ad esso corrisponde lo stato

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}};$$

- il punto di coordinate $\varphi = \frac{3}{2}\pi$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ è il punto in cui la sfera interseca il semiasse negativo delle ordinate e ad esso corrisponde lo stato

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}};$$

Prodotto tensoriale ed entanglement

Ai fini computazionali, gli stati formati da un solo qubit non sono sufficienti per effettuare tutte le operazioni quindi bisogna accoppiare più sistemi fisici a due livelli dando luogo a stati formati da $N_q > 1$ qubit. Da un punto di vista formale, lo stato di un sistema formato da più qubit accoppiati si rappresenta utilizzando il prodotto tensoriale.

Un qubit appartiene ad uno spazio di Hilbert \mathcal{H} di dimensione $N = 2$, per costruire stati formati da $N_q > 1$ qubit si deve, innanzitutto, definire un nuovo spazio di Hilbert $\mathcal{H}^{\otimes N_q}$ nel seguente modo

$$\mathcal{H}^{\otimes N_q} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{N_q}$$

dove \otimes simboleggia l'operazione di prodotto tensoriale. Lo spazio vettoriale $\mathcal{H}^{\otimes N_q}$ ha dimensione $\dim(\mathcal{H}^{\otimes N_q}) = N^{N_q} = 2^{N_q}$ e un vettore ad esso appartenente si costruisce effettuando il prodotto tensoriale di N_q vettori, ognuno dei quali appartiene allo spazio \mathcal{H}_j , con $j = 1, \dots, N_q$, ad esempio

$$|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |0\rangle_{N_q}$$

o, utilizzando una notazioni equivalenti

$$\underbrace{|0, 0, \dots, 0\rangle}_{N_q \text{ volte}}, \underbrace{|0\rangle |0\rangle \dots |0\rangle}_{N_q \text{ volte}}$$

i quali rappresentano uno stato formato da N_q qubit tutti uguali a $|0\rangle$.

Una importante proprietà di cui gode il prodotto tensoriale è quella associativa per cui se, ad esempio, si prende in considerazione uno stato formato da tre qubit, vale la seguente uguaglianza

$$|0, 1, 0\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle \otimes (|1\rangle \otimes |0\rangle) = (|0\rangle \otimes |1\rangle) \otimes |0\rangle$$

L'entanglement, essendo una correlazione non-locale tra due o più stati, può sussistere solamente se si hanno a disposizione due o più sistemi accoppiati; si

consideri il vettore d'onda $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^{\otimes N_q}$, esso rappresenta uno *stato entangled* se non è possibile porlo nella seguente forma

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_{N_q}\rangle$$

dove $|\psi_j\rangle$, con $j = 1, 2, \dots, N_q$, è il generico vettore d'onda rappresentativo dello stato del j -esimo qubit.

Nel caso di sistemi formati da due qubit, $N_q = 2$, il più noto esempio di stati entangled è rappresentato dagli stati di Bell [17]

$$\begin{aligned} |\Phi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0\rangle + |1, 1\rangle) \\ |\Phi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0\rangle - |1, 1\rangle) \\ |\Psi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 1\rangle + |1, 0\rangle) \\ |\Psi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 1\rangle - |1, 0\rangle) \end{aligned}$$

mentre nei sistemi formati da tre qubit un esempio è rappresentato dai seguenti stati [18]

$$\begin{aligned} |GHZ\rangle &= \frac{1}{2} (|0, 0, 0\rangle + |1, 1, 1\rangle) \\ |W\rangle &= \frac{1}{3} (|0, 0, 1\rangle + |0, 1, 0\rangle + |1, 0, 0\rangle) \end{aligned}$$

1.2 Porte logiche quantistiche

Come nella computazione classica, anche in quella quantistica gli stati vengono fatti evolvere utilizzando le porte logiche, di queste ce ne sono due tipi, quelle a un qubit e quelle a due qubit[7][8].

Le porte logiche che agiscono su stati formati da più di due qubit si ottengono componendo l'azione delle porte precedentemente menzionate.

In generale, le porte quantistiche agiscono sui vettori di stato mediante operatori unitari \hat{U}

$$\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1} \implies \hat{U}^{-1}\hat{U} = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \mathbb{1}$$

per cui esse sono reversibili. La reversibilità consiste, una volta noto lo stato in uscita da una porta logica, nel poter risalire in modo univoco allo stato in ingresso, di questa proprietà godono tutte le porte quantistiche ma non tutte quelle classiche.

Le porte logiche quantistiche che si sanno realizzare sperimentalmente, rappresentate nella base computazione $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ o, per quanto riguarda quelle

Tabella 1.1

Operatori di Pauli	
$\hat{\sigma}_0 = \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$\hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Tabella 1.2

Porta di Hadarmard	Porta S	Porta T
$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}$	$\hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$

Tabella 1.3

Operatori di rotazione
$\hat{R}_x(\alpha) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mathbb{1} + i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$
$\hat{R}_y(\alpha) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mathbb{1} + i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$
$\hat{R}_z(\alpha) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mathbb{1} + i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}$

Tabella 1.4

Porta CNOT	
Rappresentazione matriciale e scomposizione operatoriale	Tavole di verità
$\hat{U}_{\text{CNOT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\rangle\langle 0 \mathbb{1} + 1\rangle\langle 1 \hat{\sigma}_x$	$ 0,0\rangle \longrightarrow 0,0\rangle$ $ 0,1\rangle \longrightarrow 0,1\rangle$ $ 1,0\rangle \longrightarrow 1,1\rangle$ $ 1,1\rangle \longrightarrow 1,0\rangle$

Tabella 1.5

Porta CZ	
Rappresentazione matriciale e scomposizione operatoriale	Tavole di verità
$\hat{U}_{CZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0\rangle\langle 0 \mathbb{1} + 1\rangle\langle 1 \hat{\sigma}_z$	$ 0, 0\rangle \longrightarrow 0, 0\rangle$ $ 0, 1\rangle \longrightarrow 0, 1\rangle$ $ 1, 0\rangle \longrightarrow 1, 0\rangle$ $ 1, 1\rangle \longrightarrow - 1, 0\rangle$

a due qubit, nella base $\{|0, 0\rangle, |0, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle\}$, sono illustrate nelle seguenti tabelle.

Non tutte, però, sono necessarie ai fini computazionali perché le operazioni effettuate da alcune di esse possono essere compiute combinando opportunamente un limitato insieme di porte logiche che prende il nome di *insieme universale di porte logiche quantistiche* [8].

Un esempio di insieme universale di porte logiche è il seguente

$$\left\{ \hat{R}_x(\alpha), \hat{R}_y(\alpha), \hat{R}_z(\alpha), \hat{U}_{\text{CNOT}} \right\}$$

in esso compaiono i tre operatori di rotazione che rappresentano porte a singolo qubit e l'operatore associato alla porta CNOT che, invece, è una porta logica a due qubit. Grazie al teorema di Solovay-Kitaev è possibile dimostrare che qualunque porta logica a singolo qubit può essere ottenuta componendo le porte \hat{H} , \hat{S} , \hat{T} quindi un altro possibile insieme universale è il seguente [7][8]

$$\left\{ \hat{H}, \hat{S}, \hat{T}, \hat{U}_{\text{CNOT}} \right\} \quad (1.4)$$

Gli operatori \hat{H} , \hat{S} , \hat{U}_{CNOT} , a loro volta, sono i generatori del *gruppo di Clifford* (Appendice A).

Una caratteristica della porta CNOT è quella di essere capace di generare *entanglement*, infatti, applicandola ad uno stato separabile quale può, ad esempio, essere il seguente

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |0\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |0, 0\rangle)$$

si ottiene

$$\hat{U}_{\text{CNOT}} |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 1\rangle + |0, 0\rangle)$$

il quale rappresenta uno degli stati di Bell ed è uno stato entangled.

A questo punto è facile notare che questa porta possiede altre due utili proprietà:

- applicando due volte \hat{U}_{CNOT} ad un qualunque stato si ottiene lo stato iniziale quindi

$$(\hat{U}_{\text{CNOT}})^2 = \mathbb{1}$$

- se la si applica ad uno stato entangled a due qubit, ad esempio gli stati di Bell, si ottiene uno stato separabile

$$|\Phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0\rangle + |1, 1\rangle) \implies \hat{U}_{\text{CNOT}} |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0\rangle + |1, 0\rangle)$$

$$|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 1\rangle + |1, 0\rangle) \implies \hat{U}_{\text{CNOT}} |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0\rangle + |1, 1\rangle)$$

$$|\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 1\rangle - |1, 0\rangle) \implies \hat{U}_{\text{CNOT}} |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0\rangle - |1, 1\rangle)$$

$$|\Phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0\rangle - |1, 1\rangle) \implies \hat{U}_{\text{CNOT}} |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0\rangle - |1, 1\rangle)$$

- in generale, se la si applica ad uno stato entangled formato da più di due qubit, ad esempio lo stato $|W\rangle$, indipendentemente dalla scelta del qubit di controllo e quello di target, non si ottiene mai uno stato separabile.

La porta CNOT, dunque, riveste un ruolo fondamentale per la realizzazione di stati entangled dai quali la computazione quantistica non può prescindere, per tale ragione una sua corretta realizzazione risulta fondamentale per la fabbricazione dei processori quantistici.

1.3 Possibili realizzazioni di sistemi a due livelli

In precedenza si è visto che un qubit è fisicamente realizzabile utilizzando sistemi a due livelli, ossia sistemi fisici in cui sono presenti delle osservabili (gradi di libertà) che possono assumere solamente due valori o che hanno una bassa probabilità di assumere un valore diverso dai due desiderati. Alcuni dei sistemi su cui fino ad ora sono stati implementati i qubit sono i seguenti [19]:

- fotoni, utilizzando questo sistema è possibile realizzare un qubit in due differenti modi
 1. sfruttando gli stati di polarizzazione della luce in cui il ket $|0\rangle$ rappresenta lo stato in cui il fotone è polarizzato orizzontalmente e il ket $|1\rangle$ rappresenta lo stato in cui il fotone è polarizzato verticalmente;
 2. sfruttando gli autostati dell'operatore numero in cui il ket $|0\rangle$ rappresenta lo stato di vuoto e il ket $|1\rangle$ il primo stato eccitato in cui è presente un solo fotone;

- elettroni, utilizzando questo sistema è possibile realizzare un qubit in due differenti modi
 1. sfruttando gli autostati dell'operatore di spin $\hat{\sigma}_z$ in cui il ket $|0\rangle$ rappresenta l'autostato associato all'autovalore $+1$ mentre il ket $|1\rangle$ rappresenta l'autostato associato all'autovalore -1 ;
 2. sfruttando gli autostati dell'operatore numero in cui il ket $|0\rangle$ rappresenta lo stato di vuoto e il ket $|1\rangle$ rappresenta il primo stato eccitato in cui è presente un elettrone;
- giunzione Josephson, in base al circuito realizzato tramite tale componente, è possibile realizzare un qubit due tipi di qubit
 1. superconducting charge qubit che sfrutta gli autostati dell'operatore carica in cui il ket $|0\rangle$ rappresenta lo stato in cui la carica totale nel circuito è nulla $Q = 0$ mentre il ket $|1\rangle$ rappresenta lo stato in cui nel circuito è presente una coppia di Cooper e quindi la carica totale presente nel circuito è $Q = -2|q_e|$;
 2. superconducting flux qubit che sfrutta gli autostati dell'operatore fase in cui il ket $|0\rangle$ rappresenta lo stato in cui la corrente circola in senso orario mentre il ket $|1\rangle$ rappresenta lo stato in cui la corrente circola in senso antiorario;
- quantum dot, sfruttando i gradi di libertà di spin di questo sistema, il ket $|0\rangle$ rappresenta lo stato in cui lo spin è down mentre il ket $|1\rangle$ rappresenta lo stato in cui lo spin è up;
- trappole ioniche[15], le quali consistono nel confinare atomi elettricamente carichi(ioni) utilizzando un campo elettromagnetico. Grazie a questi sistemi è possibile realizzare un qubit in due differenti modi:
 1. utilizzando due livelli energetici appartenenti allo spettro elettronico iperfine dello ione intrappolato;
 2. utilizzando lo stato fondamentale e lo stato eccitato dello ione.

I qubit superconduttivi e quelli implementati tramite i quantum dot, differenzialmente dai qubit che sfruttano i gradi di libertà dei fotoni o degli elettroni, sono fabbricati artificialmente per cui molte loro proprietà sono controllabili; questo risulta essere un vantaggio notevole dato che ciò rende tali dispositivi configurabili in base alla necessità. Tra i due tipi di implementazione appena menzionati, però, sussiste un'importante differenza dato che i qubit superconduttivi sono facilmente scalabili, cioè grazie ad esse è possibile realizzare in modo semplice sistemi più complessi formati da molti qubit mentre quelli implementati tramite i quantum dots si prestano molto meno alla scalabilità dato che le transizioni energetiche tra lo stato fondamentale e gli stati eccitati devono rispettare le regole di selezione[4][8].

Soprattutto grazie alle loro proprietà di scalabilità e configurabilità, i qubit superconduttivi sono attualmente i più utilizzati per la realizzazione di porte logiche quantistiche. In questo lavoro di tesi verrà analizzato nel dettaglio il superconducting charge qubit.

1.4 I criteri di DiVincenzo per la computazione quantistica

Per concludere questo capitolo vengono di seguito riportati i cinque criteri che un sistema fisico a due livelli, un dispositivo quantistico necessario ad effettuare operazioni computazionali e uno strumento che effettua misurazioni devono soddisfare per poter essere utilizzati per la computazione quantistica stabiliti dal fisico statunitense David DiVincenzo[4]:

- il sistema fisico deve essere scalabile e al suo interno i qubit devono essere ben caratterizzati.
- tramite lo strumento di misurazione bisogna saper inizializzare un sistema a più qubit in uno stato semplice e affidabile;
- gli stati del sistema utilizzato devono avere tempi di decoerenza molto maggiori del tempo necessario ad effettuare tutte le operazioni computazionali;
- grazie al dispositivo utilizzato bisogna riuscire ad implementare un insieme universale di porte logiche;
- lo strumento di misurazione deve riuscire ad effettuare misure affidabili.

Il primo e il terzo criterio sono certamente soddisfatti dai qubit superconduttivi e, come vedremo in seguito, le porte logiche superconduttive soddisfano il quarto criterio; invece, per quanto riguarda il secondo e il quinto criterio, il loro soddisfacimento dipende dalla scelta dell'apparato sperimentale.

Conclusioni

In questo capitolo sono stati brevemente introdotti i concetti di base della computazione quantistica, quello su cui verrà posta particolare attenzione riguarda l'insieme universale di porte logiche e la sua implementazione. Si è visto che la porta CNOT, data la sua capacità di generare entanglement, fa parte di tale insieme per cui riveste un ruolo fondamentale indispensabile nell'ambito della computazione quantistica.

In virtù delle loro proprietà, i qubit superconduttivi sono tra i più utilizzati per la realizzazione dei computer quantistici quindi si è reso necessario ricercare la modalità ottimale per implementare una porta CNOT che sfrutti proprio le proprietà superconduttive di materiali.

Capitolo 2

Implementazione porta CNOT

L'obiettivo di questo capitolo è di analizzare nel dettaglio uno dei modi in cui è possibile implementare una porta CNOT facendo uso di materiali superconduttivi; a tal fine verrà brevemente introdotta la superconduttività e, in seguito, spiegato come poterla utilizzare per realizzare le giunzioni Josephson, le componenti basilari dei circuiti superconduttivi.

L'implementazione della porta CNOT non è diretta ma è possibile solamente grazie alla *porta logica di cross-resonance*, per tale ragione verrà innanzitutto analizzato nel dettaglio il circuito necessario all'implementazione di quest'ultima e, in seguito, spiegato come utilizzarla per implementare la porta CNOT.

2.1 Giunzione Josephson

Quello superconduttivo è uno stato della materia verso il quale alcuni elementi e composti transiscono quando la loro temperatura scende al di sotto di un valore critico T_c che, dipendentemente dall'elemento e dal composto, può assumere valori compresi tra le unità e le centinaia di Kelvin [20].

Le proprietà macroscopiche di un materiale superconduttivo sono le seguenti[21][22]:

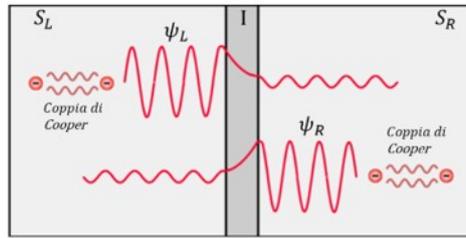
- ha un resistenza elettrica nulla se ad esso viene applicato un campo elettrico esterno il cui valore è inferiore ad un certo valore critico dipendente dal materiale;
- si comporta come un diamagnete perfetto se, ad una data temperatura inferiore a quella critica, ad esso viene applicato un campo magnetico esterno che abbia un'intensità inferiore ad un valore critico H_c dipendente dal materiale (effetto Meissner);
- nelle circostanze in cui un campo magnetico riesce a penetrare all'interno di un materiale superconduttivo, il flusso di tale campo al suo interno può assumere solamente valori quantizzati;

- interfacciando uno strato di materiale isolante con due strati di materiale superconduttivo in generale diversi, si realizza una struttura chiamata giunzione Josephson (Figura 2.1). Grazie a questa giunzione è possibile osservare l'effetto Josephson, ossia la manifestazione del fatto che un materiale superconduttivo può essere descritto utilizzando un'unica pseudo-funzione d'onda macroscopica;
- la temperatura critica T_c è inversamente proporzionale alla radice quadrata della massa atomica del materiale (effetto isotopico).

Le insolite proprietà dei superconduttori derivano dalla loro struttura microscopica. L'interazione tra gli elettroni è mediata, in genere, dai fononi, quindi il rapporto tra l'energia termica e il potenziale repulsivo tra gli elettroni svolge un ruolo determinante permettendo alle coppie di elettroni di attrarsi dando luogo alle coppie di Cooper [20].

Per descrivere un superconduttore è possibile utilizzare due diversi approcci, uno rigoroso e formale basato sulla funzione d'onda BCS oppure un fenomeno logico basato sull'utilizzo della pseudo-funzione d'onda di Ginzburg-Landau. Per la seguente trattazione verrà utilizzato il secondo.

Figura 2.1: Giunzione Josephson



Nell'approccio alla Ginzburg-Landau, la funzione d'onda di un superconduttore viene scritta in forma polare

$$\psi(\vec{r}, t) = |\psi|e^{i\theta(\vec{r}, t)} = \sqrt{\rho}e^{i\theta(\vec{r}, t)} \quad (2.1)$$

dove

$$\rho = |\psi|^2 \quad (2.2)$$

è la densità di superfluido, cioè il numero di coppie di Cooper per unità di volume, mentre θ è la fase della funzione d'onda di ciascuna coppia di elettroni. Dato che tutte le coppie di Cooper condividono una stessa fase, lo stato fondamentale di un superconduttore è un stato caratterizzato da una elevata coerenza [21].

La derivazione delle equazioni caratteristiche di una giunzione Josephson che segue ripercorre quella presente nella referenza [6].

Si introducono ψ_L, ψ_R le funzioni d'onda del superconduttore di sinistra e

di quello di destra, rispettivamente, utilizzando l'approccio alla Ginburg-Landau, le loro espressioni sono

$$\begin{aligned}\psi_L &= |\psi_L|e^{i\theta_L} = \sqrt{\rho_L}e^{i\theta_L} \\ \psi_R &= |\psi_R|e^{i\theta_R} = \sqrt{\rho_R}e^{i\theta_R}\end{aligned}\quad (2.3)$$

le equazioni di Schrodinger che ne governano la dinamica sono le seguenti

$$\begin{aligned}E_L\psi_L + K_{LR}\psi_R &= i\hbar\frac{\partial\psi_L}{\partial t} \\ E_R\psi_R + K_{LR}\psi_L &= i\hbar\frac{\partial\psi_R}{\partial t}\end{aligned}\quad (2.4)$$

dove E_L, E_R sono i valori dell'energia dello stato fondamentale dei due superconduttori mentre K_{LR} è la costante di accoppiamento tra i due strati superconduttivi.

L'accoppiamento tra i superconduttori è dovuto all'effetto tunnel delle coppie di Cooper attraverso lo strato isolante quindi la sua entità e , di conseguenza, il valore di K_{LR} dipendono fortemente sia dalla scelta dei materiali utilizzati per realizzare la giunzione che dall'intensità dei campi ad essa applicati. In assenza di un campo magnetico esterno K_{LR} può essere considerata reale, $K_{LR} \in \mathbb{R}$.

Se si applica una differenza di potenziale V tra i due strati superconduttivi, i livelli E_L, E_R si spostano uno rispetto all'altro in modo da soddisfare la seguente disuguaglianza

$$E_L - E_R = qV > 0 \quad (2.5)$$

ponendo lo zero dell'energia a metà tra i due livelli energetici, essi assumono le seguenti espressioni

$$E_L = \frac{qV}{2}, \quad E_R = -\frac{qV}{2} \quad (2.6)$$

in questo modo le equazioni (2.4) diventano

$$\begin{cases} \frac{qV}{2}\psi_L + K_{LR}\psi_R = i\hbar\frac{\partial\psi_L}{\partial t} \\ -\frac{qV}{2}\psi_R + K_{LR}\psi_L = i\hbar\frac{\partial\psi_R}{\partial t} \end{cases} \quad (2.7)$$

Sostituendo le espressioni (2.3) nelle equazioni precedenti e considerando che le fasi e le densità dipendono solo dal tempo per cui le derivate temporali parziali è possibile trasformarle in derivate temporali totali, si ottiene

$$\begin{cases} \frac{qV}{2}\sqrt{\rho_L}e^{i\theta_L} + K_{LR}\sqrt{\rho_R}e^{i\theta_R} = i\hbar\frac{d}{dt}(\sqrt{\rho_L}e^{i\theta_L}) \\ -\frac{qV}{2}\sqrt{\rho_R}e^{i\theta_R} + K_{LR}\sqrt{\rho_L}e^{i\theta_L} = i\hbar\frac{d}{dt}(\sqrt{\rho_R}e^{i\theta_R}) \end{cases}$$

svolgendo una serie di passaggi e definendo la seguente quantità

$$\varphi = \theta_R - \theta_L \quad (2.8)$$

che rappresenta la differenza di fase tra le funzioni d'onda che descrivono i superconduttori della giunzione, si ottiene

$$\begin{cases} \frac{qV}{2}\sqrt{\rho_L} + K_{LR}\sqrt{\rho_R}(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = i\frac{\hbar}{2\sqrt{\rho_L}}\frac{d\rho_L}{dt} - \hbar\sqrt{\rho_L}\frac{d\theta_L}{dt} \\ -\frac{qV}{2}\sqrt{\rho_R} + K_{LR}\sqrt{\rho_L}(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi)) = i\frac{\hbar}{2\sqrt{\rho_R}}\frac{d\rho_R}{dt} - \hbar\sqrt{\rho_R}\frac{d\theta_R}{dt} \end{cases}$$

grazie al principio di identità dei polinomi, si ottengono due coppie di equazioni, una relativa alla parte reale

$$\begin{aligned} \frac{qV}{2}\sqrt{\rho_L} + K_{LR}\sqrt{\rho_R}\cos(\varphi) &= -\hbar\sqrt{\rho_L}\frac{d\theta_L}{dt} \\ -\frac{qV}{2}\sqrt{\rho_R} + K_{LR}\sqrt{\rho_L}\cos(\varphi) &= -\hbar\sqrt{\rho_R}\frac{d\theta_R}{dt} \end{aligned}$$

e una relativa alla parte immaginaria

$$\begin{aligned} K_{LR}\sqrt{\rho_R}\sin(\varphi) &= \frac{\hbar}{2\sqrt{\rho_L}}\frac{d\rho_L}{dt} \\ -K_{LR}\sqrt{\rho_L}\sin(\varphi) &= \frac{\hbar}{2\sqrt{\rho_R}}\frac{d\rho_R}{dt} \end{aligned}$$

Dalla prima coppia si ricavano le equazioni relative alle derivate temporali delle fasi delle funzioni d'onda che descrivono i due superconduttori

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_L}{dt} &= -\frac{qV}{2\hbar} - \frac{K_{LR}}{\hbar}\sqrt{\frac{\rho_R}{\rho_L}}\cos(\varphi) \\ \frac{d\theta_R}{dt} &= \frac{qV}{2\hbar} - \frac{K_{LR}}{\hbar}\sqrt{\frac{\rho_L}{\rho_R}}\cos(\varphi) \end{aligned} \quad (2.9)$$

dalla seconda, invece, si ricavano le equazioni relative alle derivate temporali delle densità di coppie di Cooper di ciascun superconduttore

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_L}{dt} &= \frac{2K_{LR}}{\hbar}\sqrt{\rho_L\rho_R}\sin(\varphi) \\ \frac{d\rho_R}{dt} &= -\frac{2K_{LR}}{\hbar}\sqrt{\rho_L\rho_R}\sin(\varphi) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Nel caso in cui i superconduttori utilizzati per realizzare la giunzione sono uguali, si ha che le relative densità di coppie di elettroni sono le stesse, inoltre, grazie al generatore di tensione esterno le densità di portatori rimangono, in media, costanti nel tempo quindi si ha che

$$\rho_L = \rho_R = \rho_0$$

dove ρ_0 è il valore costante della densità di superfluido; le equazioni precedenti, in base a quanto appena affermato, diventano

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_L}{dt} &= -\frac{qV}{2\hbar} - \frac{K_{LR}}{\hbar}\cos(\varphi) \\ \frac{d\theta_R}{dt} &= \frac{qV}{2\hbar} - \frac{K_{LR}}{\hbar}\cos(\varphi) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_L}{dt} &= \frac{2K_{LR}}{\hbar}\rho_0 \sin(\varphi) \\ \frac{d\rho_R}{dt} &= -\frac{2K_{LR}}{\hbar}\rho_0 \sin(\varphi)\end{aligned}\quad (2.12)$$

Si prenda in considerazione la coppia di equazioni (2.11), sottraendo la seconda dalla prima e tenendo presente la (2.8), si ottiene

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta_R}{dt} - \frac{d\theta_L}{dt} = \frac{qV}{\hbar}\quad (2.13)$$

dove q è la carica dei portatori che, nel caso dei superconduttori, sono le coppie di Cooper per cui si ha che

$$q = 2|q_e| < 0$$

dove $q_e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C è la carica dell'elettrone, quindi si ottiene la seguente equazione

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2|q_e|}{\hbar}V > 0\quad (2.14)$$

la quale rappresenta la *seconda equazione caratteristica di una giunzione Josephson* e mette in relazione la derivata temporale della differenza di fase tra i due superconduttori della giunzione con la tensione ad essi applicata.

In generale, la tensione V dipende dal tempo, quindi, integrando la precedente equazione, si ottiene l'espressione di $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{2|q_e|}{\hbar} \int_0^t dt' V(t')\quad (2.15)$$

dove $\varphi_0 = \varphi(0)$ è il valore iniziale della differenza di fase.

L'equazione (2.14) può essere riscritta in funzione del flusso del campo magnetico indotto utilizzando la legge di Faraday-Neumann-Lenz

$$f = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} [\phi_\Sigma(\vec{B})]\quad (2.16)$$

la quale, ponendo $c = 1$ e semplificando la notazione relativa al flusso del campo di induzione magnetica

$$\phi_\Sigma(\vec{B}) \longrightarrow \phi$$

diventa

$$f = -\frac{d\phi}{dt}\quad (2.17)$$

Dato che la forza elettromotrice indotta f ha sempre segno opposto rispetto a quella applicata V , quando tra queste due grandezze sussiste la seguente relazione $V = -f$, sostituendo la (2.17) nella (2.14), si ottiene

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2|q_e|}{\hbar}V = -\frac{2|q_e|}{\hbar}f = \frac{2|q_e|}{\hbar} \frac{d\phi}{dt}\quad (2.18)$$

quindi si ricava che

$$V = \frac{d\phi}{dt} \quad (2.19)$$

L'equazione ottenuta è, a meno di un segno, formalmente analoga alla legge di Faraday-Neumann-Lenz, ciò che la rende diversa da quest'ultima è il significato fisico delle grandezze in essa contenute, infatti, V è la tensione presente ai capi della giunzione e non la tensione indotta da un campo magnetico visto che i superconduttori espellono totalmente i campi magnetici ad essi applicati. La V è dovuta al moto di cariche che è intrinsecamente presente all'interno di una giunzione Josephson.

Dall'equazione (2.18) si ricava un'altra importante relazione tra φ e ϕ

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2|q_e|}{\hbar} \frac{d\phi}{dt} \quad (2.20)$$

ricordando la definizione di quanto di flusso magnetico in un superconduttore

$$\phi_0 = \frac{hc}{2|q_e|} = \frac{2\pi\hbar c}{2|q_e|} = \frac{2\pi\hbar}{2|q_e|} \quad (2.21)$$

dove nell'ultimo passaggio si è posto $c = 1$, si ottiene

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2|q_e|}{\hbar} \frac{d\phi}{dt} = \frac{2\pi}{\phi_0} \frac{d\phi}{dt} \quad (2.22)$$

integrando ambo i membri rispetto al tempo, si ricava la seguente relazione

$$\varphi(t) = 2\pi \frac{\phi(t)}{\phi_0} \quad (2.23)$$

che lega la differenza di fase tra le funzioni d'onda dei due superconduttori al flusso del campo magnetico indotto.

Le equazioni (2.12) differiscono per un segno, pertanto basta prenderne in considerazione solamente una delle due, ad esempio la prima

$$\frac{d\rho_L}{dt} = \frac{2K_{LR}}{\hbar} \rho_0 \sin(\varphi) \quad (2.24)$$

se si moltiplicano ambo i membri della precedente equazione per il modulo della carica dei portatori $2|q_e|$, si ottiene

$$2|q_e| \frac{d\rho_L}{dt} = 2|q_e| \frac{2K_{LR}}{\hbar} \rho_0 \sin(\varphi)$$

e si pone

$$J(\varphi(t)) = 2|q_e| \frac{d\rho_L}{dt}$$

$$J_0 = 2|q_e| \frac{2K_{LR}}{\hbar} \rho_0$$

dove J_0 rappresenta la densità di corrente critica della giunzione ossia la densità di corrente massima che può attraversarla senza che il materiale torni allo stato resistivo, essa diventa

$$J(\varphi(t)) = J_0 \sin(\varphi(t)) \quad (2.25)$$

Quest'ultima rappresenta la *prima equazione caratteristica della giunzione* e descrive l'andamento della densità di corrente J in funzione della differenza di fase φ tra le funzioni d'onda dei due superconduttori che costituiscono la giunzione. Per ricavare l'espressione della corrente bisogna effettuare l'integrale di flusso della precedente equazione ma, dato che si sta analizzando un caso in cui la densità di corrente è unidimensionale e parallela al versore normale alla sezione trasversale della giunzione, esso si riduce ad un integrale di superficie

$$I(\varphi(t)) = \int_{\Sigma} dS J(t) = \sin(\varphi(t)) \int_{\Sigma} dS J_0 = I_0 \sin(\varphi(t)) \quad (2.26)$$

Riassumendo, le equazioni caratteristiche di una giunzione Josephson collegata ad un generatore di tensione esterno $V(t)$ sono le seguenti

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2|q_e|}{\hbar} V &\iff \varphi(t) = \varphi_0 + \frac{2|q_e|}{\hbar} \int_0^t dt' V(t') \\ I(\varphi(t)) &= I_0 \sin(\varphi(t)) \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.2 Circuito superconduttivo

Il circuito necessario all'implementazione della porta di cross-resonance è formato da un risonatore elettrico realizzato tramite un circuito LC e da un *fixed-frequency transmon*, il quale è formato da una giunzione Josephson in parallelo con un condensatore.

Di seguito verranno prima analizzate queste componenti singolarmente, poi si vedrà come accoppiarle per realizzare il circuito desiderato.

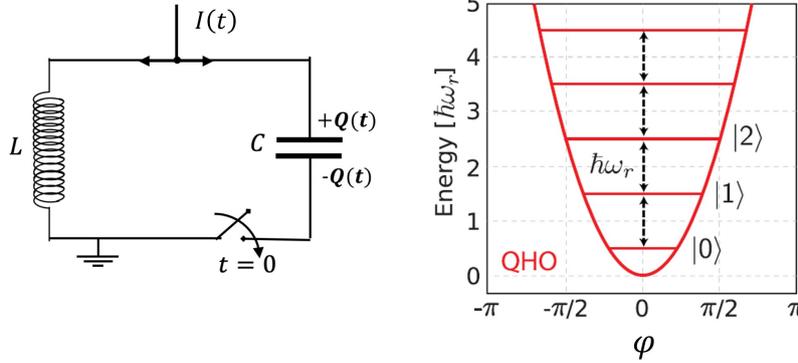
2.2.1 Risonatore

Si consideri un circuito LC contenente un condensatore di capacità C_r e un induttore lineare di induttanza L posti in parallelo come quello mostrato in Figura 2.2.

Di questo circuito si vuole, innanzitutto, ricavare l'espressione dell'hamiltoniana classica la quale, grazie al principio di corrispondenza, viene trasformato in un operatore autoaggiunto. Il calcolo ripercorre i passaggi riportati nelle referenze [7][8].

Per ottenere l'hamiltoniana classica bisogna derivare l'espressione dell'energia immagazzinata o dissipata da ciascun elemento circuitale, per cui si comincia con il ricavare l'espressione dell'energia immagazzinata da un condensatore; la grandezza fisica che caratterizza tale componente del circuito

Figura 2.2: A sinistra è illustrato il circuito LC in parallelo, a destra l'andamento dell'energia in funzione della fase φ



è la capacità C che è definita nel seguente modo

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.28)$$

dove Q è la carica presente sul condensatore e V è la tensione tra le sue armature, da questa espressione si ricava che

$$Q = CV \quad (2.29)$$

derivando ambo i membri rispetto al tempo, si ottiene la seguente relazione

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} \quad (2.30)$$

che correla la corrente in ingresso/uscita dal condensatore alla derivata temporale della tensione ed è necessaria al calcolo dell'energia immagazzinata dal condensatore.

In generale, l'espressione dell'energia immagazzinata o dissipata da un componente circuitale è la seguente

$$E(t) = \int_0^t dt' I(t')V(t') \quad (2.31)$$

per un condensatore di capacità C , l'espressione precedente rappresenta l'energia da esso immagazzinata, utilizzando la (2.30), è uguale a

$$\begin{aligned} E_C(t) &= \int_0^t dt' C \frac{dV}{dt'} V(t') = \frac{C}{2} \int_0^t dt' \frac{d}{dt'} (V(t')^2) \\ &= \frac{C}{2} [V(t')^2] \Big|_0^t = \frac{C}{2} [V(t)]^2 \end{aligned}$$

quindi, in conclusione, si ottiene che

$$E_C(t) = \frac{C}{2}[V(t)]^2 \quad (2.32)$$

Per quanto riguarda l'induttore, invece, la grandezza fisica che lo caratterizza è l'induttanza L , la quale è definita nel seguente modo

$$L = \left(\frac{\partial I}{\partial \phi} \right)^{-1} \quad (2.33)$$

In un induttore lineare di induttanza L_0 , quale, ad esempio, può essere un solenoide, la relazione che lega la corrente I che circola al suo interno e il flusso del campo di induzione magnetica ϕ è la seguente

$$I = \frac{\phi}{L_0}$$

quindi

$$L = \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\phi}{L_0} \right) \right]^{-1} = L_0 = \text{costante} \quad (2.34)$$

Dalle precedenti equazioni si vede che in un induttore lineare la corrente I è direttamente proporzionale a ϕ .

Per calcolare l'energia immagazzinata in un induttore bisogna considerare l'espressione della potenza P

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = -f(t)I(t) \quad (2.35)$$

dove W è il lavoro esterno da compiere per caricare tale componente circuitale e il segno negativo al secondo membro indica che questo deve essere contrario alla forza elettromotrice autoindotta f ; ricordando le espressioni di f e I

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{d\phi}{dt} \\ I(t) &= \frac{\phi(t)}{L} \end{aligned} \quad (2.36)$$

e inserendole in quella di P , si ottiene

$$P(t) = - \left(-\frac{d\phi}{dt} \right) \frac{\phi(t)}{L} = \frac{\phi(t)}{L} \frac{d\phi}{dt} \quad (2.37)$$

integrando rispetto al tempo la precedente equazione, si ricava l'espressione del lavoro o, equivalentemente, dell'energia E_L immagazzinata nell'induttore

$$\begin{aligned} E_L(t) &= \int_0^t dt P(t') = \int_0^t dt' \frac{d\phi}{dt'} \frac{\phi(t')}{L} \\ &= \frac{1}{2L} \int_0^t dt' \frac{d}{dt'} (\phi(t'))^2 = \frac{1}{2L} [\phi(t)]^2 \end{aligned}$$

in sintesi, quindi, si è ottenuto che

$$E_L(t) = \frac{1}{2L} [\phi(t)]^2$$

In base ai risultati ottenuti, le espressioni dell'energia immagazzinata negli elementi circuitali facenti parte del circuito considerato sono le seguenti

$$\begin{aligned} E_C(t) &= \frac{C_r}{2} [V(t)]^2 \\ E_L(t) &= \frac{1}{2L} [\phi(t)]^2 \end{aligned} \quad (2.38)$$

identificando E_C con l'energia cinetica del circuito e E_L con quella potenziale

$$\begin{aligned} E_C(t) &= T_C \\ E_L(t) &= U_L \end{aligned}$$

si ricava l'espressione della lagrangiana

$$\mathcal{L} = T_C - U_L = \frac{C_r}{2} [V(t)]^2 - \frac{1}{2L} [\phi(t)]^2 \quad (2.39)$$

Si sceglie come coordinata generalizzata q il flusso del campo di induzione magnetica ϕ per cui bisogna scrivere \mathcal{L} in funzione di

$$q = \phi, \quad \dot{q} = \frac{d\phi}{dt} \quad (2.40)$$

per farlo si tener presente che l'equazione di Kirchhoff delle tensioni scritta in circuito LC assume la seguente forma

$$V + V_L = 0 \quad (2.41)$$

dove V è la tensione ai capi del condensatore e V_L è la tensione ai capi dell'induttore ed è uguale a alla forza elettromotrice indotta

$$V_L = f = -\frac{d\phi}{dt}$$

Sostituendo queste quantità nell'equazione di Kirchhoff, si ricava la seguente uguaglianza

$$V = -V_L = \frac{d\phi}{dt} \quad (2.42)$$

in questo modo l'espressione della lagrangiana diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{C_r}{2} [V(t)]^2 - \frac{1}{2L} [\phi(t)]^2 \\ &= \frac{C_r}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2L} [\phi(t)]^2 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Una volta nota l'espressione di \mathcal{L} , si calcola il momento coniugato p

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left(\frac{C_r}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right) = C_r \frac{d\phi}{dt} = C_r V = Q \quad (2.44)$$

dove Q è la carica presente sul condensatore anche se, di fatto, è anche uguale alla carica totale presente nel circuito LC considerato.

A questo punto si può effettuare la trasformata di Legendre per calcolare l'hamiltoniana a partire dalla Lagrangiana

$$\begin{aligned} H_r &= p\dot{q} - \mathcal{L} \\ &= Q \frac{d\phi}{dt} - \frac{C}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2L} [\phi(t)]^2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

utilizzando l'equazione (2.42) unitamente alla seguente espressione per la tensione derivante dalla definizione di capacità

$$C_r = \frac{Q}{V} \implies V = \frac{Q}{C_r}$$

si ottiene

$$\frac{d\phi}{dt} = V = \frac{Q}{C_r}$$

quindi, in definitiva, l'hamiltoniana diventa

$$\begin{aligned} H_r &= Q \frac{Q}{C_r} - \frac{C}{2} \left(\frac{Q}{C} \right)^2 + \frac{1}{2L} [\phi(t)]^2 \\ &= \frac{Q^2}{C_r} - \frac{Q^2}{2C_r} + \frac{1}{2L} [\phi(t)]^2 \\ &= \frac{Q^2}{2C_r} + \frac{[\phi(t)]^2}{2L} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Si introducono le seguenti variabili adimensionali

$$\begin{aligned} n &= \frac{Q}{2|q_e|} \\ \varphi &= 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} \end{aligned} \quad (2.47)$$

dove ϕ_0 è il quanto di flusso magnetico, così che Q e ϕ possono essere riscritte come segue

$$\begin{aligned} Q &= 2|q_e|n \\ \phi &= \frac{\phi_0}{2\pi} \varphi \end{aligned}$$

in questo modo l'hamiltoniana diventa

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{1}{2C_r} 4|q_e|^2 n^2 + \frac{1}{2L} \left(\frac{\phi_0}{2\pi} \right)^2 \varphi^2 \\ &= 4 \left(\frac{|q_e|^2}{2C_r} \right) n^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_0}{2\pi\sqrt{L}} \right)^2 \varphi^2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

definendo le seguenti quantità

$$\begin{aligned} \epsilon_{c_r} &= \frac{|q_e|^2}{2C_r} \\ \epsilon_l &= \left(\frac{\phi_0}{2\pi\sqrt{L}} \right)^2 \end{aligned}$$

si ottiene

$$H_r = 4\epsilon_{c_r} n^2 + \frac{1}{2} \epsilon_l \varphi^2 \quad (2.49)$$

Applicando il principio di corrispondenza alle variabili φ , n

$$\begin{aligned} \varphi &\longrightarrow \hat{\varphi} \\ n &\longrightarrow \hat{n} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (2.50)$$

si ottengono due nuovi operatori dei quali il primo è un operatore di moltiplicazione mentre il secondo è di derivazione che soddisfano la seguente regola di commutazione

$$[\hat{\varphi}, \hat{n}] = i\hbar$$

grazie a questa operazione, anche l'hamiltoniana diventa un operatore

$$H_r \longrightarrow \hat{H}_r = 4\epsilon_{c_r} \hat{n}^2 + \frac{1}{2} \epsilon_l \hat{\varphi}^2 \quad (2.51)$$

Ora si introducono gli operatori di creazione e distruzione di quanti di eccitazione \hat{c}^\dagger , \hat{c} riscrivendo $\hat{\varphi}$ e \hat{n} in funzione di essi

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} &= \varphi_0 (\hat{c} + \hat{c}^\dagger), \quad \varphi_0 = \sqrt[4]{\frac{2\epsilon_{c_r}}{\epsilon_l}} \\ \hat{n} &= -in_0 (\hat{c} - \hat{c}^\dagger), \quad n_0 = \sqrt[4]{\frac{\epsilon_l}{32\epsilon_{c_r}}} \end{aligned} \quad (2.52)$$

essendo operatori bosonici, \hat{c} e \hat{c}^\dagger soddisfano la seguente regola di commutazione

$$[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = \hat{c}\hat{c}^\dagger - \hat{c}^\dagger\hat{c} = \mathbb{1} \quad (2.53)$$

A questo punto bisogna riscrivere \hat{H}_r utilizzando queste definizioni, per farlo si devono riscrivere i termini in esso contenuti:

- $\hat{\varphi}^2 = \varphi_0^2 (\hat{c}^2 + (\hat{c}^\dagger)^2 + \hat{c}\hat{c}^\dagger + \hat{c}^\dagger\hat{c})$
- $\hat{n}^2 = -n_0^2 (\hat{c}^2 + (\hat{c}^\dagger)^2 - \hat{c}\hat{c}^\dagger - \hat{c}^\dagger\hat{c})$

e si trascurano tutti i termini che non conservano il numero di eccitazioni dato che il loro valore medio calcolato sugli autostati aventi un numero fissato di eccitazioni è nulla. Introducendo le seguenti grandezze

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= \sqrt{2\epsilon_{c_r}\epsilon_l} \\ \hbar\omega_r &= \sqrt{8\epsilon_{c_r}\epsilon_l}\end{aligned}\quad (2.54)$$

dove la prima rappresenta l'energia di punto zero dell'oscillatore mentre la seconda, a meno del fattore \hbar , rappresenta la frequenza di risonanza dell'oscillatore, e tenendo presenti le precedenti considerazioni, l'espressione di \hat{H}_r diventa

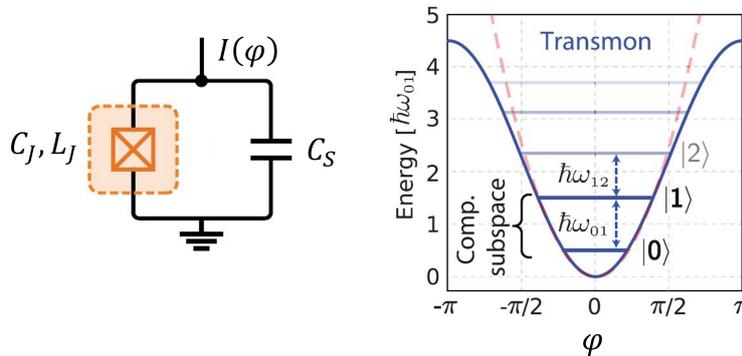
$$\hat{H}_r = \hbar\omega_r\hat{c}^\dagger\hat{c} + \epsilon_0\mathbb{1}\quad (2.55)$$

In definitiva, si è visto che un circuito LC in cui l'induttore e il condensatore sono posti in parallelo è descritto, da un punto di vista quantistico, da un hamiltoniano analogo a quello di un *oscillatore armonico*.

2.2.2 Fixed-frequency transmon

Si consideri un circuito formato da un condensatore di capacità C_S e da una giunzione Josephson di capacità C_J e induttanza L_J posti in parallelo come quello mostrato in Figura 2.3. Questa combinazione di componenti circuitali così disposti costituisce un nuovo elemento circuitale che prende il nome di *fixed-frequency transmon*. Anche di questo circuito si vuole ricavare prima

Figura 2.3: A sinistra è illustrata la giunzione Josephson in parallelo con una capacità di shunt, a destra l'andamento dell'energia in funzione della differenza di fase φ



l'hamiltoniana classica e, da questa, risalire all'hamiltoniano quantistico, nell'effettuare questo calcolo verranno ripercorsi i passaggi delle referenze [7][8].

Nel circuito considerato sono presenti due condensatori, uno di capacità C_S l'altro di capacità C_J , in base all'equazione (2.32), le rispettive espressioni dell'energia immagazzinata sono le seguenti

$$\begin{aligned} E_{C_S}(t) &= \frac{C_S}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \\ E_{C_J}(t) &= \frac{C_J}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ora si vuole ricavare l'espressione dell'energia immagazzinata in una giunzione Josephson, per farlo bisogna utilizzare le sue equazioni caratteristiche contenute nell'equazione (2.27) le quali vengono riscritte ponendo $\varphi_0 = 0$ e utilizzando la (2.23), così da ottenere

$$\begin{aligned} V_J &= \frac{\hbar}{2|q_e|} \frac{2\pi}{\phi_0} \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \\ I &= I_0 \sin\left(2\pi \frac{\phi}{\phi_0}\right) \end{aligned} \quad (2.57)$$

dalla seconda si nota subito come la relazione tra I e ϕ è non-lineare, infatti, l'espressione dell'induttanza L_J della giunzione è

$$L_J = \left(\frac{\partial I}{\partial \phi} \right)^{-1} = \frac{\phi_0}{2\pi I_0} \frac{1}{\cos\left(2\pi \frac{\phi}{\phi_0}\right)} \quad (2.58)$$

Una giunzione Josephson si comporta, dunque, da un punto di vista induttivo, come un induttore non-lineare.

L'energia immagazzinata dalla giunzione E_{L_J} è uguale a

$$E_{L_J}(t) = \int_0^t dt' I(t') V_J(t') \quad (2.59)$$

sostituendo all'interno di questa espressione quelle di I e V_J , si ottiene

$$\begin{aligned} E_{L_J}(t) &= \int_0^t dt' I_0 \sin(\varphi(t')) \frac{\hbar}{2|q_e|} \frac{d\varphi}{dt'} \\ &= -I_0 \frac{\hbar}{2|q_e|} \cos(\varphi(t)) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Si definisce l'energia cinetica del circuito T_C come l'energia totale immagazzinata nei condensatori

$$T_C = \frac{C_J}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{C_S}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{C}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \quad (2.61)$$

dove $C = C_S + C_J$ e quella potenziale U_L come l'energia immagazzinata nell'induttore non-lineare

$$U_L = -I_0 \frac{\hbar}{2|q_e|} \cos(\varphi(t)) \quad (2.62)$$

così da poter calcolare la lagrangiana del sistema

$$\mathcal{L} = T_C - U_L = \frac{C}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + I_0 \frac{\hbar}{2|q_e|} \cos(\varphi(t)) \quad (2.63)$$

A questo si scelgono le variabili q, \dot{q} nel seguente modo

$$q = \phi, \dot{q} = \frac{d\phi}{dt} \quad (2.64)$$

anche in questo caso si vede che il momento coniugato p è uguale al modulo della carica totale Q presente nel circuito

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = Q \quad (2.65)$$

così che la trasformata di Legendre della lagrangiana per ottenere l'hamiltoniana è uguale a

$$H_T = p\dot{q} - \mathcal{L} = Q \frac{d\phi}{dt} - \frac{C}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - I_0 \frac{\hbar}{2|q_e|} \cos(\varphi(t)) \quad (2.66)$$

L'espressione precedente deve essere riscritta unicamente in funzione di $q = \phi$ e $p = Q$, per farlo bisogna usare la prima delle equazioni (2.57) e la (2.23) così che

$$H_T = QV_J - \frac{C}{2} V_J^2 - I_0 \frac{\hbar}{2|q_e|} \cos\left(2\pi \frac{\phi(t)}{\phi_0}\right) \quad (2.67)$$

inoltre, dalla legge di Kirchhoff sulle tensioni, applicata al circuito illustrato in Figura 2.3, si ricava che

$$V + V_J = 0 \implies V = -V_J \implies |V| = |V_J| \quad (2.68)$$

essendo V la tensione ai capi del condensatore di capacità C , si ha che

$$C = \frac{|Q|}{|V|} = \frac{Q}{|V|} \implies |V| = \frac{Q}{C} = |V_J| \quad (2.69)$$

quindi l'espressione di H_T diventa

$$\begin{aligned} H_T &= \frac{Q^2}{C} - \frac{Q^2}{2C} - I_0 \frac{\hbar}{2|q_e|} \cos\left(2\pi \frac{\phi(t)}{\phi_0}\right) \\ &= \frac{Q^2}{2C} - I_0 \frac{\hbar}{2|q_e|} \cos\left(2\pi \frac{\phi(t)}{\phi_0}\right) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Si definisce nuovamente la variabile adimensionale n

$$n = \frac{Q}{2|q_e|} \quad (2.71)$$

la quale, insieme alla φ , viene utilizzata per riscrivere H_T ; essendo presente un elemento superconduttivo, sia n che φ hanno un significato fisico ben preciso, la prima rappresenta il numero di portatori presenti nel circuito mentre la seconda, come dedotto in precedenza, rappresenta la differenza di fase tra le funzioni d'onda che descrivono i superconduttori della giunzione. Si definiscono, inoltre, le seguenti grandezze

$$\begin{aligned}\epsilon_c &= \frac{q_e^2}{2C} \\ \epsilon_j &= I_0 \frac{\hbar}{2|q_e|}\end{aligned}\tag{2.72}$$

così che l'hamiltoniana diventa

$$\begin{aligned}H_T &= 4\frac{q_e^2}{2C}n^2 - \epsilon_j \cos\left(2\pi\frac{\phi(t)}{\phi_0}\right) \\ &= 4\epsilon_c n^2 - \epsilon_j \cos(\varphi(t))\end{aligned}\tag{2.73}$$

Si sviluppa in serie di potenze $\cos(\varphi)$ e si prendono in considerazione solo i termini fino al quarto ordine in φ così da ricavare la seguente espressione per H_T

$$H_T \approx 4\epsilon_c n^2 - \epsilon_j \left(1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{24}\varphi^4\right)\tag{2.74}$$

in cui le variabili n , φ sono adimensionali.

Come visto in precedenza, si utilizza il principio di corrispondenza per trasformare le variabili classiche n , φ in operatori così da ottenere l'operatore hamiltoniano del circuito considerato

$$\begin{aligned}\hat{H}_T &\simeq 4\epsilon_c \hat{n}^2 - \epsilon_j \left(\mathbb{1} - \frac{1}{2}\hat{\varphi}^2 + \frac{1}{24}\hat{\varphi}^4\right) \\ &= -\epsilon_j \mathbb{1} + 4\epsilon_c \hat{n}^2 + \epsilon_j \left(\frac{1}{2}\hat{\varphi}^2 - \frac{1}{24}\hat{\varphi}^4\right)\end{aligned}\tag{2.75}$$

A questo punto, si introducono gli operatori di creazione e distruzione di quanti di eccitazione \hat{b}^\dagger , \hat{b} e si riscrivono $\hat{\varphi}$ e \hat{n} in funzione di essi

$$\begin{aligned}\hat{\varphi} &= \varphi_0(\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \quad \varphi_0 = \sqrt[4]{\frac{2\epsilon_c}{\epsilon_j}} \\ \hat{n} &= -in_0(\hat{b} - \hat{b}^\dagger), \quad n_0 = \sqrt[4]{\frac{\epsilon_j}{32\epsilon_c}}\end{aligned}\tag{2.76}$$

essendo operatori bosonici, \hat{b} e \hat{b}^\dagger soddisfano la seguente regola di commutazione

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \hat{b}\hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b} = \mathbb{1}\tag{2.77}$$

L'hamiltoniano \hat{H}_T deve essere riscritto utilizzando le (2.76), per farlo bisogna esplicitare i termini in esso contenuti:

- $\hat{\varphi}^2 = \varphi_0^2 \left(\hat{b}^2 + (\hat{b}^\dagger)^2 + \hat{b}\hat{b}^\dagger + \hat{b}^\dagger\hat{b} \right)$
- $\hat{\varphi}^4 = \varphi_0^4 \left(\hat{b}^4 + \hat{b}^2(\hat{b}^\dagger)^2 + \hat{b}^3\hat{b}^\dagger + \hat{b}^2\hat{b}^\dagger\hat{b} + (\hat{b}^\dagger)^2\hat{b}^2 + (\hat{b}^\dagger)^4 + \right.$
 $\quad + (\hat{b}^\dagger)^2\hat{b}\hat{b}^\dagger + (\hat{b}^\dagger)^3\hat{b} + \hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{b}^2 + \hat{b}(\hat{b}^\dagger)^3 + (\hat{b}\hat{b}^\dagger)^2 + \hat{b}(\hat{b}^\dagger)^2\hat{b} +$
 $\quad \left. + \hat{b}^\dagger\hat{b}^3 + \hat{b}^\dagger\hat{b}(\hat{b}^\dagger)^2 + \hat{b}^\dagger\hat{b}^2\hat{b}^\dagger + (\hat{b}^\dagger\hat{b}) \right)$
- $\hat{n}^2 = -n_0^2 \left(\hat{b}^2 + (\hat{b}^\dagger)^2 - \hat{b}\hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b} \right)$

e trascurare tutti i termini che non conservano il numero di eccitazioni dato che il loro valore medio calcolato sugli autostati aventi un numero fissato di eccitazioni è nulla. In questo modo si ottiene la seguente espressione per \hat{H}_T

$$\begin{aligned} \hat{H}_T &\simeq -\epsilon_j \mathbb{1} + 4\epsilon_c \hat{n}^2 + \frac{\epsilon_j}{2} \hat{\varphi}^2 - \frac{\epsilon_j}{24} \hat{\varphi}^4 = \\ &= -\epsilon_j \mathbb{1} + 4\epsilon_c n_0^2 \left(2\hat{b}^\dagger\hat{b} + \mathbb{1} \right) + \frac{\epsilon_j}{2} \varphi_0^2 \left(2\hat{b}^\dagger\hat{b} + \mathbb{1} \right) + \\ &\quad - \frac{\epsilon_j}{24} \varphi_0^4 \left(6\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b} + 12\hat{b}^\dagger\hat{b} + 3\mathbb{1} \right) \end{aligned}$$

esplicitando φ_0 , n_0 , si ha

$$\begin{aligned} \hat{H}_T &\simeq \left(2\sqrt{\frac{\epsilon_j\epsilon_c}{2}} - \epsilon_j - \frac{\epsilon_c}{4} \right) \mathbb{1} + 4\sqrt{\frac{\epsilon_j\epsilon_c}{2}} \hat{b}^\dagger\hat{b} + \\ &\quad - \frac{\epsilon_c}{2} \hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b} - \epsilon_c \hat{b}^\dagger\hat{b} \end{aligned}$$

in definitiva, si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{H}_T &\simeq \left(2\sqrt{2\epsilon_j\epsilon_c} - \epsilon_j - \frac{\epsilon_c}{4} \right) \mathbb{1} + \left(\sqrt{8\epsilon_c\epsilon_j} - \epsilon_c \right) \hat{b}^\dagger\hat{b} + \\ &\quad - \frac{\epsilon_c}{2} \hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b} \end{aligned} \quad (2.78)$$

Si definiscono le seguenti quantità:

- l'energia di punto zero ϵ_{pz}

$$\epsilon_{pz} = 2\sqrt{2\epsilon_j\epsilon_c} - \epsilon_j - \frac{\epsilon_c}{4}$$

- la frequenza di risonanza ω

$$\hbar\omega = \sqrt{8\epsilon_c\epsilon_j} - \epsilon_c$$

- l'anarmonicità δ

$$\delta = (E_2 - E_1) - (E_1 - E_0)$$

dove E_0 , E_1 , E_2 sono, rispettivamente, le energie dello stato fondamentale, del primo e del secondo stato eccitato e sono uguali a

$$\begin{aligned}\hat{H}_T |0\rangle &= 0 \\ \hat{H}_T |1\rangle &= \hbar\omega |1\rangle \implies E_1 = \hbar\omega \\ \hat{H}_T |2\rangle &= \left(2\hbar\omega - \frac{\epsilon_c}{2}\right) |2\rangle \implies E_2 = 2\hbar\omega - \frac{\epsilon_c}{2}\end{aligned}$$

quindi

$$\delta = -\frac{\epsilon_c}{2} < 0$$

in questo modo l'espressione di \hat{H}_T diventa

$$\hat{H}_T \simeq \epsilon_{pz}\mathbb{1} + \hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{\delta}{2}\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b} \quad (2.79)$$

L'operatore $\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b}$ può essere riscritto utilizzando la regola di commutazione tra \hat{b} e \hat{b}^\dagger

$$\begin{aligned}\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b} &= \hat{b}^\dagger(\hat{b}^\dagger\hat{b})\hat{b} \\ &= \hat{b}^\dagger(\hat{b}\hat{b}^\dagger - \mathbb{1})\hat{b} \\ &= (\hat{b}^\dagger\hat{b})(\hat{b}^\dagger\hat{b}) - \hat{b}^\dagger\hat{b} \\ &= \hat{b}^\dagger\hat{b}(\hat{b}^\dagger\hat{b} - \mathbb{1})\end{aligned}$$

e, ponendo $\hbar = 1$, si ottiene l'espressione definitiva dell'hamiltoniano del *fixed-frequency transmon*

$$\hat{H}_T \simeq \epsilon_{pz}\mathbb{1} + \hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{\delta}{2}\hat{b}^\dagger\hat{b}(\hat{b}^\dagger\hat{b} - \mathbb{1}) \quad (2.80)$$

Il precedente operatore è l'hamiltoniano di un *oscillatore anarmonico* ed è diagonale nella base degli stati numero di occupazione, bisogna, inoltre, notare che il termine di anarmonicità interviene solo se \hat{H}_T viene fatto agire su uno stato eccitato superiore al primo altrimenti risulta nullo.

La presenza dell'anarmonicità svolge un ruolo imprescindibile per la creazione di un sistema a due livelli perché grazie ad essa, scegliendo opportunamente le componenti del circuito, è possibile isolare lo stato fondamentale e il primo stato eccitato dal resto dello spettro energetico dando luogo ad un sistema a due livelli.

In base alla scelta delle componenti del circuito C_J , C_S , cambia il valore del rapporto tra ϵ_c e ϵ_j che risulta determinante per stabilire la modalità di funzionamento del circuito. Le possibili situazioni sono le seguenti:

- $\frac{\epsilon_j}{\epsilon_c} \leq 1$, in tale circostanza il circuito risulta molto sensibile al rumore associato alle fluttuazioni di carica.
Dalla (2.75) si vede che ϵ_c è il coefficiente dell'operatore numero \hat{n} quindi, in una situazione di questo tipo, gli autovalori di tale operatore diventano buoni numeri quantici, inoltre, qualora il termine $4\epsilon_c\hat{n}^2$ diventasse dominante, il potenziale del sistema assumerebbe nuovamente la forma di un potenziale armonico e si perderebbero i vantaggi legati all'anarmonicità introdotta dalla giunzione Josephson.
- $\frac{\epsilon_j}{\epsilon_c} \gg 1$, in questo caso, invece, il circuito risulta quasi totalmente insensibile al rumore associato alle fluttuazioni di carica.
Sperimentalmente questa configurazione si realizza utilizzando una capacità di shunt C_S tale che

$$C_S \gg C_J$$

così che possa valere la precedente disuguaglianza

$$\epsilon_c = \frac{q_e^2}{2C} = \frac{q_e^2}{2(C_J + C_S)} \ll \epsilon_j$$

Quindi, affinché il *transmon* possa essere utilizzato per la realizzazione di un sistema a due livelli e considerando che l'eliminazione del rumore per un dispositivo che deve raggiungere elevati livelli di fidelity è fondamentale, si sceglie di operare nel regime in cui $\frac{\epsilon_j}{\epsilon_c} \gg 1$.

2.3 Cross-Resonance gate

Nella sezione precedente sono stati separatamente analizzati un circuito LC e un *fixed-frequency transmon* e, di ognuno, è stato ricavato l'hamiltoniano, tutto ciò è stato necessario perché accoppiando due *transmons* tramite un circuito LC e scegliendo opportunamente la tensione da utilizzare per alimentare questo circuito, si realizza un circuito necessario alla realizzazione di una porta logica nota come *cross-resonance gate*. In seguito si vedrà come quest'ultima, combinata con altre porte logiche, permette la realizzazione di una porta CNOT che è una porta universale indispensabile alla realizzazione dei computer quantistici.

In generale, le porte logiche quantistiche devono essere progettate in modo tale da godere delle seguenti proprietà[10][23]:

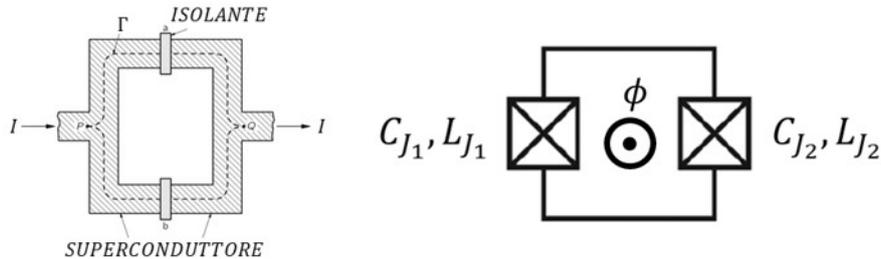
- controllabilità;

- elevata coerenza degli stati in uscita;
- scalabilità.

Soddisfare pienamente e simultaneamente tutti e tre i requisiti è attualmente impossibile pertanto bisogna decidere su quale caratteristica puntare principalmente mantenendo comunque un certo equilibrio.

La scelta del circuito superconduttivo da utilizzare influenza fortemente le proprietà del dispositivo, in questo contesto si è scelto di utilizzare un *fixed-frequency transmon*, una possibile alternativa è rappresentata dal *flux-tunable transmon* che si realizza tramite il seguente circuito

Figura 2.4: A sinistra è illustrata la struttura dello SQUID, a destra la sua rappresentazione circuitale



La precedente configurazione è anche nota con l'acronimo di SQUID (Superconductive Quantum Interference Device) e, differentemente dal *fixed-frequency transmon*, il suo funzionamento si basa sull'utilizzo di un campo magnetico esterno il cui flusso attraverso il circuito ne determina le caratteristiche. Sebbene un dispositivo simile presenti alcuni vantaggi come un migliore controllabilità che si traduce nella possibilità di variare la frequenza di funzionamento e di utilizzarlo come porta logica a singolo qubit, a causa del campo magnetico esterno risulta essere un dispositivo molto più rumoroso dato che in esso è presente anche il flux-noise oltre il charge-noise e ciò compromette fortemente la coerenza degli stati da esso generati[7][8].

Il *fixed-frequency transmon*, invece, sebbene sia un dispositivo meno controllabile dato che la sua frequenza di funzionamento non è modificabile poiché è determinata dai parametri costruttivi del circuito, è capace di generare stati ad elevata coerenza $1\text{ ms} \leq \tau_c \leq 10\text{ ms}$ grazie al fatto che, non essendoci alcun campo magnetico esterno, il flux-noise non è presente ma c'è il charge-noise [23].

La *porta logica di cross-resonance* è realizzata tramite il circuito illustrato nella Figura 2.5 il quale contiene due *fixed-frequency transmons* ognuno dei quali è accoppiato capacitivamente ad un circuito LC, che, a sua volta, serve ad accoppiare i due *transmons*.

Bisogna notare che per la realizzazione di questa porta è fondamentale alimentare il primo *transmon* con una tensione esterna che abbia la frequenza

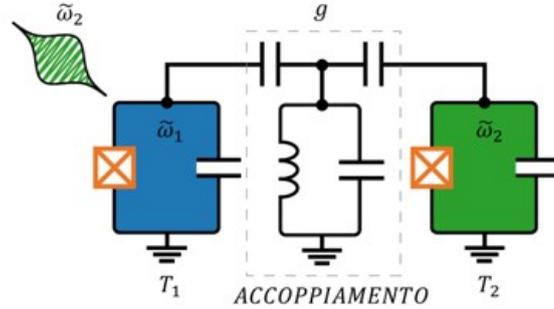


Figura 2.5: Circuito di Cross-Resonance

uguale alla frequenza di risonanza del secondo *transmon* [7].

L'hamiltoniano di partenza utilizzato per descrivere il precedente circuito è formato unicamente da operatori di creazione e distruzione bosonici ed è dato dalla somma degli hamiltoniani che descrivono i due *transmons* liberi con l'hamiltoniano che descrive l'accoppiamento alla Jayens-Cummings di ciascuno di essi con il circuito LC [9].

Per eliminare da questo hamiltoniano le variabili legate al risonatore, si è effettuata una prima rotazione che ha condotto nel sistema di riferimento rotante con una frequenza uguale a quella caratteristica del risonatore. Successivamente, dopo aver supposto che

- l'anarmonicità dei *transmons* fosse infinita;
- l'energia di accoppiamento tra loro fosse molto meno intenso rispetto alla loro energia rinormalizzata quando sono liberi;
- il risonatore torni ritorni nel suo stato fondamentale dopo aver fatto interagire i *transmons*

si effettua una trasformazione di Schrieffer-Wolff per individuare l'hamiltoniano effettivo del circuito nel sistema di riferimento rotante. A questo punto, dopo aver aggiunto anche l'hamiltoniano del generatore esterno che è collegato solamente al primo *transmon* e fornisce una tensione oscillante con una frequenza uguale a quella caratteristica del secondo *transmon*, si effettua un nuovo cambio di riferimento finalizzato ad eliminare dall'hamiltoniano del circuito le variabili relative al secondo *transmon*.

L'hamiltoniano ottenuto in seguito a questa trasformazione viene rappresentato base computazionale a due qubit così da ottenere la sua rappresentazione matriciale.

Visto che non si è interessati a studiare gli autostati indipendenti di questo hamiltoniano ma, piuttosto, a capire come esso agisce su un sistema a due

qubit, si utilizza una opportuna trasformazione unitaria per diagonalizzare a blocchi la matrice precedentemente ottenuta e lo si riscrive in forma operatoriale utilizzando gli operatori di Pauli. I calcoli dettagliati effettuati per ricavare l'hamiltoniano sono contenuti nell'Appendice B.

L'espressione definitiva assunta dall'hamiltoniano del circuito, in seguito alle trasformazioni effettuate e utilizzando gli operatori di spin, è la seguente [9]

$$\hat{H}_{CR} = \frac{1}{2} \left(\Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} \right) \hat{\sigma}_z \otimes \mathbb{1} - \frac{1}{2} \left(\frac{J\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + J^2}} \right) \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x \quad (2.81)$$

L'unico termine di \hat{H}_{CR} che agisce in modo non-banale su entrambi i qubit è il secondo quindi solo quest'ultimo è di interesse per realizzare la porta CNOT che è una porta a due qubit [8]. L'operatore unitario relativo a questo hamiltoniano è il seguente

$$\hat{U}_{CR} = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{CR} \tau} = e^{-\frac{i}{2} \eta \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x} \quad (2.82)$$

dove si è posto $\eta = J\Delta \left(\sqrt{\Delta^2 + J^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$ e $\hbar = 1$, la sua forma matriciale nella base $\{|0, 0\rangle, |0, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle\}$ è la seguente

$$\begin{aligned} \hat{U}_{CR}(\eta) &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\eta}{2}) & -i \sin(\frac{\eta}{2}) & 0 & 0 \\ -i \sin(\frac{\eta}{2}) & \cos(\frac{\eta}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{\eta}{2}) & i \sin(\frac{\eta}{2}) \\ 0 & 0 & i \sin(\frac{\eta}{2}) & \cos(\frac{\eta}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 - i \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \hat{\sigma}_x + i \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \hat{\sigma}_x \end{aligned}$$

considerando che

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} (\mathbb{1}_2 + \hat{\sigma}_z) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} (\mathbb{1}_2 - \hat{\sigma}_z) \end{aligned} \quad (2.83)$$

si ottiene

$$\hat{U}_{CR}(\eta) = \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 - i \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x \quad (2.84)$$

nel caso in cui $\eta = -\frac{\pi}{2}$, si ricava la seguente espressione

$$\hat{U}_{CR}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 + \frac{i}{\sqrt{2}} \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x \quad (2.85)$$

La matrice unitaria associata alla porta CNOT, scritta sempre nella base $\{|0,0\rangle, |0,1\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle\}$, invece, è la seguente

$$\hat{U}_{\text{CNOT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \hat{\sigma}_x \quad (2.86)$$

utilizzando le relazioni (2.83), l'espressione precedente diventa

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\text{CNOT}} &= \frac{1}{2} (\mathbb{1}_2 + \hat{\sigma}_z) \otimes \mathbb{1}_2 + \frac{1}{2} (\mathbb{1}_2 - \hat{\sigma}_z) \otimes \hat{\sigma}_x \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_z \otimes \mathbb{1}_2 + \frac{1}{2} \mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_x - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x \end{aligned} \quad (2.87)$$

confrontando le equazioni (2.85), (2.87) si vede che esse differiscono, a meno di fattori moltiplicativi, per due termini, uno proporzionale all'operatore $\hat{\sigma}_z \otimes \mathbb{1}_2$ e l'altro a $\mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_x$ quindi, costruendo un circuito in cui vengono aggiunti questi termini tramite porte logiche a singolo qubit, si riesce ad ottenere un circuito equivalente alla porta CNOT

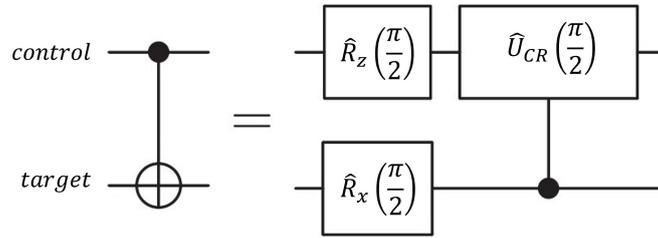


Figura 2.6: Circuito equivalente alla porta CNOT

dove gli operatori utilizzati hanno le seguenti espressioni

$$\begin{aligned} \hat{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1}_2 + i\hat{\sigma}_x) \\ \hat{R}_z\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1}_2 + i\hat{\sigma}_z) \end{aligned} \quad (2.88)$$

infatti, facendo agire il circuito di destra su uno dei quattro stati a due qubit

$$\begin{aligned} \left[\hat{R}_z\left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes \hat{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \hat{U}_{CR}\left(\frac{\pi}{2}\right) |0,0\rangle &= e^{i\frac{\pi}{4}} |0,0\rangle \\ \left[\hat{R}_z\left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes \hat{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \hat{U}_{CR}\left(\frac{\pi}{2}\right) |0,1\rangle &= e^{i\frac{\pi}{4}} |0,1\rangle \\ \left[\hat{R}_z\left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes \hat{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \hat{U}_{CR}\left(\frac{\pi}{2}\right) |1,0\rangle &= e^{i\frac{\pi}{4}} |1,1\rangle \\ \left[\hat{R}_z\left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes \hat{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \hat{U}_{CR}\left(\frac{\pi}{2}\right) |1,1\rangle &= e^{i\frac{\pi}{4}} |1,0\rangle \end{aligned} \quad (2.89)$$

si vede che esso riproduce, a meno di una fase globale, l'azione della *controlled-not gate*.

Conclusioni

Fino ad ora si è parlato del modo in cui è, idelamente, possibile implementare una porta CNOT superconduttiva utilizzando un circuito che faccia uso della giunzione Josephson, naturalmente nella reale progettazione e realizzazione del circuito bisogna affrontare problemi legati al rumore, agli accoppiamenti non voluti tra i *transmons* e alla possibilità che quest'ultimi non si comportino esattamente come sistemi a due livelli.

Prima di utilizzare questi circuiti all'interno di sistemi più complessi quali sono i computer quantistici, bisogna prima analizzarne le prestazioni, constatare quale è il loro effettivo funzionamento e quanto questo si discosta da quello previsto dal modello teorico precedentemente esposto.

Per effettuare queste operazioni è possibile adottare vari metodi che verranno esposti nel capitolo successivo

Capitolo 3

Metodi di caratterizzazione

In questo capitolo si vogliono illustrare i possibili metodi da utilizzare per caratterizzare un dispositivo quantistico; dato che questo lavoro è incentrato sullo studio della porta CNOT, uno di questi verrà in seguito applicato proprio a questa porta.

La caratterizzazione di una porta logica quantistica consiste nel constatare quanto le sue effettive prestazioni quando viene fatta agire su uno stato in ingresso sono vicine a quelle previste dal modello teorico.

La grandezza fisica necessaria alla caratterizzazione di un dispositivo quantistico è la *fidelity*, essa si calcola confrontando il funzionamento teorico-ideale della porta in totale assenza di rumore con quello effettivo che viene, invece, valutato tramite misure sperimentali affette da errori.

Di seguito vengono esposte e confrontate alcune delle procedure di caratterizzazione più utilizzate.

3.1 Quantum tomography

La *quantum process tomography* è un metodo ideato per caratterizzare sistemi fisici di cui non si conosce l'hamiltoniano che li descrive, in questa sezione esso verrà applicato ad una porta logica quantistica per constatarne l'effettivo funzionamento.

Però, prima di descrivere questa procedura, verrà brevemente introdotta la *quantum state tomography* dato che la quantum process tomography si basa su di essa.

3.1.1 Quantum state tomography

La *quantum state tomography* è una procedura sperimentale che permette di determinare l'espressione altrimenti ignota dell'operatore densità $\hat{\rho}$ che descrive un sistema fisico[15].

Per individuare $\hat{\rho}$ bisogna disporre di numerose copie dello stato perché, a

causa del collasso del pacchetto d'onde, in seguito alla misura di una osservabile, lo stato iniziale viene distrutto causando la perdita di informazioni relativa agli altri osservabili non compatibili con quelli misurati; se, invece, si hanno a disposizione più copie dello stato, su ciascuna di esse si misurano osservabili differenti così da poter ricostruire l'intera espressione di $\hat{\rho}$.

Dato che i processi di preparazione e misurazione sono affetti da errori, avere a disposizione più copie dello stato permette anche di ottenere una stima più precisa del valore medio di ogni osservabile, infatti, effettuando misure ripetute di ciascuna di esse si riescono ad ottenere distribuzioni di valori e, di queste, si calcolano le medie e deviazioni standard della media.

Si consideri il seguente insieme di operatori ortonormali rispetto al prodotto scalare di Hilbert-Schmidt definito nell'equazione (C.5)

$$\{\hat{O}_j\} = \left\{ \frac{\hat{\sigma}_j}{\sqrt{2}} : j = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

l'operatore densità per un qubit può essere scomposto nel seguente modo

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_j \left(\langle \hat{\rho}, \frac{\hat{\sigma}_j}{\sqrt{2}} \rangle \right) \frac{\hat{\sigma}_j}{\sqrt{2}} \\ &= \text{tr}(\hat{\rho}) \frac{\mathbb{1}_2}{2} + \text{tr}(\hat{\sigma}_x \hat{\rho}) \frac{\hat{\sigma}_x}{2} + \text{tr}(\hat{\sigma}_y \hat{\rho}) \frac{\hat{\sigma}_y}{2} + \text{tr}(\hat{\sigma}_z \hat{\rho}) \frac{\hat{\sigma}_z}{2} \end{aligned}$$

la quantità $\text{tr}(\hat{X} \hat{\rho})$, con $\hat{X} = \mathbb{1}_2, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$, presente nella precedente espressione rappresenta le componenti del vettore $\hat{\rho}$ sul vettore di base \hat{X} e, allo stesso tempo, il valore medio dell'operatore \hat{X} sullo stato $\hat{\rho}$.

Le quantità $\text{tr}(\hat{X} \hat{\rho})$ sono, dunque, grandezze sperimentalmente misurabili.

3.1.2 Quantum process tomography

La *quantum process tomography* è una procedura che, facendo uso della *quantum state tomography*, permette di caratterizzare un sistema/processo quantistico del quale si conoscono solamente lo stato in ingresso $\hat{\rho}_{in}$ e quello in uscita $\hat{\rho}_{out}$. Il sistema viene schematizzato come una black-box e caratterizzato in base al modo in cui trasforma uno stato in ingresso in un nuovo stato in uscita[13]

$$\hat{\rho}_{in} \longrightarrow \hat{\rho}_{out}$$



Lo stato $\hat{\rho}_{out}$ è, in generale, una funzione lineare dello stato in ingresso, pertanto, effettuando le seguenti posizioni

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{in} &= \hat{\rho} \\ \hat{\rho}_{out} &= f(\hat{\rho}_{in}) = f(\hat{\rho})\end{aligned}$$

si ottiene la seguente corrispondenza

$$\hat{\rho} \longrightarrow \frac{f(\hat{\rho})}{\text{tr}(f(\hat{\rho}))} \quad (3.1)$$

dove il denominatore serve ad assicurarsi che anche il membro di destra sia normalizzato a uno.

Tutte le informazioni relative al sistema quantistico che si vuole caratterizzare sono, quindi, contenute in $f(\hat{\rho})$, naturalmente per poter procedere bisogna dare un'espressione esplicita a questa funzione pertanto si utilizza la **operator-sum representation**

$$f(\hat{\rho}) = \sum_j \hat{A}_j \hat{\rho} \hat{A}_j^\dagger \quad (3.2)$$

dalla quale si vede che ora l'attenzione va incentrata sugli operatori \hat{A}_j , noti con il nome di operatori di Kraus, i quali agiscono sullo stato in ingresso $\hat{\rho}$ e lo trasformano in maniera conforme al sistema fisico utilizzato.

Questi operatori possono essere di qualunque tipo: unitari, proiettori o descrivere effetti di decoerenza dovuto all'accoppiamento del sistema con l'ambiente esterno; nel caso in cui essi descrivono interazioni non-controllate con l'ambiente esterno, soddisfano la seguente regola di somma

$$\sum_j \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j = \mathbb{1}$$

Si vede che, se vale la precedente relazione, allora la traccia dell'operatore $f(\hat{\rho})$ è automaticamente uguale a uno

$$\begin{aligned}\text{tr}(f(\hat{\rho})) &= \text{tr}\left(\sum_j \hat{A}_j \hat{\rho} \hat{A}_j^\dagger\right) = \sum_j \text{tr}\left(\hat{A}_j \hat{\rho} \hat{A}_j^\dagger\right) = \sum_j \text{tr}\left(\hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \hat{\rho}\right) = \\ &= \sum_j \text{tr}\left(\hat{\rho} \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j\right) = \text{tr}\left(\hat{\rho} \sum_j \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j\right) = \text{tr}(\hat{\rho} \mathbb{1}) = \text{tr}(\hat{\rho}) = 1\end{aligned}$$

pertanto la (3.1) diventa

$$\hat{\rho} \longrightarrow f(\hat{\rho})$$

Ora bisogna individuare una procedura che, utilizzando la quantum state tomography degli stati in ingresso e di quelli in uscita, permetta di ricavare le espressioni degli \hat{A}_j nei quali sono contenute le informazioni riguardo

la scatola nera. A tal proposito si consideri uno spazio di Hilbert \mathcal{H} di dimensione N in cui sono contenuti i seguenti stati

$$|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_N\rangle$$

lo spazio di Hilbert degli operatori che agiscono su \mathcal{H} è $L_{\mathcal{H}}$ ed ha dimensione uguale a N^2 pertanto, utilizzando i precedenti stati, si costruiscono grazie al principio di sovrapposizione N^2 stati

$$|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_{N^2}\rangle$$

e, a partire da essi, i seguenti operatori densità

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_1|, |\psi_2\rangle\langle\psi_2|, \dots, |\psi_{N^2}\rangle\langle\psi_{N^2}|$$

i quali descrivono stati puri, $\text{tr}(|\psi_n\rangle\langle\psi_n|) = 1$, con $n = 1, 2, \dots, N^2$. Una volta preparati, questi N^2 stati vengono processati dalla black-box così da ottenere gli $f(|\psi_n\rangle\langle\psi_n|)$, $n = 1, 2, \dots, N^2$, stati in uscita.

A questo punto bisogna mettere in relazione i dati sperimentali $|\psi_n\rangle\langle\psi_n|$, $f(|\psi_n\rangle\langle\psi_n|)$ con gli operatori \hat{A}_j , per farlo bisogna innanzitutto scegliere opportunamente una base di operatori $\{\hat{B}_k\}$ con la quale riscrivere gli \hat{A}_j

$$\hat{A}_j = \sum_k a_{jk} \hat{B}_k \quad (3.3)$$

sostituendo questa espressione nella (3.2), si ottiene

$$\begin{aligned} f(\hat{\rho}) &= \sum_j \left(\sum_k a_{jk} \hat{B}_k \right) \hat{\rho} \left(\sum_l a_{jl} \hat{B}_l \right)^\dagger \\ &= \sum_j \sum_{k,l} a_{jk} a_{jl}^* \hat{B}_k \hat{\rho} \hat{B}_l^\dagger \end{aligned}$$

si definisce la seguente quantità

$$\chi_{kl} = \sum_j a_{jk} a_{jl}^* \quad (3.4)$$

così che

$$f(\hat{\rho}) = \sum_{k,l} \chi_{kl} \hat{B}_k \hat{\rho} \hat{B}_l^\dagger \quad (3.5)$$

Avendo riscritto gli \hat{A}_j come combinazione degli operatori di base \hat{B}_k che sono noti perché scelti in base al sistema fisico preso in esame, l'attenzione si è spostata sui coefficienti a_{jk} , a_{jl} , i quali, però, sono stati scritti in forma compatta introducendo i χ_{kl} ; in ultima analisi, quindi, le nuove incognite sono rappresentate dai coefficienti χ_{kl} che devono essere messi in relazione

con le quantità sperimentalmente misurate.

Prima di procedere bisogna introdurre un insieme di operatori di base $\{\hat{\rho}_n\}$, con $n = 1, \dots, N^2$, per lo spazio $L_{\mathcal{H}}$, i $\hat{\rho}_n$ vengono definiti a partire dagli operatori densità $|\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ precedentemente menzionati, infatti essi sono uguali ad una loro combinazione lineare

$$\hat{\rho}_n = \sum_{k=1}^{N^2} c_{nk} |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$$

La relazione precedente è di fondamentale importanza perché correla i $\hat{\rho}_n$ che sono delle grandezze astratte agli operatori densità $|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ che, invece, sono sperimentalmente misurabili.

Sfruttando la proprietà di linearità di f si ha che

$$f(a\hat{\rho}_1 + b\hat{\rho}_2 + c\hat{\rho}_3 + \dots) = af(\hat{\rho}_1) + bf(\hat{\rho}_2) + cf(\hat{\rho}_3) + \dots$$

inoltre, tenendo presente che $\{\hat{\rho}_n\}$ è una base, gli $f(\hat{\rho}_n)$ possono essere scritti come una combinazione lineare di tali vettori

$$f(\hat{\rho}_n) = \sum_q \lambda_{nq} \hat{\rho}_q \quad (3.6)$$

Grazie alla *quantum state tomography*, gli $f(\hat{\rho}_n)$ e i $\hat{\rho}_q$ sono noti quindi, invertendo la precedente relazione, è possibile ricavare i λ_{nq} .

In generale, vale anche la seguente relazione

$$\hat{B}_k \hat{\rho}_n \hat{B}_l^\dagger = \sum_q \beta_{klnq} \hat{\rho}_q \quad (3.7)$$

in base alla quale un operatore di base $\hat{\rho}_n$ viene trasformato in una combinazione lineare di vettori di base tramite gli operatori $\hat{B}_k, \hat{B}_l^\dagger$; naturalmente, i coefficienti da utilizzare dipendono sia dall'operatore di base inizialmente scelto che da quelli che lo hanno trasformato. In questa equazione l'incognita è rappresentata proprio dai coefficienti β_{klnq} mentre tutte le altre quantità sono note o misurabili, quindi, invertendo la relazione è possibile ricavarli.

Inserendo questa espressione nella (3.5), si ottiene

$$\begin{aligned} f(\hat{\rho}_n) &= \sum_{k,l} \chi_{kl} \hat{B}_k \hat{\rho}_n \hat{B}_l^\dagger = \sum_{k,l} \chi_{kl} \sum_q \beta_{klnq} \hat{\rho}_q \\ &= \sum_q \sum_{k,l} \beta_{klnq} \chi_{kl} \hat{\rho}_q \end{aligned}$$

uguagliandola alla (3.6), si ha

$$f(\hat{\rho}_n) = \sum_q \sum_{k,l} \beta_{klnq} \chi_{kl} \hat{\rho}_q = \sum_q \lambda_{nq} \hat{\rho}_q$$

per un valore di q fissato, i fattori $\hat{\rho}_q$ si semplificano e si ricava la seguente equazione

$$\sum_{k,l} \beta_{klnq} \chi_{kl} = \lambda_{nq}$$

in cui l'incognita è χ_{kl} dato che i β_{klnq} e i λ_{nq} sono stati precedentemente calcolati. Poichè la matrice β è rettangolare, per invertire la precedente equazione non bisogna utilizzare la sua inversa ma la sua pseudoinversa α che è definita nel seguente modo

$$\beta_{klnq} = \sum_{r,s,t,u} \beta_{klrs} \alpha_{rstu} \beta_{tunq}$$

quindi si ricava la seguente equazione

$$\chi_{kl} = \sum_{n,q} \alpha_{klnq} \lambda_{nq} \quad (3.8)$$

che permette di calcolare i coefficienti χ_{kl} . Il risultato ottenuto deve essere utilizzato per calcolare i coefficienti a_{jk} che sono le quantità di reale interesse. Note le componenti χ_{kl} della matrice χ è possibile applicare ad essa il teorema spettrale

$$\chi = UDU^\dagger \quad (3.9)$$

dove D è la matrice diagonale che ha per componenti gli autovalori di χ

$$D_{rj} = \delta_{rj} d_r$$

e U è la matrice sulle cui colonne ci sono gli autovettori di χ . L'equazione (3.9) viene riscritta in componenti

$$\chi_{kl} = \sum_{j,r} U_{kr} \delta_{rj} d_r (U^\dagger)_{jl} = \sum_j U_{kj} d_j (U^\dagger)_{jl}$$

tenendo presente la seguente uguaglianza tra le componenti di U e U^\dagger

$$(U^\dagger)_{jl} = (U_{lj})^* \quad (3.10)$$

essa diventa

$$\chi_{kl} = \sum_j U_{kj} d_j (U_{lj})^* = \sum_j \left(\sqrt{d_j} U_{kj} \right) \left(\sqrt{d_j} U_{lj} \right)^*$$

confrontando questa espressione di χ_{kl} con quella dell'equazione (3.4), si ottiene la seguente uguaglianza

$$\chi_{kl} = \sum_j \left(\sqrt{d_j} U_{kj} \right) \left(\sqrt{d_j} U_{lj} \right)^* = \sum_j a_{jk} a_{jl}^*$$

da cui si ricava l'espressione dei coefficienti cercati

$$a_{jk} = \sqrt{d_j} U_{kj}$$

A questo punto si ricava l'espressione degli operatori \hat{A}_j che descrivono la black-box

$$\hat{A}_j = \sum_k a_{jk} \hat{B}_k = \sum_k \sqrt{d_j} U_{kj} \hat{B}_k = \sqrt{d_j} \sum_k U_{kj} \hat{B}_k$$

Grazie alla *quantum process tomography* è, quindi, possibile caratterizzare qualunque sistema quantistico, quale può, ad esempio, essere una porta logica quantistica semplicemente conoscendo gli stati in ingresso e quelli in uscita dal dispositivo.

Tale metodo, però, sebbene risulti molto efficace e, in principio, permetta di trovare l'espressione esatta degli operatori che descrivono la black-box, presenta una serie di svantaggi che lo rendono poco utilizzato quando la dimensione dello spazio di Hilbert a disposizione è superiore a due e quando il dispositivo da caratterizzare non è isolato ma si trova in serie con altri dispositivi. I principali svantaggi di questo metodo sono i seguenti:

- il numero di misure necessario ad effettuare la ricostruzione dell'hamiltoniano del dispositivo e al calcolo della sua fidelity aumenta al crescere della dimensione dello spazio di Hilbert degli stati seguendo una legge di potenza $(\dim \mathcal{H})^2 = N^2$, per cui il metodo risulta, di fatto, non scalabile;
- l'elevato numero di misure da effettuare rende il metodo molto dispendioso dal punto di vista computazione;
- gli errori da cui sono affette le misure che bisogna effettuare per preparare gli stati in ingresso e conoscere gli stati in uscita influenzano fortemente l'efficacia del metodo.
 Queste due sorgenti di errore si vanno ad aggiungere all'errore intrinseco del dispositivo, il problema principale è che con la quantum process tomography non si riesce a separarli da quest'ultimo; si potrebbe pensare di contenere questi errori ma per farlo bisognerebbe effettuare misure ripetute delle varie osservabili, ciò, però, renderebbe la procedura ulteriormente dispendiosa;
- non è adatto alla caratterizzazione di dispositivi che sono inseriti in contesti più ampi in cui questi operano insieme ad altri dispositivi.
 Le porte logiche quantistiche, ad esempio, sono utilizzate in circuiti in cui sono presenti numerose porte logiche e le prestazioni di ciascuna di esse in tale contesto può essere diversa da quella che la stesse avrebbe se venisse utilizzata in modo isolato.

3.2 Interleaved randomized benchmarking

L'*interleaved randomized benchmarking* è una procedura che trae origine dal *randomized benchmarking* il quale è un metodo sperimentale utilizzato per la caratterizzazione di sequenze casuali di porte logiche. Questo metodo permette di valutare la fidelity media di una porta logica quando questa viene inserita in serie con altre porte logiche e, dunque, si trova in un contesto simile a quello in cui essa viene effettivamente utilizzata [12][2][24].

Prima di procedere all'esposizione, bisogna introdurre un'importante definizione: sia $\hat{\sigma}_j$ un operatore di Pauli, si definisce *computational gate* il seguente operatore unitario [2]

$$\hat{C}_j = e^{\pm i \frac{\pi}{4} \hat{\sigma}_j}$$

dove $j = x, y$, dunque solamente due dei quattro operatori di Pauli vanno considerati.

Il protocollo dell'*interleaved randomized benchmarking* è il seguente[12][24]:

1. si costruiscono N_g sequenze casuali di computational gates tutte della stessa lunghezza;
2. si sceglie un insieme di numeri naturali $l_1 < l_2 < \dots < l_{N_l}$ i quali rappresentano delle lunghezze, infatti, ciascuna delle N_g sequenze viene troncata dando luogo a N_l nuove sequenze di lunghezze l_1, l_2, \dots, l_{N_l} ;
3. detto $\hat{\Lambda}_j$ l'operatore che schematizza l'errore associato alla porta \hat{C}_j , per ciascuna delle N_g sequenze, si costruiscono le varie sotto-sequenze di lunghezza l_k , con $k = 1, 2, \dots, N_l$

$$\hat{S}_{l_k} = \hat{\Lambda}_{l_{k+1}} \hat{C}_{l_{k+1}} \prod_{j=1}^{l_k} \hat{\Lambda}_j \hat{C}_j$$

in cui l'operatore $\hat{\Lambda}_{l_{k+1}} \hat{C}_{l_{k+1}}$ è definito in modo tale da essere l'inverso della produttorina di operatori

$$\hat{\Lambda}_{l_{k+1}} \hat{C}_{l_{k+1}} = \left(\prod_{j=1}^{l_k} \hat{\Lambda}_j \hat{C}_j \right)^{-1}$$

4. si calcola la *survival probability* p_S [24] di ciascuna sotto-sequenza di lunghezza l_k

$$p_S = \text{tr} \left(\hat{E}_\psi \hat{S}_{l_k} \hat{\rho}_\psi \right)$$

dove \hat{E}_ψ è il POVM che descrive lo stato in uscita tenendo presente l'errore dovuto alla misura mentre $\hat{\rho}_\psi$ è l'operatore che descrive lo stato in ingresso tenendo presente l'errore dovuto alla preparazione.

Nel caso ideale in cui sono assenti queste due sorgenti di errore, la *survival probability* è uguale a uno.

5. si calcola la fidelity $F_{seq}(l_k, \psi)$ della sequenza di lunghezza l_k effettuando la media tra tutte le N_g *survival probability* relative alle sotto-sequenze di lunghezza l_k e, grazie ad essa, si calcolano i parametri $p, A_0, B_0, A_1, B_1, C_1$ dei seguenti fit [24]

$$F_{seq}^{(0)}(l_k, \psi) = A_0 p^{l_k} + B_0$$

$$F_{seq}^{(1)}(l_k, \psi) = A_1 + p^{l_k} + B_1(l_k - 1)p^{l_k - 2} + C_1$$

I coefficienti A_0, B_0, A_1, B_1, C_1 contengono informazioni sugli errori commessi in fase di preparazione e misura mentre p prende il nome di parametro di depolarizzazione ed è legato all'errore medio r su ciascuna porta [24]

$$r = \frac{(d-1)(1-p)}{d}$$

dove $d = 2^{N_q}$ è la dimensione dello spazio di Hilbert su cui si sta operando e N_q è il numero di qubit.

A questo punto bisogna ripetere la stessa procedura con l'unica ma sostanziale differenza che la sequenza \hat{S}_{l_k} deve essere sostituita dalla sequenza \hat{V}_{l_k} avente la seguente espressione

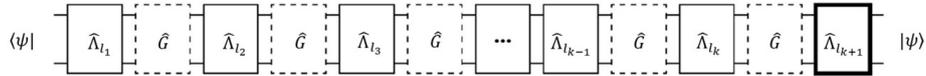
$$\hat{V}_{l_k} = \hat{\Lambda}_{l_k+1} \hat{C}_{l_k+1} \left[\left(\hat{\Lambda}_G \hat{G} \hat{\Lambda}_{l_k} \hat{C}_{l_k} \right) \left(\hat{\Lambda}_G \hat{G} \hat{\Lambda}_{l_k-1} \hat{C}_{l_k-1} \right) \dots \left(\hat{\Lambda}_G \hat{G} \hat{\Lambda}_1 \hat{C}_1 \right) \right]$$

dove \hat{G} è l'operatore relativo alla porta logica che si vuole caratterizzare, $\hat{\Lambda}_G$ schematizza l'errore ad essa legato e $\hat{\Lambda}_{l_k+1} \hat{C}_{l_k+1}$ è uguale all'inverso di tutta la sequenza

$$\hat{\Lambda}_{l_k+1} \hat{C}_{l_k+1} = \left[\left(\hat{\Lambda}_G \hat{G} \hat{\Lambda}_{l_k} \hat{C}_{l_k} \right) \left(\hat{\Lambda}_G \hat{G} \hat{\Lambda}_{l_k-1} \hat{C}_{l_k-1} \right) \dots \left(\hat{\Lambda}_G \hat{G} \hat{\Lambda}_1 \hat{C}_1 \right) \right]^{-1}$$

La sequenza appena definita è, dunque, formata dall'alternanza di una computational gate e della porta \hat{G} come mostrato in Figura 3.1

Figura 3.1: Sequenza utilizzata per l'applicazione dell'interleaved benchmarking [8]



Si calcola la *survival probability*

$$p_S^{(G)} = \text{tr} \left(\hat{E}_\psi \hat{V}_{l_k} \hat{\rho}_\psi \right)$$

da questa, la fidelity della sequenza $F_{seq}^{(G)}(l_k, \psi)$ e, grazie ai due fit, si valuta il parametro di depolarizzazione p_G con il quale si calcola l'errore medio r_G su ciascuna porta

$$r_G = \frac{(d-1)(1-p_G)}{d}$$

A questo punto, confrontando p e p_G , i quali rappresentano, rispettivamente, il parametro di depolarizzazione della sequenza in assenza della porta \hat{G} e il parametro di depolarizzazione della stessa sequenza in cui, però, ciascuna computational gate è intervallata dalla porta \hat{G} , si ottiene una stima dell'errore intrinseco a quest'ultima

$$F_{\hat{G}} = 1 - r_G \simeq 1 - r_G^{(est)} = \frac{d-1}{d} \left(1 - \frac{p_S^{(G)}}{p} \right)$$

L'interleaved benchmarking rappresenta, quindi, una valida alternativa alla quantum process tomography perché, sebbene sia un metodo che nemmeno in principio permette di calcolare in modo esatto la fidelity di una porta logica quantistica, esso permette di darne una buona stima ed è in grado di superare alcune criticità della process tomography[2]:

- permette di valutare le prestazioni di un porta logica quando questa è inserita all'interno di un contesto uguale a quello in cui viene utilizzata nei processori quantistici cioè in una sequenza che ne contiene altre;
- grazie ai fit, permette di isolare gli errori dovuti ai processi di preparazione e misura degli stati utilizzati dagli errori intrinseci alle porte logiche permettendo una stima più accurata della loro fidelity;
- è un metodo scalabile perché non necessita di elevato numero di ripetizioni delle misure per stimare accuratamente gli stati in uscita sia per quanto detto nel punto precedente sia perché gli errori dovuti al rumore vengono notevolmente ridotti grazie alla procedura di depolarizzazione del rumore messa in atto attraverso la costruzione di sequenze formate da porte logiche scelte in modo casuale.

3.3 Optimal parent hamiltonians per stati dipendenti dal tempo

Di seguito viene illustrato un altro metodo utile alla caratterizzazione di un sistema fisico, esso, come la quantum process tomography, si basa sulla quantum state tomography ma tra di esse sussiste un'importante differenza: il metodo della *optimal parent hamiltonian* non necessita di una tomografia completa dello stato per poter essere applicato.

Questa sostanziale differenza permette di risolvere, almeno in parte, la criticità della process tomography legata alla sua non-scalabilità dato che esso risulta meno dispendioso da un punto di vista computazione, di conseguenza, si potrebbe pensare di applicarlo anche a spazi di Hilbert di dimensione superiore a due.

Nel primo sottoparagrafo viene illustrato il metodo generale grazie al quale,

a partire da una tomografia completa dello stato in uscita, si ottengono i coefficienti dell'hamiltoniano che descrive il sistema in esame, nel secondo sottoparagrafo, invece, viene introdotto un criterio che permette di individuare l'hamiltoniano che meglio approssima quello effettivo pur utilizzando una tomografia incompleta dello stato in uscita.

Il metodo illustrato nelle successive sottosezioni ripercorre l'esposizione della referenza [14].

3.3.1 Metodo inverso per hamiltoniani dipendenti dal tempo

In base ai postulati della meccanica quantistica, lo stato di un sistema fisico è, in generale, descritto da un operatore densità $\hat{\rho}(t) \in \mathcal{V}_N$, dove \mathcal{V}_N è uno spazio euclideo di dimensione N , mentre la sua evoluzione temporale è descritta dall'equazione di von Neumann

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \quad (3.11)$$

nella quale compare un opportuno hamiltoniano \hat{H} che dipende dal sistema in questione.

Il metodo inverso che verrà di seguito descritto serve ad individuare l'espressione dell'hamiltoniano incognito che genera l'evoluzione del sistema in esame; l'hamiltoniano cercato prende il nome di *parent hamiltonian*. Il punto di partenza di questa procedura è l'equazione di von Neumann la quale deve essere riscritta scegliendo una opportuna base per scomporre gli operatori in essa presenti.

Si consideri una base $\{\hat{O}_\alpha\}$ all'interno dello spazio \mathcal{V}_N , gli operatori $\hat{\rho}(t)$, \hat{H} possono essere decomposti nel seguente modo

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}(t) \hat{O}_{\alpha} \quad (3.12)$$

$$\hat{H}(t) = \sum_{\alpha} h_{\alpha}(t) \hat{O}_{\alpha} \quad (3.13)$$

dove i coefficienti delle combinazioni lineari sono i seguenti

$$\rho_{\alpha}(t) = \langle \hat{\rho}(t), \hat{O}_{\alpha} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho}(t) \hat{O}_{\alpha}) = \langle \hat{O}_{\alpha}, \hat{\rho}(t) \rangle \quad (3.14)$$

$$h_{\alpha}(t) = \langle \hat{H}(t), \hat{O}_{\alpha} \rangle = \text{tr}(\hat{H}(t) \hat{O}_{\alpha}) \quad (3.15)$$

cioè sono le componenti dei vettori $\hat{\rho}(t)$, $\hat{H}(t)$ sui vettori di base.

Moltiplicando scalarmente a sinistra l'equazione di von Neumann (3.11) per un generico operatore di base \hat{O}_{α} , si ricava la seguente equazione

$$\langle \hat{O}_{\alpha}, \frac{d\hat{\rho}}{dt} \rangle = \langle \hat{O}_{\alpha}, -i[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \rangle \quad (3.16)$$

il primo membro viene riscritto utilizzando la definizione di prodotto scalare Hilbert-Schmidt (C.5)

$$\langle \hat{O}_\alpha, \frac{d\hat{\rho}}{dt} \rangle = \text{tr} \left(\hat{O}_\alpha \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right) \quad (3.17)$$

considerando l'equazione (3.14) e tenendo presente che gli operatori \hat{O}_μ non dipendono dal tempo, si ottiene

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(\hat{O}_\alpha \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right) &= \text{tr} \left(\hat{O}_\alpha, \frac{d}{dt} \left(\sum_\mu \rho_\mu \hat{O}_\mu \right) \right) = \text{tr} \left(\hat{O}_\alpha, \sum_\mu \frac{d\rho_\mu}{dt} \hat{O}_\mu \right) \\ &= \sum_\mu \frac{\partial \rho_\mu}{\partial t} \text{tr} \left(\hat{O}_\alpha, \hat{O}_\mu \right) = \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} \end{aligned}$$

In definitiva, il primo membro dell'equazione (3.16) diventa

$$\langle \hat{O}_\alpha, \frac{d\hat{\rho}}{dt} \rangle = \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} \quad (3.18)$$

Per quanto riguarda il secondo membro della (3.16), si procede in modo analogo al primo

$$\langle \hat{O}_\alpha, -i [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \rangle = -i \text{tr} \left(\hat{O}_\alpha [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \right) \quad (3.19)$$

considerando le equazioni (3.14), (3.15) e sostituendole nella precedente espressione

$$\begin{aligned} -i \text{tr} \left(\hat{O}_\alpha [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \right) &= -i \text{tr} \left(\hat{O}_\alpha \left[\sum_\beta h_\beta(t) \hat{O}_\beta, \sum_\gamma \rho_\gamma(t) \hat{O}_\gamma \right] \right) \\ &= -i \sum_\beta h_\beta(t) \sum_\gamma \rho_\gamma(t) \text{tr} \left(\hat{O}_\alpha [\hat{O}_\beta, \hat{O}_\gamma] \right) \end{aligned}$$

a questo punto si definisce la seguente grandezza

$$B_{\alpha\beta} = i \sum_\gamma \rho_\gamma(t) \text{tr} \left(\hat{O}_\alpha [\hat{O}_\beta, \hat{O}_\gamma] \right) \quad (3.20)$$

la quale prende il nome di *commutator matrix*, così che la precedente espressione diventa

$$-i \text{tr} \left(\hat{O}_\alpha, [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \right) = - \sum_\beta B_{\alpha\beta} h_\beta(t) \quad (3.21)$$

quindi, in definitiva, si ottiene che

$$\langle \hat{O}_\alpha, -i [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \rangle = - \sum_\beta B_{\alpha\beta} h_\beta(t) \quad (3.22)$$

Sostituendo le equazioni (3.18),(3.22) nella (3.16), si ricava la seguente equazione

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} = - \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} h_\beta(t) \quad (3.23)$$

la quale descrive l'evoluzione temporale di una generica componente ρ_α dell'operatore $\hat{\rho}$ nella base \hat{O}_α .

Nel caso in esame bisogna analizzare il kernel (Appendice D) della *commutator matrix* $B_{\alpha\beta}$ la quale agisce su uno spazio vettoriale formato da operatori quindi il suo kernel è uno spazio vettoriale di operatori, in particolare, contiene tutti gli operatori le cui componenti, calcolate nella base \hat{O}_α , soddisfano una condizione analoga alla (D.3)

$$\ker(\hat{B}) = \left\{ \hat{H}' \in \mathcal{V}_n : \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} h'_\beta = 0 \right\} \quad (3.24)$$

dove h'_β sono le componenti dell'hamiltoniano \hat{H}' calcolate nella base \hat{O}_α .

L'interesse verso $\ker(\hat{B})$ è legato al fatto che in esso sono contenuti tutti gli operatori che commutano con l'operatore densità e quindi, se sommati ad \hat{H} , permettono di definire un nuovo hamiltoniano che, però, generano la stessa dinamica del precedente. Capire quale sia la dimensione del kernel e cercare di ridurla il più possibile risulta, dunque, cruciale per l'individuazione dell'hamiltoniano che genera l'evoluzione dello stato iniziale.

Se si riscrive l'equazione (3.16) utilizzando un elemento del kernel di \hat{B} , si ottiene

$$\langle \hat{O}_\alpha, \frac{d\hat{\rho}}{dt} \rangle = \langle \hat{O}_\alpha, -i [\hat{H}'(t), \hat{\rho}(t)] \rangle = - \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} h'_\beta(t) = 0 \quad (3.25)$$

quindi, visto che il prodotto scalare è una forma bilineare definita positiva e \hat{O}_α è un vettore di base per cui è diverso dal vettore nullo, dalla precedente equazione si deduce che

$$[\hat{H}'(t), \hat{\rho}(t)] = 0 \quad (3.26)$$

cioè gli operatori $\hat{H}'(t)$, $\hat{\rho}(t)$ commutano tra loro.

In base al risultato appena ottenuto, è possibile affermare che $\ker(B)$ contiene tutti gli operatori che commutano con l'operatore densità $\hat{\rho}$ e, dunque, non determinano alcuna evoluzione per lo stato descritto dall'operatore densità $\hat{\rho}$

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i [\hat{H}'(t), \hat{\rho}(t)] = 0 \implies \hat{\rho} = \text{costante} \quad (3.27)$$

Il risultato appena ottenuto ha un'importante conseguenza, infatti, se si considerano due hamiltoniani $\hat{H}(t)$, $\hat{H}''(t)$ appartenenti a \mathcal{V}_N tali che la loro differenza sia uguale ad un elemento del kernel di \hat{B}

$$\hat{H}(t) - \hat{H}''(t) = \hat{U} \in \ker(\hat{B}) \quad (3.28)$$

e si utilizza il risultato contenuto nell'equazione (3.26), si ottiene che

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} &= -i \left[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t) \right] = -i \left[\hat{H}''(t) + \hat{U}, \hat{\rho}(t) \right] = \\ &= -i \left[\hat{H}''(t), \hat{\rho}(t) \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

quanto ottenuto è di fondamentale importanza perché è la dimostrazione del fatto che due hamiltoniani che differiscono per un elemento del kernel di \hat{B} determinano la stessa evoluzione per $\hat{\rho}$. Dato che si vuole ricostruire l'hamiltoniano che determina l'evoluzione del sistema in modo univoco, questa ambiguità deve essere rimossa, per farlo bisogna, innanzitutto, conoscere la dimensione del kernel di \hat{B} e, in seguito, cercare di ridurla fino ad uno in modo da ottenere l'espressione esatta dell'hamiltoniano che determina l'evoluzione del sistema.

Al di sotto del valore uno non è possibile ridurla perché il kernel deve almeno contenere l'operatore identità.

3.3.2 Optimal parent hamiltonian

Per applicare il metodo inverso non è necessario utilizzare l'intera base $\{\hat{O}_\alpha\}$ per rappresentare un operatore ma è sufficiente prendere in considerazione solamente un suo sottoinsieme $\{\hat{L}_\alpha\}$ di operatori di base, $\hat{L}_\alpha \subseteq \hat{O}_\alpha$, che tenga in considerazione le reali interazioni che interessano il sistema in esame.

In questo lavoro, ad esempio, attraverso l'applicazione del metodo inverso, si vuole ricostruire l'hamiltoniano relativo alla porta CNOT che è una porta logica a due qubit quindi l'insieme degli operatori di base da prendere in considerazione è formato dagli operatori a due corpi costruiti effettuando prodotti tensoriali degli operatori di Pauli

$$\{\hat{L}_{\alpha\beta}\} \subseteq \{\hat{\sigma}_\alpha \otimes \hat{\sigma}_\beta\} \quad (3.30)$$

dove $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$. Sulla base di questa osservazione, l'hamiltoniano $\hat{H}(t)$ che determina l'evoluzione dello stato del sistema può essere riscritto utilizzando i vettori di base che fanno parte del sottospazio $\{\hat{L}_\alpha\}$:

$$\hat{H}(t) = \sum_{\alpha} h_{\alpha}(t) \hat{L}_{\alpha} \quad (3.31)$$

mentre la matrice di commutazione assume la seguente forma

$$B_{\alpha\beta} = i \sum_{\gamma} \rho_{\gamma}(t) \text{tr} \left(\hat{O}_{\alpha} \left[\hat{L}_{\beta}, \hat{O}_{\gamma} \right] \right) \quad (3.32)$$

La *parent hamiltonian* \hat{H} che meglio descrive l'evoluzione del sistema descritto dall'operatore densità $\hat{\rho}(t)$ viene individuata utilizzando un criterio

di minimizzazione di un funzionale $\mathcal{F}[\hat{H}]$ di costo ed è definito nel seguente modo

$$\mathcal{F}[\hat{H}] = \int_0^t dt' f(\hat{H}, t') = \int_0^t dt' \left\| \frac{d\hat{\rho}}{dt'} + i[\hat{H}(t'), \hat{\rho}(t')] \right\| \quad (3.33)$$

dove la definizione di norma da utilizzare è quella data nell'equazione (C.3). L'integrando dell'equazione (3.33) è uguale alla norma della differenza tra l'operatore $\frac{d\hat{\rho}}{dt'}$ che descrive l'evoluzione reale dello stato del sistema e l'operatore $-i[\hat{H}(t'), \hat{\rho}(t')]$ che, invece, è l'operatore che descrive l'evoluzione dello stato quando questa è pilotata dalla *parent hamiltonian*. Minimizzando il funzionale $\mathcal{F}[\hat{H}]$

$$\delta\mathcal{F} = 0 \quad (3.34)$$

si ottiene l'hamiltoniano $\hat{H}_{\text{opt}}(t)$ che prende il nome di *optimal parent hamiltonian*, se si fa evolvere lo stato $\hat{\rho}$ utilizzando \hat{H}_{opt} si ottiene l'operatore $\hat{\rho}_{\text{opt}}(t)$

$$\hat{\rho}_{\text{opt}}(t) = \left(\hat{\mathcal{T}} e^{-i \int_0^t dt' \hat{H}_{\text{opt}}(t')} \right) \hat{\rho}(0) \left(\hat{\mathcal{T}} e^{-i \int_0^t dt' \hat{H}_{\text{opt}}(t')} \right)^\dagger \quad (3.35)$$

dove $\hat{\mathcal{T}}$ è l'operatore di ordinamento temporale.

È possibile dimostrare la seguente disuguaglianza

$$\|\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_{\text{opt}}(t)\| \leq \int_0^t dt' f(\hat{H}, t') = \mathcal{F}[\hat{H}] \quad (3.36)$$

in base alla quale la distanza tra l'operatore densità esatto $\hat{\rho}$ e quello ottenuto facendo evolvere $\hat{\rho}(0)$ con l'*optimal parent hamiltonian* è sempre minore o, al più, uguale al funzionale di costo stesso quindi, minimizzando $\mathcal{F}[\hat{H}]$, si minimizza anche la distanza tra queste due quantità per cui migliora il modo in cui $\hat{\rho}(t)$ viene stimata.

Calcolando la fidelity (E.6) tra gli operatori $\hat{\rho}(t)$ e $\hat{\rho}_{\text{opt}}(t)$

$$F(\hat{\rho}(t), \hat{\rho}_{\text{opt}}(t)) = \text{tr}(\hat{\rho}(t)\hat{\rho}_{\text{opt}}(t)) \leq 1 \quad (3.37)$$

si vuole dimostrare che esiste un'interessante relazione che lega $F(\hat{\rho}(t), \hat{\rho}_{\text{opt}}(t))$ a $\|\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_{\text{opt}}(t)\|$. Grazie alla definizione di norma di un operatore (C.3), si ha che

$$\begin{aligned} \|\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_{\text{opt}}(t)\| &= \sqrt[2]{\text{tr}((\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_{\text{opt}}(t))^2)} \\ &= \sqrt[2]{\text{tr}([\hat{\rho}(t)]^2 + [\hat{\rho}_{\text{opt}}(t)]^2 - \hat{\rho}(t)\hat{\rho}_{\text{opt}}(t) - \hat{\rho}_{\text{opt}}(t)\hat{\rho}(t))} \\ &= \left(\text{tr}([\hat{\rho}(t)]^2) + \text{tr}([\hat{\rho}_{\text{opt}}(t)]^2) - \text{tr}(\hat{\rho}(t)\hat{\rho}_{\text{opt}}(t)) - \text{tr}(\hat{\rho}_{\text{opt}}(t)\hat{\rho}(t)) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

tenendo presente che gli stati sono puri

$$\text{tr}([\hat{\rho}]^2) = 1, \text{tr}([\hat{\rho}_{\text{opt}}]^2) = 1$$

e sfruttando la proprietà di invarianza per permutazioni cicliche della traccia, la precedente espressione diventa

$$\|\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_{\text{opt}}(t)\| = \sqrt{2(1 - \text{tr}(\hat{\rho}(t)\hat{\rho}_{\text{opt}}(t)))} \quad (3.38)$$

utilizzando la definizione di fidelity presente nell'equazione (E.6), si ottiene

$$\|\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_{\text{opt}}(t)\| = \sqrt{2(1 - F(\hat{\rho}(t), \hat{\rho}_{\text{opt}}(t)))} \quad (3.39)$$

esplicitando la $F(\hat{\rho}(t), \hat{\rho}_{\text{opt}}(t))$ dalla precedente espressione

$$F(\hat{\rho}(t), \hat{\rho}_{\text{opt}}(t)) = 1 - \frac{1}{2}\|\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_{\text{opt}}(t)\|^2 \quad (3.40)$$

Mettendo a sistema le equazioni (3.36),(3.37),(3.40)

$$\begin{cases} \|\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_{\text{opt}}(t)\| \leq \mathcal{F}[\hat{H}] \\ F(\hat{\rho}(t), \hat{\rho}_{\text{opt}}(t)) \leq 1 \\ F(\hat{\rho}(t), \hat{\rho}_{\text{opt}}(t)) = 1 - \frac{1}{2}\|\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_{\text{opt}}(t)\|^2 \end{cases} \quad (3.41)$$

si ricava la seguente disuguaglianza

$$1 - \frac{1}{2}(\mathcal{F}[\hat{H}])^2 \leq F(\hat{\rho}(t), \hat{\rho}_{\text{opt}}(t)) \leq 1 \quad (3.42)$$

che mette in relazione la fidelity e il funzionale di costo.

Naturalmente si vuole che la fidelity sia il più vicino possibile a 1, per cui, in base alla precedente disuguaglianza, è preferibile che il valore del funzionale di costo sia il più piccolo possibile, infatti

$$\mathcal{F}[\hat{H}] \rightarrow 0 \implies F(\hat{\rho}(t), \hat{\rho}_{\text{opt}}(t)) \rightarrow 1 \quad (3.43)$$

Se la fidelity tende a 1, gli stati $\hat{\rho}(t)$, $\hat{\rho}_{\text{opt}}(t)$ tendono ad assomigliarsi sempre più, quando $F(\hat{\rho}(t), \hat{\rho}_{\text{opt}}(t)) = 1$, l'operatore densità calcolato utilizzando il metodo inverso unitamente al criterio di minimizzazione del funzionale di costo risulta uguale all'operatore densità del sistema reale.

Per minimizzare il funzionale di costo $\mathcal{F}[\hat{H}]$ rispetto ad \hat{H} bisogna utilizzare l'equazione di Euler-Lagrange per la funzione $f(\hat{H}, t)$

$$\delta \mathcal{F} = 0 \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{\hat{H}}} - \frac{\partial f}{\partial \hat{H}} = 0 \quad (3.44)$$

dove $\dot{\hat{H}} = \frac{d\hat{H}}{dt}$, dall'espressione di $f(\hat{H}, t)$

$$f(\hat{H}, t) = \left\| \frac{d\hat{\rho}}{dt} + i[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \right\|$$

si vede che essa non dipende da \hat{H} quindi il primo termine dell'equazione di Euler-Lagrange è nullo

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{H}} = 0 \quad (3.45)$$

grazie a questa semplificazione, la ricerca del minimo per il funzionale $\mathcal{F}[\hat{H}]$ si traduce nella ricerca di un minimo per la funzione $f(\hat{H}, t)$, ciò rende possibile il passaggio da un'analisi globale ad un'analisi locale del problema.

A questo punto, quindi, per analizzare la funzione $f(\hat{H}, t)$, bisogna introdurre una base locale però, visto che l'operatore $\frac{d\hat{\rho}}{dt}$ vive nello spazio vettoriale tangente $T\mathcal{V}_N$ di \mathcal{V}_N , la base locale deve essere introdotta in quest'altro spazio vettoriale. I vettori di base di $T\mathcal{V}_N$ hanno la seguente espressione

$$\hat{w}_\alpha = -i \left[\hat{O}_\alpha, \hat{\rho}(t) \right] \quad (3.46)$$

però, dato nel termine $-i \left[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t) \right]$ si riflettono i vincoli fisici del sistema, è sufficiente introdurre una base locale per un sottospazio dello spazio tangente $TL\mathcal{V}_N$ e i suoi vettori di base assumo la seguente forma

$$\hat{l}_\alpha(t) = -i \left[\hat{L}_\alpha, \hat{\rho}(t) \right] \quad (3.47)$$

Dopo aver calcolato \hat{H}_{opt} utilizzando la (3.45), si calcola $f(\hat{H}_{\text{opt}}(t), t)$ la quale rappresenta la distanza minima tra $\frac{d\hat{\rho}}{dt}$ e $-i \left[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t) \right]$ ma, affinché questa distanza sia la più piccola possibile, deve necessariamente verificarsi che la proiezione dell'operatore \hat{H}_{opt} nel sottospazio $TL\mathcal{V}_N$ coincida con l'operatore $-i \left[\hat{H}_{\text{opt}}(t), \hat{\rho}(t) \right]$. Se i suddetti operatori devono coincidere, anche le rispettive componenti nel sottospazio $TL\mathcal{V}_N$ devono coincidere.

La componente α -esima di $\frac{d\hat{\rho}}{dt}$ in $TL\mathcal{V}_N$ è uguale a

$$\langle \hat{l}_\alpha, \frac{d\hat{\rho}}{dt} \rangle = \text{tr} \left(\hat{l}_\alpha \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right)$$

mentre la componente α -esima di $-i \left[\hat{H}_{\text{opt}}(t), \hat{\rho}(t) \right]$ in $TL\mathcal{V}_N$ è uguale a

$$-i \langle \hat{l}_\alpha, \left[\hat{H}_{\text{opt}}, \hat{\rho} \right] \rangle = -i \text{tr} \left(\hat{l}_\alpha \left[\hat{H}_{\text{opt}}, \hat{\rho} \right] \right)$$

imponendo la loro uguaglianza si ottiene la seguente equazione

$$\text{tr} \left(\hat{l}_\alpha \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right) = -i \text{tr} \left(\hat{l}_\alpha \left[\hat{H}_{\text{opt}}, \hat{\rho} \right] \right) \quad (3.48)$$

La *optimal parent hamiltonian* può essere riscritta utilizzando un sottoinsieme degli operatori globali

$$\hat{H}_{\text{opt}} = \sum_{\beta} h_{\beta}^{\text{opt}}(t) \hat{L}_{\beta} \quad (3.49)$$

sostituendo questa espressione nell'equazione (3.48), si ottiene

$$\operatorname{tr}\left(\hat{l}_\alpha \frac{d\hat{\rho}}{dt}\right) = -i \sum_{\beta} h_{\beta}^{\text{opt}}(t) \operatorname{tr}\left(\hat{l}_\alpha [\hat{L}_\beta, \hat{\rho}]\right) \quad (3.50)$$

ricordando la definizione (3.47), l'equazione precedente diventa

$$\operatorname{tr}\left(\hat{l}_\alpha \frac{d\hat{\rho}}{dt}\right) = \sum_{\beta} h_{\beta}^{\text{opt}}(t) \operatorname{tr}\left(\hat{l}_\alpha \hat{l}_\beta\right) \quad (3.51)$$

L'equazione ottenuta mette in relazione le componenti della derivata temporale della matrice densità in un sottospazio dello spazio tangente locale con i coefficienti incogniti della *optimal parent hamiltonian*; le grandezze al primo membro sono desumibili dai dati sperimentali mentre gli operatori di base \hat{l}_α vanno scelti in base al sistema fisico che si sta analizzando.

La (3.51) definisce un sistema non-omogeneo di equazioni che deve essere risolto per trovare i coefficienti $h_{\beta}^{\text{opt}}(t)$.

Definendo le seguenti matrici

$$\begin{aligned} B_\alpha &= \operatorname{tr}\left(\hat{l}_\alpha \frac{d\hat{\rho}}{dt}\right) \\ V_{\alpha\beta} &= \operatorname{tr}\left(\hat{l}_\alpha \hat{l}_\beta\right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

la (3.51) diventa

$$B_\alpha = \sum_{\beta} V_{\alpha\beta} h_{\beta}^{\text{opt}}(t)$$

La risoluzione del precedente sistema presenta due criticità:

- la matrice $V_{\alpha\beta} = \operatorname{tr}\left(\hat{l}_\alpha \hat{l}_\beta\right)$ ha il determinante nullo;
- il kernel di $V_{\alpha\beta}$ non è vuoto.

Il primo problema può essere risolto utilizzando la matrice pseudoinversa di $V_{\alpha\beta}$ mentre, per quanto riguarda la dimensione del kernel, per ridurla ad uno, che è il suo valore minimo dato che il kernel contiene necessariamente il vettore nullo, bisogna introdurre dei vincoli, ad esempio si può utilizzare una tomografia completa dello stato in un certo istante oppure utilizzare una tomografia incompleta dello stato in istanti temporali differenti. Invertendo la precedente relazione, si ottengono i coefficienti dell'hamiltoniano

$$h_{\beta}^{\text{opt}}(t) = \sum_{\alpha} (V^{-1})_{\alpha\beta} B_\alpha \quad (3.53)$$

dove $(V^{-1})_{\alpha\beta}$ è la matrice pseudoinversa di $V_{\alpha\beta}$.

Conclusioni

In queste ultime due sottosezioni è stato esposto il metodo che verrà concretamente utilizzato nel capitolo successivo per ricostruire l'hamiltoniano del *circuito di cross-resonance*. I risultati ottenuti dall'applicazione del metodo inverso verranno confrontati con quelli derivanti dall'applicazione di altri consolidati metodi.

Capitolo 4

Simulazioni

In questo capitolo il metodo della *optimal parent hamiltonian* verrà utilizzato per ricostruire l'hamiltoniano di un dispositivo quantistico. Successivamente i risultati ottenuti dall'applicazione del metodo inverso verranno confrontati con quelli già noti e ciò renderà possibile il calcolo dell'errore relativo sulla stima dei coefficienti dell'hamiltoniano fornita dal metodo.

4.1 Premesse

La procedura da seguire per poter applicare il metodo della *optimal parent hamiltonian* è la seguente: innanzitutto, si sceglie uno stato iniziale e lo si prepara al dispositivo in esame. Lo stato evolverà nel tempo secondo la dinamica unitaria descritta dall'operatore

$$\hat{U}(\delta t) = e^{i \int_t^{t+\delta t} dt' \hat{H}(t')} = e^{i\hat{H}\delta t} \quad (4.1)$$

in cui \hat{H} è l'hamiltoniano del dispositivo. In questo caso supponiamo che \hat{H} non dipenda dal tempo. In base a quanto visto nel precedente capitolo, esso può essere decomposto nel seguente modo

$$\hat{H} = \sum_j h_j \hat{L}_j \quad (4.2)$$

dove $\{\hat{L}_j\}$ è l'insieme degli operatori che descrivono le reali interazioni presenti nel sistema e viene scelto tenendo presente il modello teorico, invece, i coefficienti h_j sono i coefficienti di \hat{H} e rappresentano le incognite del problema. Qualora non si disponesse di alcun modello teorico derivante da principi primi, si potrebbero effettuare degli ansatz basati su argomenti di carattere fisico. Nel caso in cui nemmeno questa operazione fosse possibile, si deve necessariamente utilizzare l'intera base $\{\hat{O}_k\}$. In quest'ultimo caso, il metodo della *optimal parent hamiltonian* si riduce alla ben nota *quantum process tomography*.

Successivamente, dato che per poter individuare i coefficienti h_j si deve conoscere lo stato $\hat{\rho}(t)$ in uscita dal dispositivo, bisogna misurarlo.

La procedura standard della state tomography prescrive di effettuare misure in un unico istante temporale. Qui, per rimuovere le degenerazioni dovute alle simmetrie del sistema, si effettuano misure dello stato in istanti temporali diversi

$$\{0, \delta t, 2 \delta t, \dots, N_t \delta t\}$$

in modo da aggiungere vincoli che permettano di rimuovere tali degenerazioni.

Naturalmente, per ottenere una stima più accurata dello stato in un dato istante $t_n = n \delta t$, con $n \in [0, N_t]$, bisogna effettuare misure ripetute dello stesso, per fare ciò, a causa del collasso del pacchetto d'onde, si devono preparare numerose copie dello stato iniziale scelto e farlo evolvere fino al tempo $t_n \in \{0, \delta t, 2 \delta t, \dots, N_t \delta t\}$ utilizzando ripetutamente l'operatore (4.2).

Nelle sezioni successive l'attenzione sarà incentrata solamente sui sistemi a due livelli quindi alcune grandezze coinvolte avranno delle specifiche espressioni. Le dimensioni degli spazi di Hilbert degli stati e quella degli spazi di Hilbert degli operatori avranno le seguenti espressioni

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H} &= 2^{N_q} \\ \dim L_{\mathcal{H}} &= (2^{N_q})^2 = 4^{N_q} \end{aligned}$$

dove N_q è il numero di qubit, ossia il numero di sistemi a due livelli accoppiati. Guardando alla dimensione di $L_{\mathcal{H}}$ si potrebbe pensare che per ottenere una tomografia completa dello stato in uscita dal dispositivo bisogna misurare 4^{N_q} osservabili, in realtà, dato che l'unica osservabile che i computer quantistici sanno misurare è $\hat{\sigma}_z$, per misurare $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, si effettua prima una rotazione dello stato in uscita dal dispositivo tramite gli operatori $\hat{R}_x(\frac{\pi}{2})$, $\hat{R}_y(\frac{\pi}{2})$ e poi si misura $\hat{\sigma}_z$. Il numero di osservabili da misurare per ricostruire uno stato formato da N_q qubit non è, quindi, 4^{N_q} ma 3^{N_q} .

In conclusione, quindi, per ottenere la tomografia completa di uno stato in uscita da un dispositivo quantistico formato da N_q qubit in N_t istanti temporali avendo effettuato N_M misure ripetute di ciascuna osservabile, bisogna effettuare N_s diversi esperimenti

$$N_s = 3^{N_q} N_M N_t \quad (4.3)$$

4.2 Metodo

La matrice densità del sistema evolve secondo l'equazione di von Neumann

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i [\hat{H}, \hat{\rho}(t)]$$

dove \hat{H} è l'hamiltoniano esatto del sistema.

Nelle situazioni reali, pur essendo $\hat{\rho}(t)$ una funzione continua del tempo, è possibile conoscerla solo in un numero finito di istanti temporali quindi si riduce ad una successione di valori $\hat{\rho} = \hat{\rho}(t_n)$.

Si consideri lo sviluppo in serie di Taylor di $\hat{\rho}(t_n)$

$$\hat{\rho}(t_{n+1}) = \hat{\rho}(t_n) + \left. \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right|_{t=t_n} (t_{n+1} - t_n) + \hat{R}_n^{(1)}$$

dove $\left. \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right|_{t=t_n}$ è la derivata discreta calcolata in t_n e $\hat{R}_n^{(1)}$ è il resto secondo Lagrange di ordine uno ed ha la seguente espressione

$$\hat{R}_n^{(1)} = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\hat{\rho}}{dt^2} \right|_{t=t_n^*} (t_{n+1} - t_n)^2 = -\frac{1}{2} \left[\hat{H}, \left[\hat{H}, \hat{\rho}(t_n^*) \right] \right] \delta t^2$$

utilizzando l'equazione di von Neumann l'espressione precedente diventa

$$\hat{\rho}(t_{n+1}) = \hat{\rho}(t_n) - i \left[\hat{H}, \hat{\rho}(t_n) \right] \delta t + \hat{R}_n^{(1)}$$

riorganizzando i termini e dividendo ambo i membri per δt , si ottiene

$$\frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} = -i \left[\hat{H}, \hat{\rho}(t_n) \right] + \frac{\hat{R}_n^{(1)}}{\delta t} \quad (4.4)$$

la quale rappresenta l'equazione che verrà di seguito utilizzata per stimare i coefficienti h_j dell'hamiltoniano \hat{H} .

A questo punto si definisce la seguente funzione costo $f(\vec{h})$

$$f(\vec{h}) = \sum_{n=0}^{N_t-1} \left\| \frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} + i \left[\hat{H}, \hat{\rho}(t_n) \right] \right\|^2 \quad (4.5)$$

che rappresenta la versione discreta della (3.33) ed è uguale alla sommatoria su tutti gli istanti temporali in cui si effettuano le misure della norma della distanza tra l'operatore $\frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t}$ che descrive l'evoluzione effettiva del sistema e l'operatore $-i \left[\hat{H}, \hat{\rho}(t_n) \right]$ che invece descrive l'evoluzione prevista dal modello teorico. Per ottenere una stima dei coefficienti di \hat{H} bisogna minimizzare il costo (4.5).

Prima di procedere alla minimizzazione di $f(\vec{h})$ bisogna riscriverla in una forma più compatta esplicitando la norma

$$\begin{aligned} f(\vec{h}) &= \sum_n \left\| \frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} + i \left[\hat{H}, \hat{\rho}(t_n) \right] \right\|^2 \\ &= \sum_n \text{tr} \left(\left(\frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} + i \left[\hat{H}, \hat{\rho}(t_n) \right] \right)^2 \right) \end{aligned}$$

ricordando la (4.2), si ottiene

$$f(\vec{h}) = \sum_n \operatorname{tr} \left(\left(\frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} + i \sum_j h_j [\hat{L}_j, \hat{\rho}(t_n)] \right)^2 \right)$$

se si introduce la seguente grandezza

$$\hat{l}_j(t_n) = -i [\hat{L}_j, \hat{\rho}(t_n)]$$

l'espressione di $f(\vec{h})$ diventa

$$\begin{aligned} f(\vec{h}) &= \sum_n \operatorname{tr} \left(\left(\frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} - \sum_j h_j \hat{l}_j(t_n) \right)^2 \right) \\ &= \sum_n \operatorname{tr} \left(\left(\frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} \right)^2 \right) + \sum_n \operatorname{tr} \left(\left(\sum_j h_j \hat{l}_j(t_n) \right)^2 \right) + \\ &\quad - \sum_n \operatorname{tr} \left(\frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} \sum_j h_j \hat{l}_j(t_n) \right) + \\ &\quad - \sum_n \operatorname{tr} \left(\sum_j h_j \hat{l}_j(t_n) \frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} \right) \end{aligned}$$

in base alle proprietà della traccia, si ha che

$$\operatorname{tr} \left(\frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} \sum_j h_j \hat{l}_j(t_n) \right) = \operatorname{tr} \left(\sum_j h_j \hat{l}_j(t_n) \frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} \right)$$

quindi

$$\begin{aligned} f(\vec{h}) &= \sum_n \operatorname{tr} \left(\left(\frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} \right)^2 \right) + \sum_n \operatorname{tr} \left(\left(\sum_j h_j \hat{l}_j(t_n) \right)^2 \right) + \\ &\quad - 2 \sum_n \operatorname{tr} \left(\frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} \sum_j h_j \hat{l}_j(t_n) \right) \\ &= \sum_n \operatorname{tr} \left(\left(\frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} \right)^2 \right) + \sum_n \sum_{j,k} h_j h_k \operatorname{tr} \left(\hat{l}_j(t_n) \hat{l}_k(t_n) \right) + \\ &\quad - 2 \sum_n \sum_j h_j \operatorname{tr} \left(\frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} \hat{l}_j(t_n) \right) \end{aligned}$$

Se si definiscono le seguenti grandezze

$$\begin{aligned} A &= \sum_n \operatorname{tr} \left(\left(\frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} \right)^2 \right) \\ B_j &= \sum_n \operatorname{tr} \left(\frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} \hat{l}_j(t_n) \right) \\ V_{jk} &= \sum_n \operatorname{tr} \left(\hat{l}_j(t_n) \hat{l}_k(t_n) \right) \end{aligned}$$

l'espressione di $f(\vec{h})$ diventa

$$f(\vec{h}) = A + \sum_{j,k} h_j h_k V_{jk} - 2 \sum_j h_j B_j \quad (4.6)$$

Ora bisogna individuare il vettore \vec{h}^{opt} definito nel seguente modo

$$\vec{h}^{\text{opt}} = \operatorname{argmin} f(\vec{h})$$

ossia come il vettore le cui componenti sono i coefficienti dell'hamiltoniano che minimizza la funzione di costo (4.6).

Si procede, innanzitutto, al calcolo della derivata di $f(\vec{h})$ rispetto ad una generica componente di \vec{h} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial h_p} &= \frac{\partial A}{\partial h_p} + \sum_{j,k} \left(\frac{\partial h_j}{\partial h_p} h_k + h_j \frac{\partial h_k}{\partial h_p} \right) V_{jk} - 2 \sum_j \frac{\partial h_j}{\partial h_p} B_j \\ &= \sum_{j,k} (\delta_{jp} h_k + h_j \delta_{kp}) V_{jk} - 2 \sum_j \delta_{jp} B_j \\ &= \sum_k h_k V_{pk} + \sum_j h_j V_{jp} - 2B_p \\ &= \sum_j h_j (V_{pj} + V_{jp}) - 2B_p \end{aligned}$$

considerando che la matrice V_{pj} è simmetrica

$$V_{pj} = \sum_n \operatorname{tr} \left(\hat{l}_p(t_n) \hat{l}_j(t_n) \right) = \sum_n \operatorname{tr} \left(\hat{l}_j(t_n) \hat{l}_p(t_n) \right) = V_{jp}$$

si ottiene la seguente espressione finale per la derivata

$$\frac{\partial f}{\partial h_p} = 2 \sum_j V_{pj} h_j - 2B_p$$

Per individuare il vettore \vec{h} che minimizza f , bisogna imporre che la precedente derivata si annulli

$$\left. \frac{\partial f}{\partial h_p} \right|_{\vec{h}=\vec{h}^{\text{opt}}} = 2 \sum_j V_{pj} h_j^* - 2B_p = 0 \implies \sum_j V_{pj} h_j^{\text{opt}} = B_p$$

invertendo la precedente equazione, si ottiene l'espressione delle componenti di \vec{h}^{opt}

$$h_p^{\text{opt}} = \sum_j (V^{-1})_{pj} B_j \quad (4.7)$$

dove V^{-1} è la matrice pseudoinversa di V .

4.3 Calcolo dell'errore sui coefficienti

Nota l'espressione dei parametri ottimali h_p^{opt} , si vuole stimare la precisione con la quale è possibile conoscerli per cui si procede al calcolo dell'errore

$$\delta h_p = h_p - h_p^{\text{opt}} = \sum_j (V^{-1})_{pj} \delta B_j \quad (4.8)$$

In generale, δh_p dovrebbe dipendere anche dall'errore su V^{-1} , il quale, però, è proporzionale ad una potenza di $\|V^{-1}\|$ superiore alla prima, quindi, nel caso in cui $\|V^{-1}\| \ll 1$, la (4.8) rappresenta una stima dell'errore su δh_p al primo ordine in $\|V^{-1}\|$. Se non valesse la precedente disuguaglianza, l'errore su V^{-1} non sarebbe trascurabile e nell'espressione di δh_p comparirebbe un termine proporzionale a $\|V^{-1}\|^\eta$, con $\eta > 1$, tale da rendere l'errore sui coefficienti abbastanza grande da impedire l'individuazione dell'hamiltoniano esatto. Guardando alla (4.8), si vede che, per stimare δh_p , bisogna calcolare δB_j , per farlo si devono, innanzitutto, esplicitare alcune delle quantità presenti nell'espressione di B_j

$$B_j = \sum_n \text{tr} \left(\frac{\hat{\rho}(t_{n+1}) - \hat{\rho}(t_n)}{\delta t} \hat{L}_j(t_n) \right)$$

considerando che l'insieme $\{\hat{O}_k\}$ è una base ortonormale per lo spazio di Hilbert degli operatori $L_{\mathcal{H}}$, l'operatore densità può essere scomposto nel seguente modo

$$\hat{\rho}(t_n) = \sum_k \rho_k(t_n) \hat{O}_k$$

dove i coefficienti $\rho_k(t_n)$ hanno la seguente espressione

$$\rho_k(t_n) = \langle \hat{\rho}(t_n), \hat{O}_k \rangle = \text{tr} \left(\hat{\rho}(t_n) \hat{O}_k \right) = \langle \hat{O}_k \rangle_{\hat{\rho}(t_n)}$$

cioè sono uguali al valor medio degli operatori di base \hat{O}_k calcolato sullo stato $\hat{\rho}(t_n)$. Utilizzando la precedente decomposizione di $\hat{\rho}(t_n)$, l'espressione di B_j diventa

$$B_j = \sum_n \text{tr} \left(\frac{1}{\delta t} \left(\sum_\alpha \rho_\alpha(t_{n+1}) \hat{O}_\alpha - \sum_\beta \rho_\beta(t_n) \hat{O}_\beta \right) \left(-i \left[\hat{L}_j, \sum_\gamma \rho_\gamma(t_n) \hat{O}_\gamma \right] \right) \right)$$

I dettagli riguardanti la derivazione dell'errore su B_j sono oggetto dell'Appendice F.

L'errore su B_j è dovuto unicamente all'errore statistico che si ha sui coefficienti $\rho_k(t_n)$ derivante dalla ripetizione delle misure, quindi, utilizzando le usuali regole di propagazione dell'errore, si ha che

$$\delta B_j = \sqrt{\sum_{m,k} \left(\frac{\partial B_j}{\partial \rho_k(t_m)} \right)^2 \sigma_{\rho_k(t_m)}^2} \quad (4.9)$$

dove $\sigma_{\rho_k(t_m)}^2$ è l'errore sul valor medio di ciascun coefficienti $\rho_k(t_m)$ calcolato con le N_M misure effettuate sullo stato.

In realtà, l'espressione dell'errore su B_j va corretta aggiungendo un errore sistematico dipendente dal resto $\hat{R}_n^{(1)}$; questo termine è dovuto al fatto che l'intervallo di campionamento δt non può mai annullarsi per cui la stima della derivata tramite il rapporto incrementale contiene un errore intrinseco. Tenendo presente questo termine, la (4.9) diventa

$$\delta B_j = \sqrt{\sum_{m,k} \left(\frac{\partial B_j}{\partial \rho_k(t_m)} \right)^2 \sigma_{\rho_k(t_m)}^2} + \sum_m \left| \text{tr} \left\{ \hat{l}_j(t_m) \frac{\hat{R}_m^{(1)}}{\delta t} \right\} \right| \quad (4.10)$$

esplicitando le quantità in essa contenuti, si ottengono le seguenti disuguaglianze

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{m,k} \left(\frac{\partial B_j}{\partial \rho_k(t_m)} \right)^2 \sigma_{\rho_k(t_m)}^2} &\leq 4 \|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \|\hat{H}\|_{\text{op}} \sqrt{\frac{N_t}{2^{N_q} N_M}} \\ \sum_m \left| \text{tr} \left\{ \hat{l}_j(t_m) \frac{\hat{R}_m^{(1)}}{\delta t} \right\} \right| &\leq \sqrt{2} \delta t \|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \|\hat{H}\|_{\text{op}}^2 N_t \end{aligned}$$

così che δB_j diventa

$$\delta B_j \leq 4 \|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \|\hat{H}\|_{\text{op}} \sqrt{\frac{N_t}{2^{N_q} N_M}} + \sqrt{2} \delta t \|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \|\hat{H}\|_{\text{op}}^2 N_t \quad (4.11)$$

considerando che

$$\|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{\sqrt{2^{N_q}}}$$

la (4.11) diventa

$$\delta B_j \leq 4 \|\hat{H}\|_{\text{op}} \sqrt{\frac{N_t}{4^{N_q} N_M}} + \sqrt{2} \delta t \frac{N_t}{\sqrt{2^{N_q}}} \|\hat{H}\|_{\text{op}}^2 \quad (4.12)$$

Sostituendo la (4.12) nella (4.8), si ottiene

$$\begin{aligned} \delta h_p &= \sum_j (V^{-1})_{pj} \delta B_j \\ &\leq \sum_j (V^{-1})_{pj} \left(4 \|\hat{H}\|_{\text{op}} \sqrt{\frac{N_t}{4^{N_q} N_M}} + \sqrt{2} \delta t \frac{N_t}{\sqrt{2^{N_q}}} \|\hat{H}\|_{\text{op}}^2 \right) \end{aligned}$$

dalla precedente, tenendo presenti le (F.8), (F.9), si ricava la disuguaglianza relativa a $|\vec{\delta h}|$

$$\begin{aligned} |\vec{\delta h}| &= \sqrt{\sum_p (\delta h_p)^2} \\ &\leq \left(4|\vec{h}| \sqrt{\frac{N_t}{4^{N_q} N_M}} + \sqrt{2} \delta t \frac{N_t}{\sqrt{2^{N_q}}} \|\hat{H}\|_{\text{op}} |\vec{h}| \right) \sqrt{\text{tr}\{(V^{-1})^2\}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

dividendo ambo i membri dell'equazione per $|\vec{h}|$, si ricava l'espressione finale dell'errore relativo sulla stima dei coefficienti dell'hamiltoniano

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{\delta h}|}{|\vec{h}|} &\leq \left(4\sqrt{\frac{N_t}{4^{N_q} N_M}} + \sqrt{2} \frac{N_t \delta t}{\sqrt{2^{N_q}}} \|\hat{H}\|_{\text{op}} \right) \sqrt{\text{tr}\{(V^{-1})^2\}} \\ &= \left(4\sqrt{\frac{N_t}{4^{N_q} N_M}} + \sqrt{2} \frac{N_t \delta t}{\sqrt{2^{N_q}}} \|\hat{H}\|_{\text{op}} \right) \|V^{-1}\| \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dalla precedente espressione si deduce che, per minimizzare l'errore relativo sui coefficienti dell'hamiltoniano, bisogna:

- aumentare il numero di misure ripetute N_M effettuate per stimare in modo più accurato il valore di una osservabile in un certo istante;
- ridurre il più possibile l'ampiezza dell'intervallo δt che separa due istanti successivi in cui vengono effettuate le misure dello stato. Il valore minimo che esso può assumere dipende dalla sensibilità e dalla prontezza degli strumenti utilizzati;
- aumentare la dimensione dello spazio di Hilbert degli stati che è uguale a 2^{N_q} andando a considerare sistemi più complessi in cui vengono accoppiati più di due qubit;
- minimizzare il fattore $\sqrt{\text{tr}\{(V^{-1})^2\}}$, per farlo bisogna prendere in considerazione la sua forma esplicita.

La traccia è indipendente dalla base utilizzata, quindi, scegliendo di rappresentare V^{-1} nella base in cui è diagonale, sarà uguale alla somma degli autovalori di V^{-1}

$$\sqrt{\text{tr}\{(V^{-1})^2\}} = \sqrt{\sum_k \frac{1}{\omega_k^2}}$$

dove ω_k sono gli autovalori di V e $\frac{1}{\omega_k}$ quelli di V^{-1} .

Dalla precedente espressione si vede che, per minimizzare $\sqrt{\text{tr}\{(V^{-1})^2\}}$, bisogna fare in modo che gli autovalori ω_k di V siano grandi, $\omega_k \gg 1$.

Capire il modo in cui massimizzare gli ω_k necessita di studi ulteriori che esulano da questo lavoro, però, se si considera il caso semplice in cui gli elementi della matrice V non dipendono dal tempo, è comunque possibile capire quale sia l'andamento del termine $\sqrt{\text{tr}\{(V^{-1})^2\}}$.

L'espressione dei V_{jk} è la seguente

$$V_{jk} = \sum_n \text{tr}(\hat{l}_j(t_n)\hat{l}_k(t_n))$$

se gli operatori \hat{l}_j, \hat{l}_k rimangono costanti nel tempo, allora si ha che

$$V_{jk} = \sum_n \text{tr}(\hat{l}_j\hat{l}_k) = \text{tr}(\hat{l}_j\hat{l}_k) \sum_n = \text{tr}(\hat{l}_j\hat{l}_k) N_t$$

quindi la matrice V può essere posta nella seguente forma

$$V = N_t V_0$$

moltiplicando a sinistra ambo i membri per V^{-1} , si ottiene

$$1 = V^{-1}V = N_t V^{-1}V_0$$

moltiplicando a destra ambo i membri per V_0^{-1} , si ottiene

$$V_0^{-1} = N_t V^{-1} \implies V^{-1} = \frac{1}{N_t} V_0^{-1}$$

quindi

$$\sqrt{\text{tr}\{(V^{-1})^2\}} = \sqrt{\text{tr}\left\{\left(\frac{V_0^{-1}}{N_t}\right)^2\right\}} = \frac{1}{N_t} \sqrt{\text{tr}\{(V_0^{-1})^2\}}$$

In questo caso specifico si è, dunque, ottenuto che

$$\sqrt{\text{tr}\{(V^{-1})^2\}} = \frac{1}{N_t} \sqrt{\text{tr}\{(V_0^{-1})^2\}}$$

per cui la (4.14) diventa

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{\delta h}|}{|\vec{h}|} &\leq \left(4\sqrt{\frac{N_t}{4^{N_q} N_M}} + \sqrt{2} \frac{N_t \delta t}{\sqrt{2^{N_q}}} \|\hat{H}\|_{\text{op}} \right) \frac{1}{N_t} \sqrt{\text{tr}\{(V_0^{-1})^2\}} \\ &= \left(\frac{4}{\sqrt{4^{N_q} N_M N_t}} + \sqrt{2} \frac{\delta t}{\sqrt{2^{N_q}}} \|\hat{H}\|_{\text{op}} \right) \sqrt{\text{tr}\{(V_0^{-1})^2\}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

da cui si vede come, fissato δt , aumentando la durata dell'intervallo di tempo in cui si fa evolvere il sistema facendo aumentare N_t , l'errore relativo diminuisce.

Si è, dunque, visto che sebbene effettuare la tomografia completa di uno stato, effettuare numerose misure ripetute di uno stesso osservabile e far evolvere un sistema per un tempo più lungo siano tutte operazioni molto dispendiose dal punto di vista computazionale e presentino difficoltà sperimentali, esse comportano un notevole vantaggio nella stima dei coefficienti dell'hamiltoniano che governa la dinamica del dispositivo che si vuole caratterizzare dato che permettono di ridurre l'errore su tale stima.

4.4 Applicazione

In questa sezione verrà illustrata l'applicazione del metodo precedentemente descritto alla *porta logica di cross-resonance* che è un dispositivo a due qubit. L'hamiltoniano che descrive il circuito di *cross-resonance* ottenuto effettuando dei fit non lineari con dati simulati utilizzando il tutorial messo a disposizione dalla IBM è il seguente [3]

$$\begin{aligned} \hat{H}_{CR} = & -1,548(\mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_x) - 0,004(\mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_y) + \\ & + 0,006(\mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_z) + 9,578(\hat{\sigma}_z \otimes \mathbb{1}_2) + \\ & + 5,316(\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x) - 0,225(\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_y) - 0.340(\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z) \end{aligned} \quad (4.16)$$

dove, essendo $\hbar = 1$, i coefficienti hanno le dimensioni dei MHz. Dalla precedente espressione risulta evidente che gli operatori di base necessari a descrivere il circuito considerato sono i seguenti

$$\begin{aligned} \{\hat{L}_j\} = \{ & \mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_x, \mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_y, \mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_z, \\ & \hat{\sigma}_z \otimes \mathbb{1}_2, \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Nel seguito applichiamo il metodo inverso scegliendo tre possibili stati iniziali per testarne l'influenza sul metodo stesso:

$$\begin{aligned} |\psi_1(0)\rangle &= |1, 1\rangle \\ |\psi_2(0)\rangle &= |\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0\rangle + |1, 1\rangle) \\ |\psi_3(0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \end{aligned} \quad (4.18)$$

sono stati generati dei nuovi stati grazie all'operatore di evoluzione temporale

$$\begin{aligned} |\psi_1(t_n)\rangle &= e^{i\hat{H}_{CR}t_n} |\psi_1(0)\rangle = e^{in\delta t\hat{H}_{CR}} |\psi_1(0)\rangle \\ |\psi_2(t_n)\rangle &= e^{i\hat{H}_{CR}t_n} |\psi_2(0)\rangle = e^{in\delta t\hat{H}_{CR}} |\psi_2(0)\rangle \\ |\psi_3(t_n)\rangle &= e^{i\hat{H}_{CR}t_n} |\psi_3(0)\rangle = e^{in\delta t\hat{H}_{CR}} |\psi_3(0)\rangle \end{aligned} \quad (4.19)$$

Successivamente, in ogni istante t_n , sono stati calcolati i valori medi di tutti gli operatori di base dello spazio $L_{\mathcal{H}}$ nel caso in cui $N_q = 2$

$$\begin{aligned} \{\hat{O}_k\} = \{ & \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2, \mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_x, \mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_y, \mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x \otimes \mathbb{1}_2, \\ & \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_y \otimes \mathbb{1}_2, \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x, \\ & \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_z \otimes \mathbb{1}_2, \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \} \end{aligned} \quad (4.20)$$

tramite la seguente formula

$$\rho_k^{(j)}(t_n) = \langle \psi_j(t_n) | \hat{O}_k | \psi_j(t_n) \rangle \quad (4.21)$$

dove $j = 1, 2, 3$.

Grazie ai coefficienti (4.21), è stato possibile ricostruire lo stato finale in ciascun istante t_n , applicando il metodo inverso, in particolare, utilizzando l'equazione (3.53), sono stati ricavati i coefficienti h_p^{opt} dell'hamiltoniano che meglio approssima quello esatto.

A questo punto, essendo noti sia i coefficienti dell'hamiltoniano esatto (4.16) che quelli ottenuti tramite il metodo inverso, è stato possibile calcolare l'errore relativo sulla stima dei coefficienti

$$\frac{|\delta \vec{h}|}{|\vec{h}|} = \frac{|\vec{h} - \vec{h}^{\text{opt}}|}{|\vec{h}|} \quad (4.22)$$

Tabella 4.1: A sinistra i coefficienti dell'hamiltoniano esatto (4.16), destra quelli stimati tramite il metodo inverso con il relativo errore.

Coefficienti esatti	Coefficienti stimati
h_1	$h_1^{\text{opt}} \pm \delta h_1$
h_2	$h_2^{\text{opt}} \pm \delta h_2$
h_3	$h_3^{\text{opt}} \pm \delta h_3$
h_4	$h_4^{\text{opt}} \pm \delta h_4$
h_5	$h_5^{\text{opt}} \pm \delta h_5$
h_6	$h_6^{\text{opt}} \pm \delta h_6$

Nei grafici che seguono sono illustrati gli andamenti dell'errore relativo rispetto al numero di misure N_M , alla durata dell'esperimento N_t e della prontezza e sensibilità dello strumento di misura utilizzato.

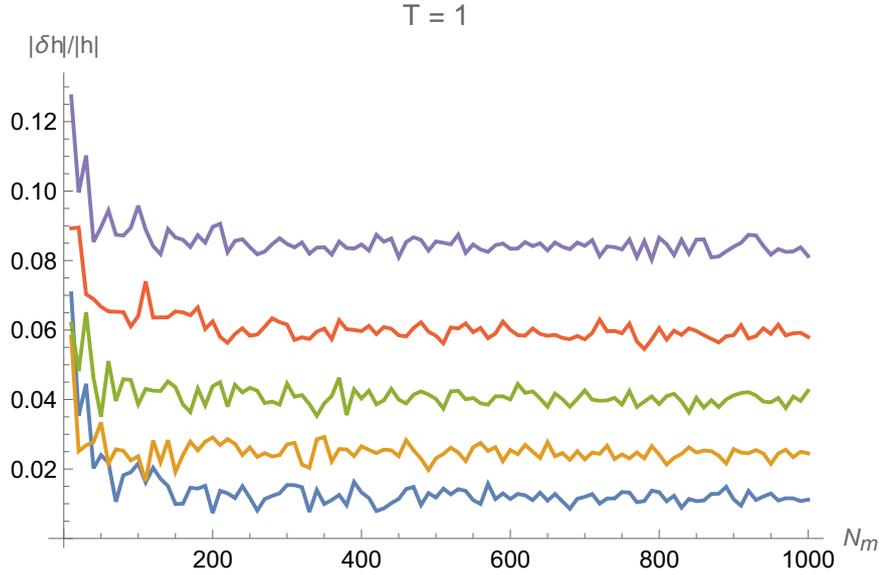


Figura 4.1: Il grafico mostra l'andamento dell'errore relativo sui coefficienti rispetto al numero di misure N_m . Lo stato iniziale utilizzato per calcolare l'errore è lo stato di Bell $|\psi_2(0)\rangle = |\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle)$.

Le varie curve si riferiscono a differenti valori di δt :

$\delta t = 0.01$ (curva blu), $\delta t = 0.02$ (curva arancione), $\delta t = 0.03$ (curva verde), $\delta t = 0.04$ (curva rossa), $\delta t = 0.05$ (curva viola).

Dalla Figura 4.1 si vede che, come previsto dalla (4.14), l'errore relativo decresce all'aumentare del numero di misure ripetute N_M per poi rimanere costante al di sopra di un certo valore di N_M ; il valore costante su cui l'errore si stabilizza cresce all'aumentare dell'intervallo di campionamento δt poichè aumenta l'entità dell'errore sistematico commesso nel valutare la derivata discreta. Come evidenziato nella precedente sezione, risulta, quindi determinate capire quale sia la forma esplicita degli elementi di V e dei suoi autovalori.

In Figura 4.3 si l'errore relativo in funzione di N_s per i tre diversi stati mostrati nella (4.18). Confrontando i tre grafici si vede che l'errore associato ai coefficienti calcolati usando lo stato di Bell, che è l'unico stato entangled utilizzato, decresce più velocemente degli altri, questo potrebbe far pensare che le correlazioni non-locali influenzino il modo in cui lo stato evolve dando, così, luogo all'effetto osservato nel grafico.

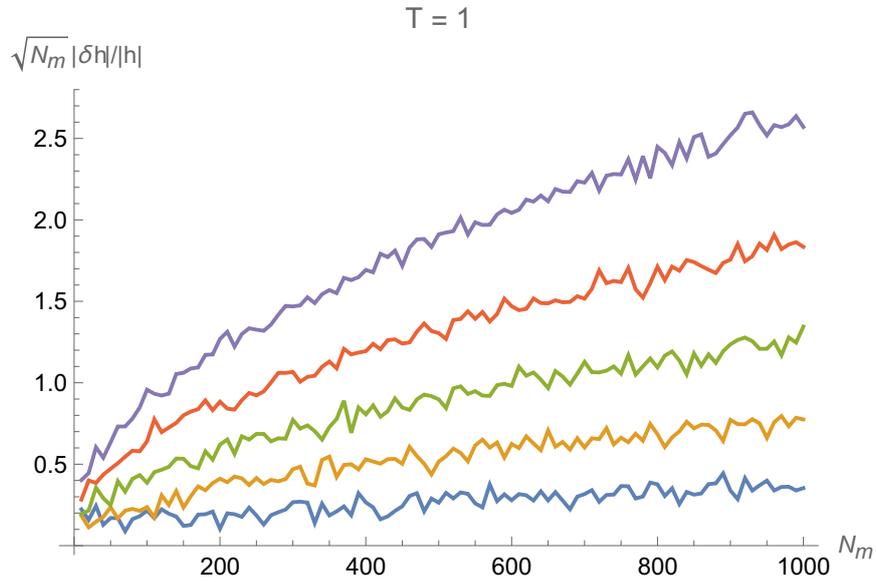


Figura 4.2: Il grafico è realizzato con gli stessi dati del precedente con l'unica differenza che sulle ordinate è graficata la variabile $\sqrt{N_m} \frac{|\delta \vec{h}|}{|\vec{h}|}$ al posto di $\frac{|\delta \vec{h}|}{|\vec{h}|}$.

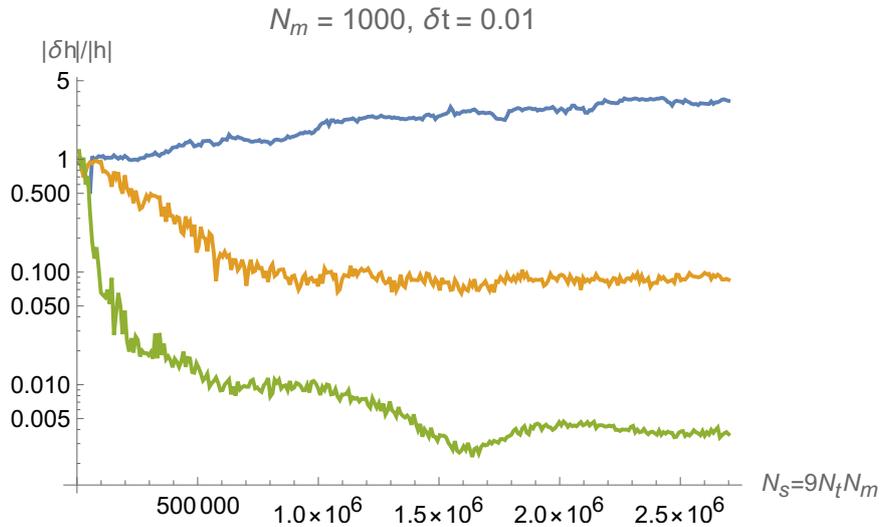


Figura 4.3: Il grafico è in scala semilogaritmica e mostra l'andamento dell'errore relativo in funzione di N_s , nella cui espressione l'unica grandezza che varia è N_t . Le tre curve sono ottenute utilizzando tre diversi insiemi di dati ottenuti facendo evolvere i seguenti stati:
 $|\psi_1(0)\rangle = |1, 1\rangle$ (curva blu), $|\psi_2(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 0\rangle + |1, 1\rangle)$ (curva verde),
 $|\psi_3(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle)$ (curva arancione).

Studi preliminari sembrano indicare che questo risultato non dipenda dall'entanglement dello stato di partenza. Ciò che sembrerebbe influenzare fortemente la stima dei coefficienti è, invece, la scelta dello stato iniziale congiuntamente alle interazioni da prendere in considerazione attraverso la scelta degli operatori da utilizzare per rappresentare l'hamiltoniano; questi fattori, insieme, influenzano il modo in cui lo stato iniziale evolve ed esplora lo spazio di Hilbert degli stati accumulando informazioni all'interno della matrice V , i cui elementi dipendono proprio dalle quantità sopramenzionate. In altre parole, quanto più lo stato iniziale esplora lo spazio degli stati durante la sua evoluzione dinamica tanto più il metodo risulta accurato. Pertanto, stati che cambiano poco mediante l'evoluzione unitaria sono di scarsa utilità per l'applicazione del metodo.

Appendice A

Gruppo di Clifford

Si prendano in considerazione le matrici di Pauli $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ le quali formano una base ortogonale per lo spazio vettoriale \mathbb{C}^2 della matrici complesse 2×2 , utilizzando il prodotto tensoriale, è possibile costruire matrici $n \times n$ le quali sono le rappresentazioni degli operatori che agiscono sugli spazi di Hilbert associati ai sistemi formati da n qubit

$$\sigma_{j_1} \otimes \sigma_{j_2} \cdots \otimes \sigma_{j_n}$$

dove $j_k = 0, 1, 2, 3$ con $k = 1, 2, \dots, n$.

Grazie alle precedenti definizioni, si introduce il gruppo di Pauli P_n di dimensione n [25] nel seguente modo

$$P_n = \left\{ e^{i\theta \frac{\pi}{2}} \sigma_{j_1} \otimes \sigma_{j_2} \cdots \otimes \sigma_{j_n} : \theta = 0, 1, 2, 3, j_k = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

e, a partire da esso, il gruppo di Clifford C_n [25]

$$C_n = \left\{ V \in U(2^n) : V P_n V^\dagger = P_n \right\}$$

La precedente definizione indica che il gruppo di Clifford è un insieme di matrici unitarie $V \in U(2^n)$, dove $U(2^n)$ è il gruppo delle matrici unitarie di dimensione 2^n , tali che, detta A una matrice del gruppo di Pauli, $A \in P_n$, la matrice $V A V^\dagger$ appartiene ancora al gruppo di Pauli

$$V A V^\dagger = A' \in P_n$$

È possibile mostrare che le matrici

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}, U_{\text{CNOT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono i generatori del gruppo quindi qualunque altra matrice che ne fa parte può essere ottenuta combinando queste tre, ad esempio le matrici di Pauli $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, che appartengono a C_n , possono essere ottenute componendo S ed H

$$\sigma_0 = H^2$$

$$\sigma_1 = H \cdot S^2 \cdot H$$

$$\sigma_2 = iH \cdot S^2 \cdot H \cdot S^2$$

$$\sigma_3 = S^2$$

Appendice B

Hamiltoniano effettivo

Per ricavare l'hamiltoniano effettivo relativo alla *porta logica di cross-resonance*, si parte dall'hamiltoniano che schematizza il circuito formato da due *fixed-frequency transmons* accoppiati alla Jaynes-Cummings tramite un circuito di risonanza LC e si effettuano una serie di rotazioni e trasformazioni unitarie. I calcoli relativi a questa appendice ripercorrono quelli della referenza [9].

B.1 Rotazione 1

Si consideri il seguente hamiltoniano di Jaynes-Cummings che descrive un sistema formato da due *fixed-frequency transmons* ciascuno dei quali interagisce con un campo elettromagnetico quantizzato canale di fotoni a singolo modo che sperimentalmente viene realizzato tramite un circuito LC, ($\hbar = 1$):

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \hat{H}_{T_1} + \hat{H}_{T_2} + \hat{H}_r + \hat{H}_{T_1-r} + \hat{H}_{T_2-r} \\
 &= \left[\omega_1 \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \frac{\delta_1}{2} \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 - \mathbb{1}) \right] + \\
 &+ \left[\omega_2 \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \frac{\delta_2}{2} \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 (\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 - \mathbb{1}) \right] + \omega_r \hat{c}^\dagger \hat{c} + \\
 &+ g_1 (\hat{b}_1^\dagger \hat{c} + \hat{b}_1 \hat{c}^\dagger) + g_2 (\hat{b}_2^\dagger \hat{c} + \hat{b}_2 \hat{c}^\dagger) \\
 &= \sum_{j=1}^2 \left[\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \frac{\delta_j}{2} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j - \mathbb{1}) \right] + \omega_r \hat{c}^\dagger \hat{c} + \sum_{j=1}^2 g_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{c} + \hat{b}_j \hat{c}^\dagger)
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

I *transmons* T_1 , T_2 sono descritti utilizzando gli hamiltoniani \hat{H}_{T_1} , \hat{H}_{T_2} di *oscillatori anarmonici* aventi frequenza e anarmonicit  (ω_1, δ_1), (ω_2, δ_2), rispettivamente, ricavati nella (2.80) mentre il campo elettromagnetico quantizzato   descritto utilizzando l'hamiltoniano di un *oscillatore armonico* avente frequenza ω_r , ricavato nella (2.55).

La frequenza ω_r dei fotoni utilizzati in questo contesto appartiene all'intervallo delle microonde (0,3 – 300 GHz), in particolare, assume un valore vicino ai 5 GHz.

Bisogna sottolineare che nello scrivere le espressioni degli hamiltoniani degli oscillatori armonici quantistici è stata trascurata l'energia di punto zero $\frac{1}{2}\omega$ che è costante; i termini di interazione, invece, sono quelli tipici del modello di Jaynes-Cummings per cui sono ottenuti facendo uso dell'approssimazione di dipolo e della rotating-wave approximation.

Si effettua un cambio di sistema di riferimento e si ci pone in un sistema di riferimento rotante con la stessa frequenza dei fotoni. Quando si effettua tale operazione la funzione d'onda si modifica nel seguente modo

$$\psi \longrightarrow \hat{R}_1 \psi$$

dove \hat{R}_1 è l'operatore unitario, $\hat{R}_1^\dagger = \hat{R}_1^{-1}$, che descrive questo cambio di riferimento.

L'equazione di Schrodinger, nel sistema di riferimento rotante, assume la seguente forma:

$$\hat{H}(\hat{R}_1 \psi) = i \frac{d}{dt} (\hat{R}_1 \psi) \quad (\text{B.2})$$

esplicitando la derivata temporale

$$\hat{H}(\hat{R}_1 \psi) = i \left(\frac{d\hat{R}_1}{dt} \psi + \hat{R}_1 \frac{d\psi}{dt} \right)$$

moltiplicando a sinistra ambo i membri dell'equazione precedente per $\hat{R}_1^{-1} = \hat{R}_1^\dagger$, si ottiene

$$\left(\hat{R}_1^\dagger \hat{H} \hat{R}_1 \right) \psi = i \hat{R}_1^\dagger \left(\frac{d\hat{R}_1}{dt} \psi + \hat{R}_1 \frac{d\psi}{dt} \right) = i \left(\hat{R}_1^\dagger \frac{d\hat{R}_1}{dt} \psi + \hat{R}_1^\dagger \hat{R}_1 \frac{d\psi}{dt} \right)$$

considerando che $\hat{R}_1^\dagger \hat{R}_1 = \hat{R}_1^{-1} \hat{R}_1 = \mathbb{1}$, si ottiene

$$\left(\hat{R}_1^\dagger \hat{H} \hat{R}_1 \right) \psi = i \left(\hat{R}_1^\dagger \frac{d\hat{R}_1}{dt} \psi + \frac{d\psi}{dt} \right)$$

portando al primo membro il primo termine che si trova al secondo membro, si ha che

$$\left(\hat{R}_1^\dagger \hat{H} \hat{R}_1 - i \hat{R}_1^\dagger \frac{d\hat{R}_1}{dt} \right) \psi = i \hbar \frac{d\psi}{dt}$$

A questo punto si definisce l'hamiltoniano \hat{H}_{R_1} nel seguente modo

$$\hat{H}_{R_1} = \hat{R}_1^\dagger \hat{H} \hat{R}_1 - i \hat{R}_1^\dagger \frac{d\hat{R}_1}{dt} \quad (\text{B.3})$$

per cui, l'equazione precedente diventa

$$\hat{H}_{R_1}\psi = i\frac{d\psi}{dt}$$

Guardando all'equazione ottenuta è possibile affermare che far agire l'hamiltoniano \hat{H} sullo stato ruotato $\hat{R}_1\psi$ è equivalente a far agire \hat{H}_{R_1} sullo stato ψ .

L'espressione esplicita dell'operatore di rotazione \hat{R}_1 e del suo aggiunto sono le seguenti

$$\hat{R}_1 = e^{-i\omega_r t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c})} \quad (\text{B.4})$$

$$\hat{R}_1^\dagger = e^{i\omega_r t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c})} \quad (\text{B.5})$$

considerando che gli operatori $\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j$, $\hat{c}^\dagger \hat{c}$ commutano tra loro

$$[\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j, \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k] = \delta_{jk} \quad (\text{B.6})$$

$$[\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j, \hat{c}^\dagger \hat{c}] = 0 \quad (\text{B.7})$$

dove $j, k = 1, 2$, si ottiene che

$$\begin{aligned} \hat{R}_1^\dagger \frac{d\hat{R}_1}{dt} &= e^{i\omega_r t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c})} \cdot \\ &\quad \cdot \left[-i\omega_r (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c}) e^{-i\omega_r t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c})} \right] \\ &= -i\omega_r t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c}) \end{aligned}$$

quindi moltiplicando ambo i membri per $-i$, si ha che

$$\begin{aligned} -i\hat{R}_1^\dagger \frac{d\hat{R}_1}{dt} &= -i(-i\omega_r t) (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c}) \\ &= -\omega_r t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c}) \end{aligned}$$

in definitiva si ottiene che

$$i\hat{R}_1^\dagger \frac{d\hat{R}_1}{dt} = \omega_r t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c}) \quad (\text{B.8})$$

Inserendo la (B.4), (B.5), (B.8) nella (B.3), questa diventa

$$\begin{aligned} \hat{H}_{R_1} &= \hat{R}_1^\dagger \hat{H} \hat{R}_1 - i\hat{R}_1^\dagger \frac{d\hat{R}_1}{dt} \\ &= e^{i\omega_r t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c})} \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_{j=1}^2 \left[\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \frac{\delta_j}{2} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j - \mathbb{1}) + g_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{c} + \hat{b}_j \hat{c}^\dagger) \right] + \omega_r \hat{c}^\dagger \hat{c} \right\} \cdot \\ &\quad \cdot e^{-i\omega_r t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c})} - \omega_r t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c}) \end{aligned}$$

grazie alle regole di commutazione (B.6), (B.7), si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{H}_{R_1} = & \sum_{j=1}^2 \left[(\omega_j - \omega_r) \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \frac{\delta_j}{2} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j - \mathbb{1}) \right] + \\ & + \sum_{j=1}^2 g_j e^{i\omega_r t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c})} \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{c} + \hat{b}_j \hat{c}^\dagger \right) e^{-i\omega_r t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c})} \end{aligned}$$

se si definisce la frequenza rinormalizzata $\Delta_{jr} = \omega_j - \omega_r$, l'espressione precedente diventa

$$\begin{aligned} \hat{H}_{R_1} = & \sum_{j=1}^2 \left[\Delta_{jr} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \frac{\delta_j}{2} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j - \mathbb{1}) \right] + \\ & + \sum_{j=1}^2 g_j e^{i\omega_r t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c})} \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{c} + \hat{b}_j \hat{c}^\dagger \right) e^{-i\omega_r t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c})} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Ora bisogna analizzare il termine

$$\sum_{j=1}^2 g_j e^{i\omega_r t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c})} \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{c} + \hat{b}_j \hat{c}^\dagger \right) e^{-i\omega_r t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{c}^\dagger \hat{c})}$$

il quale può essere scritto nella seguente forma più compatta

$$\sum_{j=1}^2 g_j \hat{R}_1^\dagger \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{c} + \hat{b}_j \hat{c}^\dagger \right) \hat{R}_1 = \sum_{j=1}^2 g_j \left(\hat{R}_1^\dagger \hat{b}_j^\dagger \hat{c} \hat{R}_1 + \hat{R}_1^\dagger \hat{b}_j \hat{c}^\dagger \hat{R}_1 \right)$$

considerando che $\hat{R}_1 \hat{R}_1^\dagger = \mathbb{1}$, se si inserisce l'operatore identità tra \hat{b}_j^\dagger e \hat{c} e tra \hat{b}_j e \hat{c}^\dagger , l'espressione precedente diventa

$$\sum_{j=1}^2 g_j \left[(\hat{R}_1^\dagger \hat{b}_j^\dagger \hat{R}_1) (\hat{R}_1^\dagger \hat{c} \hat{R}_1) + (\hat{R}_1^\dagger \hat{b}_j \hat{R}_1) (\hat{R}_1^\dagger \hat{c}^\dagger \hat{R}_1) \right] \quad (\text{B.10})$$

Si consideri l'operatore $\hat{R}_1^\dagger \hat{b}_j^\dagger \hat{R}_1$, tenendo presente la (B.7), esso può essere riscritto nel seguente modo

$$\hat{R}_1^\dagger \hat{b}_j^\dagger \hat{R}_1 = e^{i\omega_r t \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j} \hat{b}_j^\dagger e^{-i\omega_r t \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j} \quad (\text{B.11})$$

la funzione di operatori $e^{i\omega_r t \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j}$ viene sviluppata in serie di potenze

$$e^{i\omega_r t \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j} = \mathbb{1} + i\omega_r t (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j) + \frac{1}{2} (i\omega_r t)^2 (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j)^2 + \dots$$

così da ottenere la seguente relazione

$$e^{i\omega_r t \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j} \hat{b}_j^\dagger = \left\{ \mathbb{1} + i\omega_r t (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j) + \frac{1}{2} (i\omega_r t)^2 (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j)^2 + \dots \right\} \hat{b}_j^\dagger \quad (\text{B.12})$$

utilizzando la (B.6), si ha che $\hat{b}_j \hat{b}_j^\dagger = \mathbb{1} + \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j$, quindi i termini che compaiono nella (B.12) diventano

$$\begin{aligned} (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j) \hat{b}_j^\dagger &= \hat{b}_j^\dagger (\hat{b}_j \hat{b}_j^\dagger) = \hat{b}_j^\dagger (\mathbb{1} + \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j) \\ (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j)^2 \hat{b}_j^\dagger &= \hat{b}_j^\dagger (\mathbb{1} + \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j)^2 \end{aligned}$$

espressioni analoghe si ottengono per le potenze di ordine superiore. Grazie alle precedenti equazioni, la (B.12) può essere scritta nel seguente modo

$$\begin{aligned} e^{i\omega_r t \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j} \hat{b}_j^\dagger &= \left\{ \mathbb{1} + i\omega_r t (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j) + \frac{1}{2} (i\omega_r t)^2 (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j)^2 + \dots \right\} \hat{b}_j^\dagger \\ &= \hat{b}_j^\dagger + i\omega_r t (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j) \hat{b}_j^\dagger + \frac{1}{2} (i\omega_r t)^2 (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j)^2 \hat{b}_j^\dagger + \dots \\ &= \hat{b}_j^\dagger + i\omega_r t \hat{b}_j^\dagger (\mathbb{1} + \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j) + \frac{1}{2} (i\omega_r t)^2 \hat{b}_j^\dagger (\mathbb{1} + \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j)^2 + \dots \\ &= \hat{b}_j^\dagger \left\{ \mathbb{1} + i\omega_r t (\mathbb{1} + \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j) + \frac{1}{2} (i\omega_r t)^2 (\mathbb{1} + \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j)^2 + \dots \right\} \\ &= \hat{b}_j^\dagger e^{i\omega_r t (\mathbb{1} + \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j)} \\ &= \hat{b}_j^\dagger e^{i\omega_r t \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j} e^{i\omega_r t} \end{aligned}$$

in definitiva

$$e^{i\omega_r t \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j} \hat{b}_j^\dagger = \hat{b}_j^\dagger e^{i\omega_r t \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j} e^{i\omega_r t} \quad (\text{B.13})$$

quindi l'equazione (B.11) diventa

$$\hat{R}_1^\dagger \hat{b}_j^\dagger \hat{R}_1 = e^{i\omega_r t \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j} \hat{b}_j^\dagger e^{-i\omega_r t \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j} = \hat{b}_j^\dagger e^{i\omega_r t} \quad (\text{B.14})$$

Analogamente si dimostra che

$$\hat{b}_j e^{-i\omega_r t \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j} = e^{-i\omega_r t \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j} \hat{b}_j e^{-i\omega_r t} \quad (\text{B.15})$$

$$\hat{c} e^{-i\omega_r t \hat{c}^\dagger \hat{c}} = e^{-i\omega_r t \hat{c}^\dagger \hat{c}} \hat{c} e^{-i\omega_r t} \quad (\text{B.16})$$

$$e^{i\omega_r t \hat{c}^\dagger \hat{c}} \hat{c}^\dagger = \hat{c}^\dagger e^{i\omega_r t \hat{c}^\dagger \hat{c}} e^{i\omega_r t} \quad (\text{B.17})$$

quindi gli altri fattori presenti nell'equazione (B.10) diventano

$$\hat{R}_1^\dagger \hat{b}_j \hat{R}_1 = \hat{b}_j e^{-i\omega_r t} \quad (\text{B.18})$$

$$\hat{R}_1^\dagger \hat{c} \hat{R}_1 = \hat{c} e^{-i\omega_r t} \quad (\text{B.19})$$

$$\hat{R}_1^\dagger \hat{c}^\dagger \hat{R}_1 = \hat{c}^\dagger e^{i\omega_r t} \quad (\text{B.20})$$

per cui si ottiene che

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 g_j \left[(\hat{R}_1^\dagger \hat{b}_j^\dagger \hat{R}_1) (\hat{R}_1^\dagger \hat{c} \hat{R}_1) + (\hat{R}_1^\dagger \hat{b}_j \hat{R}_1) (\hat{R}_1^\dagger \hat{c}^\dagger \hat{R}_1) \right] = \\ & = \sum_1^2 g_j \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{c} + \hat{b}_j \hat{c}^\dagger \right) \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Tenendo presente il risultato presente nell'equazione (B.21), l'hamiltoniano \hat{H}_{R_1} diventa

$$\hat{H}_{R_1} = \sum_{j=1}^2 \left[\Delta_{jr} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \frac{\delta_j}{2} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j - \mathbb{1} \right) \right] + \sum_{j=1}^2 g_j \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{c} + \hat{b}_j \hat{c}^\dagger \right) \quad (\text{B.22})$$

quindi, grazie al cambio di sistema di riferimento, è scomparso il termine

$$\hat{H}_r = \omega_r \hat{c}^\dagger \hat{c}$$

che descrive il campo elettromagnetico quantizzato libero e la frequenza caratteristica dei *transmons* è cambiata

$$\omega_j \longrightarrow \Delta_{jr}$$

L'equazione (B.22) è l'espressione che assume l'hamiltoniano relativo ad un sistema fisico formato da due *fixed-frequency transmons* ciascuno dei quali interagisce con un campo elettromagnetico quantizzato quando si ci pone in un sistema di riferimento rotante con la stessa frequenza ω_r dei fotoni.

B.2 Trasformazione di Schrieffer-Wolff

A partire da \hat{H}_{R_1} , si effettua una trasformazione di Schrieffer-Wolff per integrare i gradi di libertà fotonici e trovare l'hamiltoniano effettivo del sistema precedentemente descritto.

Questa procedura si basa su tre fondamentali ipotesi:

1. si opera nel regime dispersivo limite $\left| \frac{g_j}{\Delta_{jr}} \right| \ll 1$;
2. gli stati eccitati del campo elettromagnetico quantizzato sono vuoti;
3. l'anarmonicità δ_j dei *transmons* è infinita, $\delta_j \longrightarrow +\infty$;

La prima ipotesi giustifica l'utilizzo di un approccio perturbativo dato che la disuguaglianza $\left| \frac{g_j}{\Delta_{jr}} \right| \ll 1$ implica che $|g_j| \ll |\Delta_{jr}|$, per cui l'energia di interazione di ciascun *transmon* con il campo elettromagnetico è molto più piccola dell'energia dei *transmons* liberi quindi trattare il termine di interazione con un approccio perturbativo è un'operazione lecita.

Sia \mathcal{H} lo spazio di Hilbert associato al sistema formato dai due *fixed-frequency transmons* e dal campo elettromagnetico quantizzato, la seconda ipotesi implica che l'analisi perturbativa deve essere effettuata restringendosi ad un sottospazio \mathcal{H}_0 di \mathcal{H} , $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$, il quale contiene tutti gli stati caratterizzati dall'avere gli stati eccitati del campo elettromagnetico quantizzato vuoti. Gli stati di interesse sono, quindi, del seguente tipo: $|n_1, n_2, 0_F\rangle$.

Questa ipotesi si traduce fisicamente nel fatto che un apporto di energia dall'esterno deve servire solamente a far funzionare il circuito LC come accoppiatore tra i *transmons* e non ad eccitare il risonatore stesso.

Grazie alla terza ipotesi si restringe ulteriormente il sottospazio di Hilbert sul quale si opera perché, supponendo che l'anarmonicità dei *transmons* sia infinita, i loro stati eccitati superiori al primo risultano inaccessibili quindi rimangono esclusi dalla trattazione. In conclusione, quindi, lo spazio di Hilbert sul quale si conduce questa analisi è \mathcal{H}_1 il quale è legato a \mathcal{H} e \mathcal{H}_0 dalla seguente relazione: $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$.

Mentre la seconda ipotesi serve solo a semplificare la trattazione, la terza risulta essenziale per l'ambito in cui si vuole utilizzare questo sistema, ossia per realizzare la porta logica quantistica CNOT. Per questa specifica applicazione, infatti, si necessita di un sistema a due livelli e, ipotizzando che δ_j sia infinita, si realizza un sistema in cui solo lo stato fondamentale e il primo stato eccitato risultano accessibili, ossia proprio un sistema a due livelli.

A partire dall'hamiltoniano \hat{H}_{R_1} avente la seguente espressione

$$\hat{H}_{R_1} = \sum_{j=1}^2 \left[\Delta_{jr} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \frac{\delta_j}{2} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j - \mathbb{1}) \right] + \sum_{j=1}^2 g_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{c} + \hat{b}_j \hat{c}^\dagger)$$

si effettua la trasformazione di Schrieffer-Wolff la quale consiste nell'effettuare una trasformazione unitaria finalizzata all'eliminazione adiabatica dei livelli energetici superiori al primo trattando perturbativamente i termini di interazione \hat{H}_{T_1-r} , \hat{H}_{T_2-r} di ciascun *transmons* con il campo elettromagnetico quantizzato

$$\hat{H}_{T_1F} + \hat{H}_{T_2F} = \sum_{j=1}^2 g_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{c} + \hat{b}_j \hat{c}^\dagger)$$

Per tale scopo si definiscono le seguenti quantità:

$$\hat{H}_0 = \sum_{j=1}^2 \left[\Delta_{jr} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \frac{\delta_j}{2} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j - \mathbb{1}) \right]$$

$$\lambda \hat{U} = \hat{H}_{T_1F} + \hat{H}_{T_2F} = \sum_{j=1}^2 g_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{c} + \hat{b}_j \hat{c}^\dagger)$$

dove \hat{H}_0 è l'hamiltoniano che descrive i *transmons* liberi mentre $\lambda \hat{U}$ descrive l'interazione di ciascun *transmon* con il campo elettromagnetico.

In base alla terza ipotesi, l'hamiltoniano \hat{H}_0 assume la seguente forma

$$\hat{H}_0 = \sum_{j=1}^2 \Delta_{jr} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j$$

Metodo 1

Si consideri il seguente operatore di proiezione

$$\hat{P}_0 = |1_1, 0_2, 0_F\rangle \langle 1_1, 0_2, 0_F| + |0_1, 1_2, 0_F\rangle \langle 0_1, 1_2, 0_F|$$

il quale proietta lo stato al quale viene applicato nel sottospazio \mathcal{H}_0 e l'hamiltoniano perturbativo

$$\lambda \hat{U} = \sum_{j=1}^2 g_j \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{c} + \hat{b}_j \hat{c}^\dagger \right)$$

per calcolare l'hamiltoniano effettivo si utilizza la teoria delle perturbazioni; l'espressione generale della correzione al secondo ordine dell'energia dello stato fondamentale $|0\rangle$ di un sistema fisico è la seguente

$$\begin{aligned} \Delta E_0 &= \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle 0 | \lambda \hat{U} | n \rangle|^2}{E_0 - E_n} \\ &= - \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle 0 | \lambda \hat{U} | n \rangle|^2}{E_n - E_0} \\ &= - \sum_{n \neq 0} \frac{\langle 0 | \lambda \hat{U} | n \rangle \langle n | \lambda \hat{U} | 0 \rangle}{E_n - E_0} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

In analogia a questa formula, si definisce l'operatore $\Delta \hat{H}_0$ il quale rappresenta la correzione all'hamiltoniano \hat{H}_0 dovuta all'interazione descritta dall'hamiltoniano \hat{H}_1 la quale, però, in base alle ipotesi effettuate, interessa solamente gli stati $|1_1, 0_2, 0_F\rangle, |0_1, 1_2, 0_F\rangle$

$$\Delta \hat{H}_0 = - \sum_{n \neq 0} \frac{\hat{P}_0(\lambda \hat{U}) \hat{P}_n(\lambda \hat{U}) \hat{P}_0}{E_n - E_0} \quad (\text{B.24})$$

Dato che l'anarmonicità dei *transmons* è infinita, solo il loro stato fondamentale e il primo stato eccitato sono accessibili quindi l'unico operatore di proiezione incluso nella sommatoria è il seguente

$$\hat{P}_1 = |0_1, 0_2, 1_F\rangle \langle 0_1, 0_2, 1_F|$$

quindi l'equazione (B.24) diventa

$$\Delta\hat{H}_0 = -\frac{\hat{P}_0(\lambda\hat{U})\hat{P}_1(\lambda\hat{U})\hat{P}_0}{E_1 - E_0} \quad (\text{B.25})$$

Poichè gli stati iniziali possibili sono due $|1_1, 0_2, 0_F\rangle$, $|0_1, 1_2, 0_F\rangle$ e, a partire da ognuno di essi, è possibile descrivere processi al secondo ordine equivalenti, il denominatore dell'equazione (B.25) assume la seguente forma

$$\frac{1}{E_1 - E_0} = \frac{1}{E_1 - \Delta_{1r}} + \frac{1}{E_1 - \Delta_{2r}}$$

per tale ragione l'equazione (B.25) diventa

$$\begin{aligned} \Delta\hat{H}_0 &= -\hat{P}_0(\lambda\hat{U})\hat{P}_1(\lambda\hat{U})\hat{P}_0 \left(\frac{1}{E_1 - \Delta_{1r}} + \frac{1}{E_1 - \Delta_{2r}} \right) \\ &= \hat{P}_0(\lambda\hat{U})\hat{P}_1(\lambda\hat{U})\hat{P}_0 \left(\frac{1}{\Delta_{1r} - E_1} + \frac{1}{\Delta_{2r} - E_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

La quantità E_1 è l'energia dello stato $|0_1, 0_2, 1_F\rangle$ ed è uguale, a meno di un fattore $\hbar = 1$, a ω_r , $E_1 = \omega_r$, però, dato che si ci è posti nel sistema di riferimento che ruota con la stessa frequenza ω_r del fotone, questo appare fermo, quindi la sua energia è nulla $E_1 = 0$; in base all'osservazione appena effettuata, l'equazione (B.26) diventa

$$\Delta\hat{H}_0 = \hat{P}_0(\lambda\hat{U})\hat{P}_1(\lambda\hat{U})\hat{P}_0 \left(\frac{1}{\Delta_{1r}} + \frac{1}{\Delta_{2r}} \right) \quad (\text{B.27})$$

Ricordando l'azione degli operatori di creazione e distruzione sugli stati scritti nella base del numero di occupazione

$$\hat{b}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$\hat{b}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

si ottiene che

$$g_1\hat{b}_1^\dagger\hat{c}|1_1, 0_2, 0_F\rangle = g_1\hat{b}_1^\dagger\hat{c}|0_1, 1_2, 0_F\rangle = 0$$

$$g_2\hat{b}_2^\dagger\hat{c}|1_1, 0_2, 0_F\rangle = g_2\hat{b}_2^\dagger\hat{c}|0_1, 1_2, 0_F\rangle = 0$$

per cui

$$\begin{aligned} (\lambda\hat{U})\hat{P}_0 &= g_1\hat{b}_1\hat{c}^\dagger|1_1, 0_2, 0_F\rangle\langle 1_1, 0_2, 0_F| + \\ &\quad + g_2\hat{b}_2\hat{c}^\dagger|0_1, 1_2, 0_F\rangle\langle 0_1, 1_2, 0_F| \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

in modo analogo si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{P}_0(\lambda\hat{U}) &= |1_1, 0_2, 0_F\rangle\langle 1_1, 0_2, 0_F|g_1\hat{b}_1^\dagger\hat{c} + \\ &\quad + |0_1, 1_2, 0_F\rangle\langle 0_1, 1_2, 0_F|g_2\hat{b}_2^\dagger\hat{c} \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

utilizzando le (B.28), (B.29) e l'espressione esplicita dell'operatore \hat{P}_1 , l'equazione (B.27) diventa

$$\begin{aligned} \Delta\hat{H}_0 = & \left(|1_1, 0_2, 0_F\rangle \langle 1_1, 0_2, 0_F| g_1 \hat{b}_1^\dagger \hat{c} + |0_1, 1_2, 0_F\rangle \langle 0_1, 1_2, 0_F| g_2 \hat{b}_2^\dagger \right) \cdot \\ & \cdot |0_1, 0_2, 1_F\rangle \langle 0_1, 0_2, 1_F| \left(\frac{1}{\Delta_{1r}} + \frac{1}{\Delta_{2r}} \right) \cdot \\ & \cdot \left(g_1 \hat{b}_1 \hat{c}^\dagger |1_1, 0_2, 0_F\rangle \langle 1_1, 0_2, 0_F| + g_2 \hat{b}_2 \hat{c}^\dagger |0_1, 1_2, 0_F\rangle \langle 0_1, 1_2, 0_F| \right) \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

inoltre, considerando che

$$\Delta_{1r} = \omega_1 - \omega_r$$

$$\Delta_{2r} = \omega_2 - \omega_r$$

l'equazione precedente diventa

$$\begin{aligned} \Delta\hat{H}_0 = & \left(|1_1, 0_2, 0_F\rangle \langle 1_1, 0_2, 0_F| g_1 \hat{b}_1^\dagger \hat{c} + |0_1, 1_2, 0_F\rangle \langle 0_1, 1_2, 0_F| g_2 \hat{b}_2^\dagger \hat{c} \right) \cdot \\ & \cdot |0_1, 0_2, 1_F\rangle \langle 0_1, 0_2, 1_F| \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega_r} + \frac{1}{\omega_2 - \omega_r} \right) \cdot \\ & \cdot \left(g_1 \hat{b}_1 \hat{c}^\dagger |1_1, 0_2, 0_F\rangle \langle 1_1, 0_2, 0_F| + g_2 \hat{b}_2 \hat{c}^\dagger |0_1, 1_2, 0_F\rangle \langle 0_1, 1_2, 0_F| \right) \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Svolgendo i prodotti al secondo membro dell'equazione (B.31) e tenendo presente che

$$\langle 1_1, 0_2, 0_F | \hat{b}_1^\dagger \hat{c} | 0_1, 0_2, 1_F \rangle = 1$$

$$\langle 0_1, 1_2, 0_F | \hat{b}_2^\dagger \hat{c} | 0_1, 1_2, 0_F \rangle = 1$$

$$\langle 0_1, 0_2, 1_F | \hat{b}_1 \hat{c}^\dagger | 1_1, 0_2, 0_F \rangle = 1$$

$$\langle 0_1, 0_2, 1_F | \hat{b}_2 \hat{c}^\dagger | 0_1, 0_2, 1_F \rangle = 1$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta\hat{H}_0 = & g_1^2 \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega_r} + \frac{1}{\omega_2 - \omega_r} \right) |1_1, 0_2, 0_F\rangle \langle 1_1, 0_2, 0_F| + \\ & g_2^2 \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega_r} + \frac{1}{\omega_2 - \omega_r} \right) |0_1, 1_2, 0_F\rangle \langle 0_1, 1_2, 0_F| + \\ & g_1 g_2 \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega_r} + \frac{1}{\omega_2 - \omega_r} \right) |1_1, 0_2, 0_F\rangle \langle 0_1, 1_2, 0_F| + \\ & g_1 g_2 \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega_r} + \frac{1}{\omega_2 - \omega_r} \right) |0_1, 1_2, 0_F\rangle \langle 1_1, 0_2, 0_F| \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

i proiettori al secondo membro possono essere riscritti nel seguente modo

$$\begin{aligned}
 \Delta\hat{H}_0 &= g_1^2 \left(\frac{1}{\omega_r - \omega_1} + \frac{1}{\omega_r - \omega_2} \right) \hat{b}_1^\dagger |0_1, 0_2, 0_F\rangle \langle 0_1, 0_2, 0_F| \hat{b}_1 + \\
 &+ g_2^2 \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega_r} + \frac{1}{\omega_2 - \omega_r} \right) \hat{b}_2^\dagger |0_1, 0_2, 0_F\rangle \langle 0_1, 0_2, 0_F| \hat{b}_2 + \\
 &+ g_1 g_2 \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega_r} + \frac{1}{\omega_2 - \omega_r} \right) \hat{b}_1^\dagger |0_1, 0_2, 0_F\rangle \langle 0_1, 0_2, 0_F| \hat{b}_2 + \\
 &+ g_1 g_2 \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega_r} + \frac{1}{\omega_2 - \omega_r} \right) \hat{b}_2^\dagger |0_1, 0_2, 0_F\rangle \langle 0_1, 0_2, 0_F| \hat{b}_1
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

L'espressione definitiva di $\Delta\hat{H}_0$ è la seguente:

$$\begin{aligned}
 \Delta\hat{H}_0 &= A \hat{b}_1^\dagger |0_1, 0_2, 0_F\rangle \langle 0_1, 0_2, 0_F| \hat{b}_1 + \\
 &+ B \hat{b}_2^\dagger |0_1, 0_2, 0_F\rangle \langle 0_1, 0_2, 0_F| \hat{b}_2 + \\
 &+ J \left(\hat{b}_1^\dagger |0_1, 0_2, 0_F\rangle \langle 0_1, 0_2, 0_F| \hat{b}_2 + \right. \\
 &\left. + \hat{b}_2^\dagger |0_1, 0_2, 0_F\rangle \langle 0_1, 0_2, 0_F| \hat{b}_1 \right)
 \end{aligned} \tag{B.34}$$

dove

$$\begin{aligned}
 A &= g_1^2 \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega_r} + \frac{1}{\omega_2 - \omega_r} \right) = g_1^2 \frac{\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_r}{(\omega_1 - \omega_r)(\omega_2 - \omega_r)} \\
 B &= g_2^2 \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega_r} + \frac{1}{\omega_2 - \omega_r} \right) = g_2^2 \frac{\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_r}{(\omega_1 - \omega_r)(\omega_2 - \omega_r)} \\
 J &= g_1 g_2 \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega_r} + \frac{1}{\omega_2 - \omega_r} \right) = g_1 g_2 \frac{\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_r}{(\omega_1 - \omega_r)(\omega_2 - \omega_r)}
 \end{aligned}$$

L'hamiltoniano effettivo assume la seguente forma

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{SW} &= \hat{H}_0 + \Delta\hat{H}_0 \\
 &= \sum_{j=1}^2 \Delta_{jr} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + A \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + B \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + J \left(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \right) \\
 &= (\Delta_{1r} + A) \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + (\Delta_{2r} + B) \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + J \left(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \right)
 \end{aligned} \tag{B.35}$$

definendo le seguenti quantità

$$\tilde{\omega}_1 = \Delta_{1r} + A$$

$$\tilde{\omega}_2 = \Delta_{2r} + B$$

le quali rappresentano le frequenze dei *transmons* rinormalizzate dall'aver integrato i gradi di libertà fotonici, si ottiene la seguente espressione finale

per \hat{H}_{SW}

$$\begin{aligned}\hat{H}_{SW} &= \tilde{\omega}_1 \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \tilde{\omega}_2 \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + J \left(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \right) \\ &= \sum_{j=1}^2 \tilde{\omega}_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + J \left(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \right)\end{aligned}\quad (\text{B.36})$$

Metodo 2

Questo secondo metodo per effettuare la trasformazione di Schrieffer-Wolff segue ripercorre i passaggi contenuti nella referenza [11].

In base alla terza ipotesi, lo spettro energetico dell'hamiltoniano \hat{H}_0 risulta essere suddiviso in due varietà $\mathcal{E}_1^{(0)}$, $\mathcal{E}_2^{(0)}$ dove la prima comprende lo stato fondamentale e il primo stato eccitato mentre la seconda comprende tutti gli stati eccitati a partire dal secondo.

La distanza tra due livelli energetici appartenenti ad una stessa varietà è molto minore della distanza tra due livelli appartenenti a varietà differenti

$$|E_{j,\alpha} - E_{k,\alpha}| \ll |E_{j,\alpha} - E_{k,\beta}| \quad \text{con } \alpha \neq \beta \quad (\text{B.37})$$

dove j, k sono gli indici dei livelli energetici mentre $\alpha, \beta = 1, 2$ individuano la varietà.

Si consideri l'hamiltoniano completo del sistema

$$\hat{H}_{R_1} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{U}$$

se λ è sufficientemente piccolo, dato che vale la disuguaglianza (B.37), si ha che

$$\left| \langle j, \alpha | \lambda \hat{U} | k, \beta \rangle \right| \ll |E_{j,\alpha} - E_{k,\beta}| \quad (\text{B.38})$$

quindi il potenziale perturbativo non è in grado di indurre transizioni tra due livelli energetici appartenenti a varietà differenti, di conseguenza i livelli energetici di \hat{H}_{R_1} risultano anch'essi raggruppati nelle varietà \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 .

A questo punto, sulla base delle precedenti premesse, bisogna effettuare una trasformazione unitaria finalizzata ad ottenere un hamiltoniano effettivo \hat{H}_{SW} che integri i gradi di libertà relativi ai livelli energetici superiori al primo livello eccitato, cioè i livelli energetici appartenenti alla varietà \mathcal{E}_2 . L'hamiltoniano effettivo \hat{H}_{SW} deve godere delle seguenti proprietà:

- deve essere un operatore autoaggiunto, $\hat{H}_{SW} = \hat{H}_{SW}^\dagger$;
- i suoi autovalori devono essere gli stessi di quelli di \hat{H}_{R_1} e con la stessa degenerazione;
- tutti i suoi elementi di matrice calcolati tra stati appartenenti alle varietà $\mathcal{E}_1^{(0)}$, $\mathcal{E}_2^{(0)}$ di \hat{H}_{R_1} devono essere nulli:

$$\hat{P}_\alpha^{(0)} \hat{H}_{SW} \hat{P}_\beta^{(0)} = 0 \quad \text{con } \alpha \neq \beta \quad (\text{B.39})$$

dove $\hat{P}_\alpha^{(0)}, \hat{P}_\beta^{(0)}$ sono operatori di proiezione sugli autostati relativi agli autovalori $E_{j,\alpha}, E_{k,\beta}$.

Sia \hat{S} un operatore autoaggiunto, $\hat{S} = \hat{S}^\dagger$, a partire da esso si definisce un operatore unitario \hat{T} avente la seguente espressione

$$\hat{T} = e^{i\hat{S}} \quad (\text{B.40})$$

$$\hat{T}^\dagger = e^{-i\hat{S}^\dagger} = e^{-i\hat{S}} = \hat{T}^{-1}$$

le prime due proprietà sono certamente soddisfatte se \hat{H}_{R_1} e \hat{H}_{SW} sono legate dalla seguente trasformazione unitaria

$$\hat{H}_{SW} = \hat{T}\hat{H}_{R_1}\hat{T}^\dagger = e^{i\hat{S}}\hat{H}_{R_1}e^{-i\hat{S}} \quad (\text{B.41})$$

La condizione (B.39) e la trasformazione (B.40) non sono, però, sufficienti a determinare in modo univoco l'operatore \hat{T} perché questo può essere ridefinito nel modo seguente

$$\hat{T} \longrightarrow \hat{U}\hat{T}$$

dove \hat{U} è anch'esso un operatore unitario, e si ottiene comunque un hamiltoniano effettivo che soddisfa le precedenti condizioni; per rimuovere questa ambiguità bisogna, quindi, imporre la seguente condizione aggiuntiva

$$\hat{P}_\alpha^{(0)}\hat{S}\hat{P}_\alpha^{(0)} = 0$$

la quale è valida per qualunque varietà individuata dall'indice α .

L'operatore \hat{S} può essere sviluppato in serie di potenze

$$\hat{S} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \hat{S}_n = \lambda \hat{S}_1 + \lambda^2 \hat{S}_2 + \dots + \lambda^n \hat{S}_n \quad (\text{B.42})$$

in questo modo, utilizzando lo sviluppo in serie di potenze degli esponenziali che compaiono in essa

$$e^{i\hat{S}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (i\hat{S})^n = \mathbb{1} + i\hat{S} + \frac{1}{2} (i\hat{S})^2 + \dots$$

e arrestando il precedente sviluppo al secondo ordine in \hat{S} , si ottiene la seguente espressione per \hat{H}_{SW}

$$\begin{aligned} \hat{H}_{SW} &\simeq \left[\mathbb{1} + (i\hat{S}) + \frac{1}{2} (i\hat{S})^2 \right] \hat{H}_{R_1} \left[\mathbb{1} - (i\hat{S}) + \frac{1}{2} (-i\hat{S})^2 \right] \\ &\simeq \hat{H}_{R_1} - \hat{H}_{R_1} (i\hat{S}) + \frac{1}{2} \hat{H}_{R_1} (i\hat{S})^2 + (i\hat{S}) \hat{H}_{R_1} + \\ &\quad - (i\hat{S}) \hat{H}_{R_1} (i\hat{S}) + \frac{1}{2} (i\hat{S})^2 \hat{H}_{R_1} \end{aligned}$$

considerando che

$$(i\hat{S}) \hat{H}_{R_1} (i\hat{S}) = \frac{1}{2} (i\hat{S}) \hat{H}_{R_1} (i\hat{S}) + \frac{1}{2} (i\hat{S}) \hat{H}_{R_1} (i\hat{S})$$

si ha

$$\begin{aligned} \hat{H}_{SW} &\simeq \hat{H}_{R_1} + [i\hat{S}, \hat{H}_{R_1}] + \frac{1}{2} \hat{H}_{R_1} (i\hat{S})^2 - \frac{1}{2} (i\hat{S}) \hat{H}_{R_1} (i\hat{S}) + \\ &\quad - \frac{1}{2} (i\hat{S}) \hat{H}_{R_1} (i\hat{S}) + \frac{1}{2} (i\hat{S})^2 \hat{H}_{R_1} \\ &\simeq \hat{H}_{R_1} + [i\hat{S}, \hat{H}_{R_1}] - \frac{1}{2} \left\{ (i\hat{S}) \hat{H}_{R_1} - \hat{H}_{R_1} (i\hat{S}) \right\} (i\hat{S}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (i\hat{S}) \left\{ (i\hat{S}) \hat{H}_{R_1} - \hat{H}_{R_1} (i\hat{S}) \right\} \\ &\simeq \hat{H}_{R_1} + [i\hat{S}, \hat{H}_{R_1}] - \frac{1}{2} [i\hat{S}, \hat{H}_{R_1}] (i\hat{S}) + \frac{1}{2} (i\hat{S}) [i\hat{S}, \hat{H}_{R_1}] \\ &\approx \hat{H}_{R_1} + [i\hat{S}, \hat{H}_{R_1}] + \frac{1}{2} [i\hat{S}, [i\hat{S}, \hat{H}_{R_1}]] \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

A questo punto bisogna tener presente la (B.42) e, prendendo in considerazione solo i termini fino al secondo ordine in λ , si ottengono le seguenti espressioni per i commutatori contenuti nella precedente equazione

- $[i\hat{S}, \hat{H}_{R_1}] = [i\lambda\hat{S}_1 + i\lambda^2\hat{S}_2, \hat{H}_{R_1}] = [i\lambda\hat{S}_1, \hat{H}_{R_1}] + [i\lambda^2\hat{S}_2, \hat{H}_{R_1}]$
- $[i\hat{S}, [i\hat{S}, \hat{H}_{R_1}]] = [i\lambda\hat{S}_1 + i\lambda^2\hat{S}_2, [i\lambda\hat{S}_1, \hat{H}_{R_1}] + [i\lambda^2\hat{S}_2, \hat{H}_{R_1}]]$
 $\approx [i\lambda\hat{S}_1, [i\lambda\hat{S}_1, \hat{H}_{R_1}]]$

così che l'espressione di \hat{H}_{SW} diventa

$$\hat{H}_{SW} \simeq \hat{H}_{R_1} + [i\lambda\hat{S}_1, \hat{H}_{R_1}] + [i\lambda^2\hat{S}_2, \hat{H}_{R_1}] + \frac{1}{2} [i\lambda\hat{S}_1, [i\lambda\hat{S}_1, \hat{H}_{R_1}]]$$

ricordando la forma esplicita di \hat{H}_{R_1} , $\hat{H}_{R_1} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{U}$, si ha che

$$\begin{aligned} \hat{H}_{SW} &\simeq \hat{H}_0 + \lambda\hat{U} + [i\lambda\hat{S}_1, \hat{H}_0 + \lambda\hat{U}] + [i\lambda^2\hat{S}_2, \hat{H}_0 + \lambda\hat{U}] + \\ &\quad + \frac{1}{2} [i\lambda\hat{S}_1, [i\lambda\hat{S}_1, \hat{H}_0 + \lambda\hat{U}]] \end{aligned}$$

trascurando i termini che contengono potenze di λ superiori alla seconda, si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{H}_{SW} &\simeq \hat{H}_0 + \lambda\hat{U} + [i\lambda\hat{S}_1, \hat{H}_0] + [i\lambda\hat{S}_1, \lambda\hat{U}] + \\ &\quad + [i\lambda^2\hat{S}_2, \hat{H}_0] + \frac{1}{2} [i\lambda\hat{S}_1, [i\lambda\hat{S}_1, \hat{H}_0]] \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

In precedenza, se all'interno dell'equazione (B.41) fossero state direttamente inserite le espressioni

$$\hat{H}_{R_1} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{U}, \quad \hat{S} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \hat{S}_n$$

si sarebbe ottenuta una espressione di questo tipo per l'hamiltoniano effettivo

$$\hat{H}_{SW} = \hat{H}_{SW}^{(0)} + \lambda \hat{H}_{SW}^{(1)} + \lambda^2 \hat{H}_{SW}^{(2)} + \cdots + \lambda^n \hat{H}_{SW}^{(n)} \quad (\text{B.45})$$

Naturalmente le formulazioni contenute nelle equazioni (B.44), (B.45) devono coincidere, quindi, se si considerano i termini al primo ordine in λ di entrambe, questi devono essere uguali

$$\lambda \hat{H}_{SW}^{(1)} = \lambda \hat{U} + [i\lambda \hat{S}_1, \hat{H}_0]$$

calcolando l'elemento di matrice di questi operatori su due generici autostati dell'hamiltoniano imperturbato \hat{H}_0 , si ha

$$\langle j, \alpha | \lambda \hat{H}_{SW}^{(1)} | k, \beta \rangle = \langle j, \alpha | \lambda \hat{U} + [i\lambda \hat{S}_1, \hat{H}_0] | k, \beta \rangle$$

sfruttando la condizione descritta dall'equazione (B.39), si ha che

$$\langle j, \alpha | \lambda \hat{U} + [i\lambda \hat{S}_1, \hat{H}_0] | k, \beta \rangle = 0 \quad (\text{B.46})$$

Dalla precedente equazione si ricava che

$$\begin{aligned} \langle j, \alpha | [i\lambda \hat{S}_1, \hat{H}_0] | k, \beta \rangle &= \langle j, \alpha | (i\lambda \hat{S}_1) \hat{H}_0 - \hat{H}_0 (i\lambda \hat{S}_1) | k, \beta \rangle \\ &= - \langle j, \alpha | \lambda \hat{U} | k, \beta \rangle \end{aligned}$$

facendo agire l'operatore \hat{H}_0 sugli stati $|j, \alpha\rangle, |k, \beta\rangle$ e cambiando il segno ad ambo i membri, si ottiene

$$\langle j, \alpha | i\lambda \hat{S}_1 | k, \beta \rangle (E_{j,\alpha} - E_{k,\beta}) = \langle j, \alpha | \lambda \hat{U} | k, \beta \rangle$$

da questa si ricava l'espressione dell'elemento di matrice per l'operatore $i\lambda \hat{S}_1$

$$\langle j, \alpha | i\lambda \hat{S}_1 | k, \beta \rangle = \begin{cases} \frac{\langle j, \alpha | \lambda \hat{U} | k, \beta \rangle}{E_{j,\alpha} - E_{k,\beta}}, & \text{se } \alpha \neq \beta \\ 0, & \text{se } \alpha = \beta \end{cases} \quad (\text{B.47})$$

dove è stata tenuta presente la condizione $\hat{P}_\alpha^{(0)} \hat{S}_1 \hat{P}_\alpha^{(0)} = 0$.

Una volta ricavata l'espressione esplicita per l'elemento di matrice dell'operatore $i\lambda \hat{S}_1$, si procede al calcolo del secondo termine perturbativo

L'espressione di \hat{H}_{SW} , fino al secondo ordine perturbativo, è la seguente

$$\begin{aligned} \hat{H}_{SW} &\simeq \hat{H}_0 + \lambda \hat{U} + [i\lambda \hat{S}_1, \hat{H}_0] + [i\lambda \hat{S}_1, \lambda \hat{U}] + \\ &+ [i\lambda^2 \hat{S}_2, \hat{H}_0] + \frac{1}{2} [i\lambda \hat{S}_1, [i\lambda \hat{S}_1, \hat{H}_0]] \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

se la si proietta sugli autostati di \hat{H}_0 appartenenti alla α -esima varietà, si ottiene

$$\begin{aligned}
 \langle j, \alpha | \hat{H}_{SW} | k, \alpha \rangle &\simeq \langle j, \alpha | \hat{H}_0 | k, \alpha \rangle + \langle j, \alpha | \lambda \hat{U} | k, \alpha \rangle + \\
 &+ \langle j, \alpha | [i\lambda \hat{S}_1, \hat{H}_0] | k, \alpha \rangle + \\
 &+ \langle j, \alpha | [i\lambda \hat{S}_1, \lambda \hat{U}] | k, \alpha \rangle + \\
 &+ \langle j, \alpha | [i\lambda^2 \hat{S}_2, \hat{H}_0] | k, \alpha \rangle + \\
 &+ \frac{1}{2} \langle j, \alpha | [i\lambda \hat{S}_1, [i\lambda \hat{S}_1, \hat{H}_0]] | k, \alpha \rangle
 \end{aligned} \tag{B.49}$$

L'operatore \hat{H}_0 è, ovviamente, diagonale visto che si è usata una base formata dai suoi autovettori, mentre \hat{S}_1, \hat{S}_2 hanno solo elementi al di fuori della diagonale principale quindi gli operatori $[\hat{S}_1, \hat{H}_0], [\hat{S}_2, \hat{H}_0]$ e quelli che dipendono da quest'ultimi non contribuiscono all'espressione di $\langle j, \alpha | \hat{H}_{SW} | k, \alpha \rangle$ che, invece, è una matrice diagonale.

In base alle osservazioni appena effettuate, si ha che i seguenti elementi di matrice sono nulli

$$\langle j, \alpha | [i\lambda \hat{S}_1, \hat{H}_0] | k, \alpha \rangle = \langle j, \alpha | [i\lambda^2 \hat{S}_2, \hat{H}_0] | k, \alpha \rangle = 0$$

in questo modo, l'equazione (B.49) diventa

$$\begin{aligned}
 \langle j, \alpha | \hat{H}_{SW} | k, \alpha \rangle &\simeq \langle j, \alpha | \hat{H}_0 | k, \alpha \rangle + \langle j, \alpha | \lambda \hat{U} | k, \alpha \rangle + \\
 &+ \langle j, \alpha | [i\lambda \hat{S}_1, \lambda \hat{U}] | k, \alpha \rangle + \\
 &+ \frac{1}{2} \langle j, \alpha | [i\lambda \hat{S}_1, [i\lambda \hat{S}_1, \hat{H}_0]] | k, \alpha \rangle
 \end{aligned} \tag{B.50}$$

L'operatore $\lambda \hat{U}$, rappresentato nella base scelta, presenta sia dei termini diagonali che termini non-diagonali per cui può essere scritto nel seguente modo

$$\lambda \hat{U} = \lambda \hat{U}_D + \lambda \hat{U}_{ND}$$

dato che \hat{S}_1 è un operatore che possiede solo termini al di fuori della diagonale principale, il commutatore $[i\lambda \hat{S}_1, \lambda \hat{U}]$ che compare nell'equazione (B.50) presenta termini diagonali visto che è uguale al prodotto tra due operatori che non presentano termini diagonali

$$\langle j, \alpha | [i\lambda \hat{S}_1, \lambda \hat{U}_D + \lambda \hat{U}_{ND}] | k, \alpha \rangle = \langle j, \alpha | [i\lambda \hat{S}_1, \lambda \hat{U}_{ND}] | k, \alpha \rangle$$

quindi deve comparire nell'espressione di $\langle j, \alpha | \hat{H}_{SW} | k, \alpha \rangle$.

Bisogna, ora, analizzare l'operatore $[i\lambda \hat{S}_1, [i\lambda \hat{S}_1, \hat{H}_0]]$ tenendo presente che

$[i\lambda\hat{S}_1, \hat{H}_0]$ non presenta termini diagonali dato che il prodotto tra l'operatore diagonale \hat{H}_0 e l'operatore \hat{S}_1 che non ha termini sulla diagonale principale è uguale ad un operatore che non presenta termini diagonali quindi l'espressione (B.46) precedentemente ottenuta diventa

$$[i\lambda\hat{S}_1, \hat{H}_0] = -\lambda\hat{U} = -\lambda\hat{U}_{ND}$$

per cui si ottiene che

$$[i\lambda\hat{S}_1, [i\lambda\hat{S}_1, \hat{H}_0]] = -[i\lambda\hat{S}_1, \lambda\hat{U}_{ND}]$$

il quale è un operatore che, se proiettato nella base scelta, presenta degli elementi sulla diagonale principale.

L'equazione (B.50), in base alle considerazioni effettuate, diventa

$$\begin{aligned} \langle j, \alpha | \hat{H}_{SW} | k, \alpha \rangle &\simeq \langle j, \alpha | \hat{H}_0 | k, \alpha \rangle + \langle j, \alpha | \lambda\hat{U}_{ND} | k, \alpha \rangle + \\ &+ \langle j, \alpha | [i\lambda\hat{S}_1, \lambda\hat{U}_{ND}] | k, \alpha \rangle + \\ &- \frac{1}{2} \langle j, \alpha | [i\lambda\hat{S}_1, \lambda\hat{U}_{ND}] | k, \alpha \rangle \quad (B.51) \\ &= \langle j, \alpha | \hat{H}_0 | k, \alpha \rangle + \langle j, \alpha | \lambda\hat{U}_{ND} | k, \alpha \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \langle j, \alpha | [i\lambda\hat{S}_1, \lambda\hat{U}_{ND}] | k, \alpha \rangle \end{aligned}$$

l'ultimo termine deve, però, essere esplicitato:

$$\begin{aligned} \langle j, \alpha | [i\lambda\hat{S}_1, \lambda\hat{U}_{ND}] | k, \alpha \rangle &= \langle j, \alpha | (i\lambda\hat{S}_1) \lambda\hat{U}_{ND} | k, \alpha \rangle + \\ &- \langle j, \alpha | \lambda\hat{U}_{ND} (i\lambda\hat{S}_1) | k, \alpha \rangle \end{aligned}$$

introducendo la relazione di completezza $\sum_{l, \gamma \neq \alpha} |l, \gamma\rangle \langle l, \gamma| = \mathbb{1}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \langle j, \alpha | [i\lambda\hat{S}_1, \lambda\hat{U}_{ND}] | k, \alpha \rangle &= \sum_{l, \gamma \neq \alpha} \langle j, \alpha | (i\lambda\hat{S}_1) | l, \gamma \rangle \langle l, \gamma | \lambda\hat{U}_{ND} | k, \alpha \rangle + \\ &- \sum_{l, \gamma \neq \alpha} \langle j, \alpha | \lambda\hat{U}_{ND} | l, \gamma \rangle \langle l, \gamma | (i\lambda\hat{S}_1) | k, \alpha \rangle \end{aligned}$$

ricordando l'equazione (B.47), l'espressione precedente diventa

$$\begin{aligned}
 \langle j, \alpha | [i\lambda\hat{S}_1, \lambda\hat{U}_{ND}] | k, \alpha \rangle &= \sum_{l, \gamma \neq \alpha} \frac{\langle j, \alpha | \lambda\hat{U}_{ND} | l, \gamma \rangle}{E_{j, \alpha} - E_{l, \gamma}} \langle l, \gamma | \lambda\hat{U}_{ND} | k, \alpha \rangle + \\
 &- \sum_{j, \gamma \neq \alpha} \langle j, \alpha | \lambda\hat{U}_{ND} | l, \gamma \rangle \frac{\langle l, \gamma | \hat{U}_{ND} | k, \alpha \rangle}{E_{l, \gamma} - E_{k, \alpha}} \\
 &= \sum_{l, \gamma \neq \alpha} \langle j, \alpha | \lambda\hat{U}_{ND} | l, \gamma \rangle \langle l, \gamma | \lambda\hat{U}_{ND} | k, \alpha \rangle \cdot \\
 &\cdot \left(\frac{1}{E_{j, \alpha} - E_{l, \gamma}} - \frac{1}{E_{l, \gamma} - E_{k, \alpha}} \right)
 \end{aligned}$$

In definitiva, l'equazione (B.51) assume la seguente forma

$$\begin{aligned}
 \langle j, \alpha | \hat{H}_{SW} | k, \alpha \rangle &\simeq \langle j, \alpha | \hat{H}_0 | k, \alpha \rangle + \langle j, \alpha | \lambda\hat{U}_{ND} | k, \alpha \rangle + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{l, \gamma \neq \alpha} \langle j, \alpha | \lambda\hat{U}_{ND} | l, \gamma \rangle \langle l, \gamma | \lambda\hat{U}_{ND} | k, \alpha \rangle \cdot \\
 &\cdot \left(\frac{1}{E_{j, \alpha} - E_{l, \gamma}} + \frac{1}{E_{k, \alpha} - E_{l, \gamma}} \right)
 \end{aligned} \tag{B.52}$$

Ora si deve applicare la relazione precedente al caso in esame.

In questa circostanza si ha che

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_0 &= \sum_{j=1}^2 \Delta_{jr} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j \\
 \lambda\hat{U} &= \sum_{j=1}^2 g_j \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{c} + \hat{b}_j \hat{c}^\dagger \right)
 \end{aligned}$$

e la varietà $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}_1$ contiene i valori dell'energia corrispondenti agli stati $|1_1, 0_2, 0_F\rangle$, $|0_1, 1_2, 0_F\rangle$ contenuti nel sottospazio di Hilbert \mathcal{H} .

Utilizzando queste espressioni, si ha:

1. ordine zero

$$\begin{aligned}
 &(\langle 1_1, 0_2, 0_F | + \langle 0_1, 1_2, 0_F |) \hat{H}_0 (|1_1, 0_2, 0_F\rangle + |0_1, 1_2, 0_F\rangle) = \\
 &= \langle 1_1, 0_2, 0_F | \Delta_{1r} \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 |1_1, 0_2, 0_F\rangle + \langle 0_1, 1_2, 0_F | \Delta_{2r} \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 |0_1, 1_2, 0_F\rangle
 \end{aligned}$$

2. primo ordine perturbativo

$$(\langle 1_1, 0_2, 0_F | + \langle 0_1, 1_2, 0_F |) \lambda\hat{U} (|1_1, 0_2, 0_F\rangle + |0_1, 1_2, 0_F\rangle) = 0$$

Per quanto riguarda il secondo ordine perturbativo, invece, bisogna considerare che $|l, \gamma\rangle = |0_1, 0_2, 1_F\rangle$ e $E_{l, \gamma} = \omega_r = 0$ dato che si sta operando nel sistema di riferimento che ruota con la stessa frequenza dei fotoni per cui questi appaiono fermi, ossia con energia nulla quindi, al variare di j, k , si possono avere le seguenti combinazioni di stati

- $|j, \alpha\rangle = |k, \alpha\rangle = |1_1, 0_2, 0_F\rangle$
 $\frac{1}{2} \langle 1_1, 0_2, 0_F | g_1 \hat{b}_1^\dagger \hat{c} | 0_1, 0_2, 1_F \rangle \langle 0_1, 0_2, 1_F | g_1 \hat{b}_1 \hat{c}^\dagger | 1_1, 0_2, 0_F \rangle 2 \frac{1}{\Delta_{1r}}$
- $|j, \alpha\rangle = |k, \alpha\rangle = |0_1, 1_2, 0_F\rangle$
 $\frac{1}{2} \langle 0_1, 1_2, 0_F | g_2 \hat{b}_2^\dagger \hat{c} | 0_1, 0_2, 1_F \rangle \langle 0_1, 0_2, 1_F | g_2 \hat{b}_2 \hat{c}^\dagger | 0_1, 1_2, 0_F \rangle 2 \frac{1}{\Delta_{2r}}$
- $|j, \alpha\rangle = |1_1, 0_2, 0_F\rangle, |k, \alpha\rangle = |0_1, 1_2, 0_F\rangle$
 $\frac{1}{2} \langle 1_1, 0_2, 0_F | g_1 \hat{b}_1^\dagger \hat{c} | 0_1, 0_2, 1_F \rangle \langle 0_1, 0_2, 1_F | g_2 \hat{b}_2 \hat{c}^\dagger | 0_1, 1_2, 0_F \rangle \left(\frac{1}{\Delta_{1r}} + \frac{1}{\Delta_{2r}} \right)$
- $|j, \alpha\rangle = |0_1, 1_2, 0_F\rangle, |k, \alpha\rangle = |1_1, 0_2, 0_F\rangle$
 $\frac{1}{2} \langle 0_1, 1_2, 0_F | g_2 \hat{b}_2^\dagger \hat{c} | 0_1, 0_2, 1_F \rangle \langle 0_1, 0_2, 1_F | g_1 \hat{b}_1 \hat{c}^\dagger | 1_1, 0_2, 0_F \rangle \left(\frac{1}{\Delta_{1r}} + \frac{1}{\Delta_{2r}} \right)$

quindi

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{l, \gamma \neq \alpha} \langle j, \alpha | \lambda \hat{U}_{ND} | l, \gamma \rangle \langle l, \gamma | \lambda \hat{U}_{ND} | k, \alpha \rangle \cdot \left(\frac{1}{E_{j, \alpha} - E_{l, \gamma}} + \frac{1}{E_{k, \alpha} - E_{l, \gamma}} \right) = \\
& = \frac{1}{2} \langle j, \alpha | \lambda \hat{U}_{ND} | 0_1, 0_2, 1_F \rangle \langle 0_1, 0_2, 1_F | \lambda \hat{U}_{ND} | k, \alpha \rangle \left(\frac{1}{E_{j, \alpha}} + \frac{1}{E_{k, \alpha}} \right) = \\
& = \langle 1_1, 0_2, 0_F | g_1 \hat{b}_1^\dagger \hat{c} | 0_1, 0_2, 1_F \rangle \langle 0_1, 0_2, 1_F | g_1 \hat{b}_1 \hat{c}^\dagger | 1_1, 0_2, 0_F \rangle \frac{1}{\Delta_{1r}} + \\
& + \langle 0_1, 1_2, 0_F | g_2 \hat{b}_2^\dagger \hat{c} | 0_1, 0_2, 1_F \rangle \langle 0_1, 0_2, 1_F | g_2 \hat{b}_2 \hat{c}^\dagger | 0_1, 1_2, 0_F \rangle \frac{1}{\Delta_{2r}} + \\
& + \frac{1}{2} \langle 1_1, 0_2, 0_F | g_1 \hat{b}_1^\dagger \hat{c} | 0_1, 0_2, 1_F \rangle \langle 0_1, 0_2, 1_F | g_2 \hat{b}_2 \hat{c}^\dagger | 0_1, 1_2, 0_F \rangle \left(\frac{1}{\Delta_{1r}} + \frac{1}{\Delta_{2r}} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \langle 0_1, 1_2, 0_F | g_2 \hat{b}_2^\dagger \hat{c} | 0_1, 0_2, 1_F \rangle \langle 0_1, 0_2, 1_F | g_1 \hat{b}_1 \hat{c}^\dagger | 1_1, 0_2, 0_F \rangle \left(\frac{1}{\Delta_{1r}} + \frac{1}{\Delta_{2r}} \right)
\end{aligned}$$

In conclusione si ha che

$$\begin{aligned}
& (\langle 1_1, 0_2, 0_F | + \langle 0_1, 1_2, 0_F |) \hat{H}_{SW} (|1_1, 0_2, 0_F\rangle + |0_1, 1_2, 0_F\rangle) \simeq \\
& = \Delta_{1r} \langle 1_1, 0_2, 0_F | \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 | 1_1, 0_2, 0_F \rangle + \Delta_{2r} \langle 0_1, 1_2, 0_F | \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 | 0_1, 1_2, 0_F \rangle + \\
& + g_1^2 \frac{1}{\Delta_{1r}} \langle 1_1, 0_2, 0_F | \hat{b}_1^\dagger | 0_1, 0_2, 0_F \rangle \langle 0_1, 0_2, 0_F | \hat{b}_1 | 1_1, 0_2, 0_F \rangle + \\
& + g_2^2 \frac{1}{\Delta_{2r}} \langle 0_1, 1_2, 0_F | \hat{b}_2^\dagger | 0_1, 0_2, 0_F \rangle \langle 0_1, 0_2, 0_F | \hat{b}_2 | 0_1, 1_2, 0_F \rangle +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2}g_1g_2 \left(\frac{1}{\Delta_{1r}} + \frac{1}{\Delta_{2r}} \right) \left(\langle 1_1, 0_2, 0_F | \hat{b}_1^\dagger | 0_1, 0_2, 0_F \rangle \langle 0_1, 0_2, 0_F | \hat{b}_2 | 0_1, 1_2, 0_F \rangle + \right. \\
 & \left. + \langle 0_1, 1_2, 0_F | \hat{b}_2^\dagger | 0_1, 0_2, 0_F \rangle \langle 0_1, 0_2, 0_F | \hat{b}_1 | 1_1, 0_2, 0_F \rangle \right)
 \end{aligned}$$

per cui l'hamiltoniano effettivo del sistema è

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{SW} & \simeq \Delta_{1r} \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \Delta_{2r} \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + g_1^2 \frac{1}{\Delta_{1r}} \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + g_2^2 \frac{1}{\Delta_{2r}} \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \\
 & + g_1g_2 \frac{\Delta_{1r} + \Delta_{2r}}{2\Delta_{1r}\Delta_{2r}} \left(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \right) \\
 & = \left(\Delta_{1r} + g_1^2 \frac{1}{\Delta_{1r}} \right) \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \left(\Delta_{2r} + g_2^2 \frac{1}{\Delta_{2r}} \right) \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \\
 & + g_1g_2 \frac{\Delta_{1r} + \Delta_{2r}}{2\Delta_{1r}\Delta_{2r}} \left(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \right)
 \end{aligned} \tag{B.53}$$

si definiscono le frequenze dei *transmons* rinormalizzate

$$\tilde{\omega}_j = \Delta_{jr} + g_j^2 \frac{1}{\Delta_{jr}}$$

e l'energia di interazione effettiva *transmon-transmon*

$$J = g_1g_2 \frac{\Delta_{1r} + \Delta_{2r}}{2\Delta_{1r}\Delta_{2r}} = g_1g_2 \frac{\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_r}{2(\omega_1 - \omega_r)(\omega_2 - \omega_r)}$$

così che \hat{H}_{SW} assume la seguente forma

$$\hat{H}_{SW} \simeq \sum_{j=1}^2 \tilde{\omega}_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + J \left(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \right) \tag{B.54}$$

B.3 Rotazione 2 e RWA

A partire dall'hamiltoniano effettivo dell'equazione (B.54), bisogna costruire l'hamiltoniano che schematizza il circuito reale dato che all'interno di quest'ultimo è presente anche un generatore di tensione. Per questa specifica applicazione, dato che si vuole realizzare una porta CNOT, bisogna collegare al generatore solo il *transmon* T_1 che svolge la funzione di qubit di controllo. L'hamiltoniano che schematizza il generatore è il seguente

$$\hat{H}_d = \Omega(t) \cos(\omega_d t) \left(\hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_1 \right)$$

dove ω_d è la frequenza del segnale proveniente dal generatore, quindi l'hamiltoniano complessivo il seguente

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{Tr} & = \hat{H}_{SW} + \hat{H}_d \\
 & = \sum_{j=1}^2 \tilde{\omega}_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + J \left(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \right) + \Omega(t) \cos(\omega_d t) \left(\hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_1 \right)
 \end{aligned} \tag{B.55}$$

A questo punto si effettua un'altra rotazione e si ci pone in un sistema di riferimento rotante con frequenza $\tilde{\omega}_2$, l'operatore unitario che permette di effettuare questo cambio di sistema di riferimento è il seguente

$$\hat{R}_2 = e^{-i\tilde{\omega}_2 t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2)}$$

l'hamiltoniano complessivo del sistema, in seguito alla rotazione, assume la seguente espressione

$$\hat{H}_{R_2} = \hat{R}_2^\dagger \hat{H}_{Tr} \hat{R}_2 - i\hat{R}_2^\dagger \frac{d\hat{R}_2}{dt} \quad (\text{B.56})$$

Il primo termine al secondo membro della precedente equazione è uguale a

$$\begin{aligned} \hat{R}_2^\dagger \hat{H}_{Tr} \hat{R}_2 = e^{i\tilde{\omega}_2 t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2)} & \left[\sum_{j=1}^2 \tilde{\omega}_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + J (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger) + \right. \\ & \left. + \Omega(t) \cos(\omega_d t) (\hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_1) \right] \cdot e^{-i\tilde{\omega}_2 t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2)} \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

ricordando le formule (B.14), (B.18), si ha che i primi due addendi della precedente equazione sono uguali a

$$\begin{aligned} e^{i\tilde{\omega}_2 t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2)} & \left[\sum_{j=1}^2 \tilde{\omega}_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + J (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger) \right] e^{-i\tilde{\omega}_2 t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2)} \\ & = \sum_{j=1}^2 \tilde{\omega}_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + J (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger) \end{aligned}$$

mentre l'ultimo addendo

$$e^{i\tilde{\omega}_2 t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2)} \left[\Omega(t) \cos(\omega_d t) (\hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_1) \right] e^{-i\tilde{\omega}_2 t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2)} \quad (\text{B.58})$$

deve essere analizzato separatamente.

In base alla formula di Glauber, se \hat{A} e \hat{B} sono due generici operatori tali che

$$\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B} \right] \right] = \left[\hat{B}, \left[\hat{A}, \hat{B} \right] \right] = 0$$

vale la seguente relazione

$$e^{\hat{A} + \hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]}$$

nel caso dell'operatore $e^{i\tilde{\omega}_2 t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2)}$ e del suo aggiunto, essa può essere applicata poiché gli operatori $\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1$, $\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2$ commutano, $[\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1, \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2] = 0$, quindi

$$\left[\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1, \left[\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1, \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \right] \right] = \left[\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2, \left[\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1, \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \right] \right] = 0$$

Gli esponenziali $e^{i\tilde{\omega}_2 t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2)}$, $e^{-i\tilde{\omega}_2 t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2)}$ possono essere riscritti nel seguente modo

$$\begin{aligned} e^{i\tilde{\omega}_2 t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2)} &= e^{i\tilde{\omega}_2 t \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1} e^{i\tilde{\omega}_2 t \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2} \\ e^{-i\tilde{\omega}_2 t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2)} &= e^{-i\tilde{\omega}_2 t \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1} e^{-i\tilde{\omega}_2 t \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2} \end{aligned}$$

inoltre, tenendo presente che gli operatori \hat{b}_1 , \hat{b}_1^\dagger commutano con $\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2$, l'equazione (B.58) diventa

$$\begin{aligned} e^{i\tilde{\omega}_2 t \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1} \left[\Omega(t) \cos(\omega_d t) (\hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_1) \right] e^{-i\tilde{\omega}_2 t \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1} &= \\ = \Omega(t) \cos(\omega_d t) e^{i\tilde{\omega}_2 t \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1} (\hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_1) e^{-i\tilde{\omega}_2 t \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1} \end{aligned}$$

Utilizzando le equazioni (B.14), (B.18), l'espressione precedente diventa

$$\Omega(t) \cos(\omega_d t) \left(\hat{b}_1^\dagger e^{i\tilde{\omega}_2 t} + \hat{b}_1 e^{-i\tilde{\omega}_2 t} \right) \quad (\text{B.59})$$

si trascura la dipendenza dal tempo dell'ampiezza del segnale in tensione $\Omega(t) = \Omega$, inoltre, dato che si vuole realizzare una *una porta logica di cross-resonance*, bisogna fare in modo che la frequenza ω_d del segnale proveniente dal generatore sia uguale alla frequenza rinormalizzata $\tilde{\omega}_2$ del secondo *transmon*, $\omega_d = \tilde{\omega}_2$

$$\Omega \cos(\omega_2 t) \left(\hat{b}_1^\dagger e^{i\tilde{\omega}_2 t} + \hat{b}_1 e^{-i\tilde{\omega}_2 t} \right) \quad (\text{B.60})$$

riscrivendo il coseno sottoforma di combinazione di esponenziali complessi

$$\cos(\tilde{\omega}_2 t) = \frac{e^{i\tilde{\omega}_2 t} + e^{-i\tilde{\omega}_2 t}}{2}$$

la (B.60) diventa

$$\Omega \frac{e^{i\tilde{\omega}_2 t} + e^{-i\tilde{\omega}_2 t}}{2} \left(\hat{b}_1^\dagger e^{i\tilde{\omega}_2 t} + \hat{b}_1 e^{-i\tilde{\omega}_2 t} \right)$$

svolgendo i prodotti tra gli esponenziali, si ricavano due termini indipendenti dal tempo e due che oscillano ad una frequenza che è il doppio di quella del segnale proveniente dal generatore

$$\frac{\Omega}{2} \left(\hat{b}_1 + \hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_1 e^{-2i\tilde{\omega}_2 t} + \hat{b}_1^\dagger e^{2i\tilde{\omega}_2 t} \right) \quad (\text{B.61})$$

A questo punto si effettua la *rotating-wave approximation* la quale permette di trascurare tutti i termini oscillanti presenti nell'equazione (B.61), così da ottenere

$$\frac{\Omega}{2} \left(\hat{b}_1 + \hat{b}_1^\dagger \right) \quad (\text{B.62})$$

in definitiva, quindi, si ha che l'equazione (B.58) diventa

$$e^{i\tilde{\omega}_2 t(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2)} \left[\Omega(t) \cos(\omega dt) (\hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_1) \right] e^{-i\tilde{\omega}_2 t(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2)} \simeq \frac{\Omega}{2} (\hat{b}_1 + \hat{b}_1^\dagger) \quad (\text{B.63})$$

La (B.57) assume, in conclusione, la seguente forma

$$\hat{R}_2^\dagger \hat{H}_{Tr} \hat{R}_2 \approx \sum_{j=1}^2 \tilde{\omega}_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + J (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger) + \frac{\Omega}{2} (\hat{b}_1 + \hat{b}_1^\dagger) \quad (\text{B.64})$$

Esplicitando il secondo termine al secondo membro della (B.56):

$$\begin{aligned} -i\hat{R}_2^\dagger \frac{d\hat{R}_2}{dt} &= -ie^{i\tilde{\omega}_2 t(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2)} \left[-i\tilde{\omega}_2 t (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2) \right] \cdot \\ &\cdot e^{-i\tilde{\omega}_2 t(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2)} \\ &= -\tilde{\omega}_2 (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2) \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

e utilizzando le (B.64), (B.65), si ottiene che

$$\begin{aligned} \hat{H}_{R_2} &= \hat{R}_2^\dagger \hat{H}_{Tr} \hat{R}_2 - i\hat{R}_2^\dagger \frac{d\hat{R}_2}{dt} \\ &\simeq \sum_{j=1}^2 \tilde{\omega}_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + J (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger) + \\ &+ \frac{\Omega}{2} (\hat{b}_1 + \hat{b}_1^\dagger) - \tilde{\omega}_2 (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2) = \\ &= \tilde{\omega}_1 \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \tilde{\omega}_2 \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + J (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger) + \\ &+ \frac{\Omega}{2} (\hat{b}_1 + \hat{b}_1^\dagger) - \tilde{\omega}_2 (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2) = \\ &= (\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2) \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + J (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger) + \frac{\Omega}{2} (\hat{b}_1 + \hat{b}_1^\dagger) \end{aligned}$$

definendo la quantità $\Delta = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2$, si ottiene l'espressione finale per \hat{H}_{R_2}

$$\hat{H}_{R_2} \simeq \Delta \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + J (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger) + \frac{\Omega}{2} (\hat{b}_1 + \hat{b}_1^\dagger) \quad (\text{B.66})$$

B.4 Diagonalizzazione a blocchi

La rappresentazione dell'hamiltoniano \hat{H}_{R_2} nella base computazionale a due qubit

$$\{|0_1, 0_2\rangle, |0_1, 1_2\rangle, |1_1, 0_2\rangle, |1_1, 1_2\rangle\}$$

è data dalla seguente matrice 4×4

$$H_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\Omega}{2} & 0 \\ 0 & 0 & J & \frac{\Omega}{2} \\ \frac{\Omega}{2} & J & \Delta & 0 \\ 0 & \frac{\Omega}{2} & 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

Visto che l'evoluzione temporale di un qubit, nella base computazionale, è rappresentata da una matrice 2×2 , si suddivide la H_{R_2} in blocchi quadrati aventi dimensione 2.

Si nota che gli elementi dei blocchi non-diagonali sono diversi da zero, ciò indica che questa matrice, se applicata ad un sistema formato da due qubit, genera accoppiamento tra di essi, per evitarlo, bisogna individuare una trasformazione unitaria che permetta di diagonalizzarla a blocchi, in modo tale che gli elementi dei blocchi non-diagonali siano tutti nulli.

Così facendo, sarà possibile riscrivere la matrice diagonale a blocchi ottenuta in seguito alla trasformazione come combinazione lineare di prodotti tensoriali di matrici Pauli

$$H_{BD} = \sum_{j,k} a_{jk} (\sigma_j \otimes \sigma_k)$$

con $j, k = 0, 1, 2, 3$, dove H_{BD} è la matrice a blocchi ottenuta grazie alla trasformazione unitaria appena menzionata, a_{jk} sono dei generici coefficienti della combinazione lineare e σ_j, σ_k sono le matrici di Pauli.

Mentre la trasformazione che permette di diagonalizzare una matrice autoaggiunta è unica, per diagonalizzare a blocchi una matrice hermitiana esistono infinite possibili trasformazioni per cui bisogna stabilire un criterio che permetta di scegliere quella più adeguata.

In questo caso, la trasformazione unitaria descritta dalla matrice T viene scelta utilizzando un criterio di minimo in base al quale la matrice che diagonalizza a blocchi H_{R_2} deve essere quanto più possibile vicina all'identità[26]

$$\|T - \mathbb{1}\| = \text{minimo} \quad (\text{B.67})$$

in modo tale che l'unico effetto che produce su H_{R_2} è quello di diagonalizzarla a blocchi.

La matrice H_{R_2} è certamente hermitiana dato che è la rappresentazione di un operatore autoaggiunto, per cui è diagonalizzabile

$$H_{R_2} = SDS^\dagger \quad (\text{B.68})$$

dove S è la matrice unitaria le cui colonne sono gli autovettori normalizzati di H_{R_2} mentre D è una matrice diagonale. Anche la matrice H_{BD} è hermitiana

perché l'operatore di cui essa è una rappresentazione è un osservabile, quindi è anch'essa diagonalizzabile

$$H_{BD} = F^\dagger D F \quad (\text{B.69})$$

dove F è la matrice unitaria le cui colonne sono gli degli autovettori di H_{BD} . La matrice F , oltre ad essere una unitaria, è anche diagonale a blocchi. Ricavando D dall'equazione (B.68)

$$D = S^\dagger H_{R_2} S$$

e sostituendola nella (B.69), si ottiene

$$H_{BD} = F^\dagger \left(S^\dagger H_{R_2} S \right) F = (SF)^\dagger H_{R_2} (SF) \quad (\text{B.70})$$

definendo $T = SF$, si ricava la seguente espressione

$$H_{BD} = T^\dagger H_{R_2} T \quad (\text{B.71})$$

la quale rappresenta proprio la trasformazione che lega H_{R_2} alla matrice H_{BD} diagonale a blocchi.

Grazie al criterio di minimo menzionato in precedenza, si riesce ad individuare la specifica trasformazione T che soddisfa l'equazione (B.71), infatti, in questo caso, l'espressione esplicita della matrice è la seguente [26]

$$T = S S_{BD}^\dagger \left(S_{BD} S_{BD}^\dagger \right)^{-1/2} \quad (\text{B.72})$$

dove S_{BD} è una matrice diagonale a blocchi avente la seguente forma

$$S_{BD} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} & S_{34} \\ 0 & 0 & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix}$$

Le grandezze S_{jk} , con $j, k = 1, 2, 3, 4$, sono gli elementi della matrice S .

Nel caso in esame, dato che gli elementi della matrice H_{R_2} sono reali, calcolare l'aggiunta delle varie matrici coinvolte equivale a calcolarne la trasposta

$$S^\dagger = S^t, S_{BD}^\dagger = S_{BD}^t \implies T^\dagger = T^t$$

per cui la matrice T risulta essere una matrice ortogonale

$$T^t = T^\dagger = T^{-1}$$

In conclusione, a partire dalla matrice H_{R_2} , effettuando la trasformazione (B.72), si ottiene la matrice H_{BD} diagonale a blocchi avente la seguente forma

$$H_{BD} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Tramite metodi numerici è stato possibile calcolare le componenti di H_{BD} , dopo aver fatto ciò, la matrice a blocchi ottenuta è stata trasformata effettuando un nuovo cambio di riferimento descritto dalla matrice R_2^{-1} , ossia la rappresentazione dell'operatore \hat{R}_2 nella base computazionale a due qubit.

In seguito a quest'ultima trasformazione si è ottenuta la seguente matrice

$$H_{CR} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} & -\frac{J\Omega}{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{J\Omega}{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}} & \Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} & \frac{J\Omega}{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}} \\ 0 & 0 & \frac{J\Omega}{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}} & -\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} \end{pmatrix}$$

la quale, come preannunciato, può essere riscritta in forma operatoriale utilizzando le matrici di Pauli

$$\hat{H}_{CR} = \frac{1}{2} \left(\Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} \right) \hat{\sigma}_z \otimes \mathbb{1} - \left(\frac{J\Omega}{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}} \right) \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x \quad (\text{B.73})$$

Quello ottenuto è l'hamiltoniano del circuito realizzato per l'implementazione della *porta logica di cross-resonance*.

Se l'anarmonicità dei *transmons* fosse finita, nell'espressione di \hat{H}_{CR} comparirebbe un termine proporzionale all'operatore $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$ inoltre, sperimentalmente, è stata constatata anche la presenza di un termine proporzionale a $\mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_y$ il quale si pensa possa derivare dal fatto che gli impulsi a microonde, sebbene vengano inviati solamente sul primo *transmons*, di fatto vanno ad influenzare anche il secondo generando un accoppiamento non voluto tra i due. Per cancellare quest'ultimo termine sono state messe a punto delle apposite procedure [23].

Appendice C

Prodotto scalare Hilbert-Schmidt

Si consideri uno spazio di Hilbert \mathcal{H} di dimensione N , $\dim \mathcal{H} = N$, sui cui vettori agiscono gli operatori lineari $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \dots$, è semplice mostrare che quest'ultimi formano, a loro volta, uno spazio vettoriale V_N di dimensione N^2 , $\dim V_N = N^2$, sul quale è possibile definire il prodotto scalare nel seguente modo

$$\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = \text{tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B}) \quad (\text{C.1})$$

che prende il nome di *prodotto scalare Hilbert-Schmidt* [15].
Esso induce la seguente norma

$$\|\hat{A}\|^2 = \langle \hat{A}, \hat{A} \rangle = \text{tr}(\hat{A}^\dagger \hat{A}) \quad (\text{C.2})$$

da cui deriva che

$$\|\hat{A}\| = \sqrt{\text{tr}(\hat{A}^\dagger \hat{A})} \quad (\text{C.3})$$

anche lo spazio vettoriale degli operatori lineari che agiscono su \mathcal{H} acquisisce, dunque, la struttura di spazio di Hilbert e viene indicato con $L_{\mathcal{H}}$.
Le dimensioni di questi due spazi sono legati dalla seguente relazione

$$\dim L_{\mathcal{H}} = (\dim \mathcal{H})^2 = N^2 \quad (\text{C.4})$$

Nel caso in cui gli operatori lineari precedentemente considerati sono autoaggiunti

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger, \hat{B} = \hat{B}^\dagger, \hat{C} = \hat{C}^\dagger, \dots$$

lo spazio di Hilbert $L_{\mathcal{H}}$ si riduce ad uno spazio vettoriale euclideo $\mathcal{V}_N = (V_N, g)$ di dimensione N^2 e la definizione di *prodotto scalare Hilbert-Schmidt* assume la seguente forma [14]

$$\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = \text{tr}(\hat{A}\hat{B}) \quad (\text{C.5})$$

La norma da esso indotta è uguale a

$$\|\hat{A}\|^2 = \langle \hat{A}, \hat{A} \rangle = \text{tr}(\hat{A}^2)$$

da cui deriva che

$$\|\hat{A}\| = \sqrt[2]{\text{tr}(\hat{A}^2)} \quad (\text{C.6})$$

Se si introduce una base ortonormale $\{\hat{O}_k\}$ per lo spazio \mathcal{V}_N , gli operatori \hat{A} , \hat{B} possono essere riscritti nel seguente modo [14]

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \sum_j a_j \hat{O}_j \\ \hat{B} &= \sum_j b_j \hat{O}_j \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

dove

$$\begin{aligned} a_j &= \text{tr}(\hat{O}_j \hat{A}) \\ b_j &= \text{tr}(\hat{O}_j \hat{B}) \end{aligned}$$

Utilizzando le (C.7), il prodotto scalare (C.5) acquista la seguente forma

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}, \hat{B} \rangle &= \text{tr}(\hat{A}\hat{B}) = \text{tr} \left\{ \left(\sum_j a_j \hat{O}_j \right) \left(\sum_k b_k \hat{O}_k \right) \right\} \\ &= \sum_{j,k} a_j b_k \text{tr}(\hat{O}_j \hat{O}_k) = \sum_{j,k} a_j b_k \langle \hat{O}_j, \hat{O}_k \rangle \\ &= \sum_{j,k} a_j b_k \delta_{jk} = \sum_j a_j b_j \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

da cui si vede che esso è uguale alla sommatoria del prodotto delle componenti omologhe.

Ponendo $\hat{A} = \hat{B}$ nella precedente espressione, si ricava che

$$\begin{aligned} \|\hat{A}\|^2 &= \text{tr}(\hat{A}^2) = \text{tr} \left\{ \left(\sum_j a_j \hat{O}_j \right) \left(\sum_k a_k \hat{O}_k \right) \right\} \\ &= \sum_{j,k} a_j a_k \delta_{jk} = \sum_j a_j^2 \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

quindi la norma di un operatore è uguale alla sommatoria del quadrato delle sue componenti rispetto alla base scelta.

Appendice D

Kernel di un operatore lineare

Sia \hat{A} un generico operatore lineare che agisce tra due spazi vettoriali C, D

$$\hat{A} : C \longrightarrow D \quad (\text{D.1})$$

e \vec{v} un vettore appartenente a C , $\vec{v} \in C$, il kernel di \hat{A} è uno spazio vettoriale definito nel seguente modo

$$\ker(\hat{A}) = \left\{ \vec{v} \in C : \hat{A}\vec{v} = \vec{0} \right\} \quad (\text{D.2})$$

oppure, introducendo una base, si possono utilizzare le componenti del vettore e dell'operatore in questa base

$$\ker(\hat{A}) = \left\{ \vec{v} \in C : \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} v_{\beta} = 0_{\alpha} \right\} \quad (\text{D.3})$$

Quindi, in sintesi, $\ker(\hat{A})$ è lo spazio vettoriale formato da tutti i vettori ai quali, tramite \hat{A} , viene associato il vettore nullo.

Appendice E

State fidelity tra stati puri

La state fidelity serve a valutare in modo quantitativo la somiglianza tra due stati [5]; esistono varie definizioni di questa grandezza, dipendentemente dal fatto che gli stati considerati sono entrambi puri, entrambi misti oppure uno è puro mentre l'altro è misto.

Si considerino due stati puri descritti dai vettori d'onda normalizzati $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$, la fidelity tra di essi è definita nel seguente modo [5]

$$F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2 \quad (\text{E.1})$$

Se gli stati descritti dai vettori $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$ sono uguali, allora $|\psi\rangle = |\phi\rangle$ e si ottiene

$$F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2 = 1 \quad (\text{E.2})$$

se, invece, gli stati presi in considerazione non hanno alcun tipo di somiglianza, i vettori $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$ che li descrivono sono ortogonali tra loro e quindi

$$F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2 = 0 \quad (\text{E.3})$$

In conclusione si ha che la fidelity tra due generici stati può assumere un qualsiasi valore reale appartenente all'intervallo $[0, 1]$

$$0 \leq F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) \leq 1 \quad (\text{E.4})$$

Utilizzando gli operatori densità relativi ai precedenti stati puri

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|, \hat{\sigma} = |\phi\rangle\langle\phi| \quad (\text{E.5})$$

è possibile riscrivere la (E.1) in un'altra forma:

$$F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2 = \langle\psi|\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle$$

se si introduce una qualunque base $\{|\varphi_j\rangle\}$, dato che i suoi vettori soddisfano la relazione di completezza

$$\sum_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| = \mathbb{1}$$

l'espressione precedente può essere riscritta nel seguente modo

$$\begin{aligned}
 F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) &= \langle\psi| \left(\sum_j |\varphi_j\rangle \langle\varphi_j| \right) |\phi\rangle \langle\phi|\psi\rangle \\
 &= \sum_j \langle\psi|\varphi_j\rangle \langle\varphi_j|\phi\rangle \langle\phi|\psi\rangle \\
 &= \sum_j \langle\varphi_j|\phi\rangle \langle\phi|\psi\rangle \langle\psi|\varphi_j\rangle \\
 &= \sum_j \langle\varphi_j|\hat{\sigma}\hat{\rho}|\varphi_j\rangle \\
 &= \text{tr}(\hat{\sigma}\hat{\rho}) = \text{tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma})
 \end{aligned}$$

Si è, dunque, visto che la fidelity tra due stati puri descritti dagli operatori densità definiti nell'equazione (E.5) può assumere anche la seguente forma [14]

$$F(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = \text{tr}(\hat{\sigma}\hat{\rho}) = \text{tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}) \quad (\text{E.6})$$

Appendice F

Errore su B e su \vec{h}^{opt}

L'espressione completa dell'errore sugli elementi di matrice B_j è la seguente

$$\delta B_j = \sqrt{\sum_{m,k} \left(\frac{\partial B_j}{\partial \rho_k(t_m)} \right)^2 \sigma_{\rho_k(t_m)}^2} + \sum_m \left| \text{tr} \left\{ \hat{l}_j(t_m) \frac{\hat{R}_m^{(1)}}{\delta t} \right\} \right|$$

dove $\sigma_{\rho_k(t_m)}^2$ è l'errore sul valor medio di ciascun coefficienti $\rho_k(t_m)$ calcolato con le N_M misure effettuate sullo stato

$$\sigma_{\rho_k(t_m)}^2 = \frac{1}{N_M - 2} \left(\sum_{s=1}^{N_M} \frac{(\rho_s(t_n) - \langle \rho_s(t_n) \rangle)^2}{N_M - 1} \right)$$

in cui il valor medio dei coefficienti è uguale a

$$\langle \rho_s(t_n) \rangle = \sum_{q=1}^{N_M} \frac{\rho_s^{(q)}(t_n)}{N_M} = \sum_{q=1}^{N_M} \frac{\langle \hat{O}_s \rangle_{\hat{\rho}(t_n)}^{(q)}}{N_M}$$

Poiché $\langle \hat{O}_s \rangle_{\hat{\rho}(t_n)}^{(q)}$ assumono in modo casuale i valori $\frac{-1}{\sqrt{2^{N_q}}}$ e $\frac{1}{\sqrt{2^{N_q}}}$, dove $\frac{1}{\sqrt{2^{N_q}}}$ è la costante di normalizzazione degli operatori di base, la loro sommatoria su tutte le misure è circa uguale a zero, $\langle \rho_s(t_n) \rangle \simeq 0$, per cui si ottiene che

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_k(t_m)}^2 &\simeq \frac{1}{N_M} \sum_{s=1}^{N_M} \frac{(\rho_s(t_n))^2}{N_M} = \frac{1}{N_M} \sum_s \frac{\langle \hat{O}_s \rangle_{\hat{\rho}(t_n)}^2}{N_M} \\ &= \frac{1}{N_M} \sum_{s=1}^{N_M} \frac{1}{2^{N_q} N_M} = \frac{1}{N_M 2^{N_q}} \end{aligned}$$

Ritornando all'espressione dell'errore su B_j , si ha che essa è uguale a

$$\delta B_j = \frac{1}{\sqrt{2^{N_q} N_M}} \sqrt{\sum_{m,k} \left(\frac{\partial B_j}{\partial \rho_k(t_m)} \right)^2} + \sum_m \left| \text{tr} \left\{ \hat{l}_j(t_m) \frac{\hat{R}_m^{(1)}}{\delta t} \right\} \right| \quad (\text{F.1})$$

A questo punto, bisogna esplicitare la derivata di B_j rispetto a $\rho_k(t_m)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial B_j}{\partial \rho_k(t_m)} &= \sum_n \text{tr} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_k(t_m)} \left(\sum_\alpha \rho_\alpha(t_{n+1}) \hat{O}_\alpha - \sum_\beta \rho_\beta(t_n) \hat{O}_\beta \right) \right] \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left(-i \left[\hat{L}_j, \sum_\gamma \rho_\gamma(t_n) \hat{O}_\gamma \right] \right) \right\} + \\
 &\quad + \sum_n \text{tr} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left(\sum_\alpha \rho_\alpha(t_{n+1}) \hat{O}_\alpha - \sum_\beta \rho_\beta(t_n) \hat{O}_\beta \right) \sum_\gamma \frac{\partial \rho_\gamma(t_n)}{\partial \rho_k(t_m)} \left(-i \left[\hat{L}_j, \hat{O}_\gamma \right] \right) \right\} \\
 &= \sum_n \text{tr} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left(\sum_\alpha \frac{\partial \rho_\alpha(t_{n+1})}{\partial \rho_k(t_m)} \hat{O}_\alpha - \sum_\beta \frac{\partial \rho_\beta(t_n)}{\partial \rho_k(t_m)} \hat{O}_\beta \right) \left(-i \left[\hat{L}_j, \sum_\gamma \rho_\gamma(t_n) \hat{O}_\gamma \right] \right) \right\} + \\
 &\quad + \sum_n \text{tr} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left(\sum_\alpha \rho_\alpha(t_{n+1}) \hat{O}_\alpha - \sum_\beta \rho_\beta(t_n) \hat{O}_\beta \right) \sum_\gamma \delta_{\gamma k} \delta_{nm} \left(-i \left[\hat{L}_j, \hat{O}_\gamma \right] \right) \right\} \\
 &= \sum_n \text{tr} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left(\sum_\alpha \delta_{\alpha k} \delta_{m n+1} \hat{O}_\alpha - \sum_\beta \delta_{\beta k} \delta_{mn} \hat{O}_\beta \right) \sum_\gamma \rho_\gamma(t_n) \left(-i \left[\hat{L}_j, \hat{O}_\gamma \right] \right) \right\} + \\
 &\quad + \text{tr} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left(\sum_\alpha \rho_\alpha(t_{m+1}) \hat{O}_\alpha - \sum_\beta \rho_\beta(t_m) \hat{O}_\beta \right) \left(-i \left[\hat{L}_j, \hat{O}_k \right] \right) \right\} \\
 &= \text{tr} \left\{ \frac{1}{\delta t} \sum_\gamma (\rho_\gamma(t_{m-1}) - \rho_\gamma(t_m)) \left(-i \hat{O}_k \left[\hat{L}_j, \hat{O}_\gamma \right] \right) \right\} + \\
 &\quad + \text{tr} \left\{ \frac{\hat{\rho}(t_{m+1}) - \hat{\rho}(t_m)}{\delta t} \left(-i \left[\hat{L}_j, \hat{O}_k \right] \right) \right\}
 \end{aligned}$$

il primo termine al secondo membro dell'ultima espressione può essere riscritto utilizzando la proprietà di invarianza per permutazioni cicliche della traccia

$$\begin{aligned}
 \text{tr} \left(\hat{O}_k \left[\hat{L}_j, \hat{O}_\gamma \right] \right) &= \text{tr} \left(\hat{O}_k \hat{L}_j \hat{O}_\gamma - \hat{O}_k \hat{O}_\gamma \hat{L}_j \right) = \text{tr} \left(\hat{O}_k \hat{L}_j \hat{O}_\gamma \right) - \text{tr} \left(\hat{O}_k \hat{O}_\gamma \hat{L}_j \right) \\
 &= \text{tr} \left(\hat{O}_\gamma \hat{O}_k \hat{L}_j \right) - \text{tr} \left(\hat{O}_\gamma \hat{L}_j \hat{O}_k \right) = \text{tr} \left(\hat{O}_\gamma \hat{O}_k \hat{L}_j - \hat{O}_\gamma \hat{L}_j \hat{O}_k \right) \\
 &= \text{tr} \left(\hat{O}_\gamma \left[\hat{O}_k, \hat{L}_j \right] \right) = \text{tr} \left(-\hat{O}_\gamma \left[\hat{L}_j, \hat{O}_k \right] \right) = -\text{tr} \left(\hat{O}_\gamma \left[\hat{L}_j, \hat{O}_k \right] \right)
 \end{aligned}$$

in questo modo si ottiene che

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial B_j}{\partial \rho_k(t_m)} &= \text{tr} \left\{ \frac{1}{\delta t} \sum_{\gamma} (\rho_{\gamma}(t_m) - \rho_{\gamma}(t_{m-1})) \left(-i \hat{O}_{\gamma} [\hat{L}_j, \hat{O}_k] \right) \right\} + \\
 &+ \text{tr} \left\{ \frac{\hat{\rho}(t_{m+1}) - \hat{\rho}(t_m)}{\delta t} \left(-i [\hat{L}_j, \hat{O}_k] \right) \right\} \\
 &= \text{tr} \left\{ \frac{1}{\delta t} \sum_{\gamma} \left(\rho_{\gamma}(t_m) \hat{O}_{\gamma} - \rho_{\gamma}(t_{m-1}) \hat{O}_{\gamma} \right) \left(-i [\hat{L}_j, \hat{O}_k] \right) \right\} + \\
 &+ \text{tr} \left\{ \frac{\hat{\rho}(t_{m+1}) - \hat{\rho}(t_m)}{\delta t} \left(-i [\hat{L}_j, \hat{O}_k] \right) \right\} \\
 &= \text{tr} \left\{ \left(\frac{\hat{\rho}(t_m) - \hat{\rho}(t_{m-1})}{\delta t} + \frac{\hat{\rho}(t_{m+1}) - \hat{\rho}(t_m)}{\delta t} \right) \left(-i [\hat{L}_j, \hat{O}_k] \right) \right\} \\
 &= \text{tr} \left\{ \frac{\hat{\rho}(t_{m+1}) - \hat{\rho}(t_{m-1})}{\delta t} \left(-i [\hat{L}_j, \hat{O}_k] \right) \right\} \\
 &= 2 \text{tr} \left\{ \frac{\hat{\rho}(t_{m+1}) - \hat{\rho}(t_{m-1})}{2 \delta t} \left(-i [\hat{L}_j, \hat{O}_k] \right) \right\} \\
 &= 2 \text{tr} \left\{ -i \left(\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \Big|_{t_m} \right) [\hat{L}_j, \hat{O}_k] \right\} \\
 &= -2 \text{tr} \left\{ -i \left[\hat{L}_j, \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \Big|_{t_m} \right] \hat{O}_k \right\}
 \end{aligned}$$

calcolando il quadrato, in definitiva, si ricava la seguente espressione

$$\left(\frac{\partial B_j}{\partial \rho_k(t_m)} \right)^2 = 4 \left(\text{tr} \left\{ -i \left[\hat{L}_j, \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \Big|_{t_m} \right] \hat{O}_k \right\} \right)^2$$

L'errore su B_j è, dunque, uguale a

$$\begin{aligned}
 \delta B_j &= \frac{2}{\sqrt{2^{N_q} N_M}} \sqrt{\sum_{k,m} 4 \left(\text{tr} \left\{ -i \left[\hat{L}_j, \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \Big|_{t_m} \right] \hat{O}_k \right\} \right)^2} + \\
 &+ \sum_m \left| \text{tr} \left\{ \hat{l}_j(t_m) \frac{\hat{R}_m^{(1)}}{\delta t} \right\} \right|
 \end{aligned} \tag{F.2}$$

La quantità sotto la radice quadrata può essere riscritta utilizzando la (C.9), infatti, effettuando la seguente identificazione

$$\hat{A} = -i \left[\hat{L}_j, \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \Big|_{t_m} \right]$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} \sum_k \left(\text{tr} \left\{ -i \left[\hat{L}_j, \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \Big|_{t_m} \right] \hat{O}_k \right\} \right)^2 &= \sum_k \left(\left\langle -i \left[\hat{L}_j, \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \Big|_{t_m} \right], \hat{O}_k \right\rangle \right)^2 \\ &= \text{tr} \left\{ \left(-i \left[\hat{L}_j, \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \Big|_{t_m} \right] \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

per cui la (F.2) diventa

$$\delta B_j = \frac{2}{\sqrt{2^{N_q} N_M}} \sqrt{\sum_m \text{tr} \left\{ \left(-i \left[\hat{L}_j, \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \Big|_{t_m} \right] \right)^2 \right\}} + \sum_m \left| \text{tr} \left\{ \hat{l}_j(t_m) \frac{\hat{R}_m^{(1)}}{\delta t} \right\} \right|$$

grazie all'equazione di von Neumann, essa si semplifica ulteriormente

$$\begin{aligned} \delta B_j &= \frac{2}{\sqrt{2^{N_q} N_M}} \sqrt{\sum_m \text{tr} \left\{ \left(-i \left[\hat{L}_j, -i \left[\hat{H}, \hat{\rho}(t_m) \right] \right] \right)^2 \right\}} + \\ &+ \sum_m \left| \text{tr} \left\{ \hat{l}_j(t_m) \frac{\hat{R}_m^{(1)}}{\delta t} \right\} \right| \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Prima di procedere bisogna ricavare un'utile espressione necessaria a riscrivere in modo più compatto l'errore su B_j , per farlo si introduce il seguente operatore

$$\hat{\hat{H}} = \hat{H} - E_{\min} \mathbb{1}_2$$

dove E_{\min} è il più piccolo autovalore di \hat{H} . Bisogna notare che $\hat{\hat{H}}$ fa evolvere uno stato allo stesso modo di \hat{H} , infatti

$$[\hat{H}, \hat{X}] = [\hat{\hat{H}}, \hat{X}]$$

ma il suo spettro è traslato verso il basso di una quantità costante pari a E_{\min} per cui la sua decomposizione spettrale risulta uguale a

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_n E_n |n\rangle \langle n| \\ \hat{\hat{H}} &= \sum_n (E_n - E_{\min}) |n\rangle \langle n| \end{aligned}$$

Si consideri la seguente quantità

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left\{ \left(-i [\hat{H}, \hat{X}] \right)^2 \right\} &= \operatorname{tr} \left\{ -[\hat{H}, \hat{X}]^2 \right\} = \operatorname{tr} \left\{ -[\hat{\hat{H}}, \hat{X}]^2 \right\} \\ &= \operatorname{tr} \left\{ -\left(\hat{\hat{H}} \hat{X} - \hat{X} \hat{\hat{H}} \right)^2 \right\} \\ &= 2 \left(\operatorname{tr} \left(\hat{\hat{H}} \hat{X} \hat{X} \hat{\hat{H}} - \operatorname{tr} \left(\hat{\hat{H}} \hat{X} \hat{\hat{H}} \hat{X} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

dove $\operatorname{tr} \left\{ \left(-i [\hat{H}, \hat{X}] \right)^2 \right\}$ è la norma al quadrato dell'operatore autoaggiunto $-i [\hat{H}, \hat{X}]$ per cui è una quantità certamente positiva

$$\operatorname{tr} \left\{ \left(-i [\hat{H}, \hat{X}] \right)^2 \right\} \geq 0$$

analizzando singolarmente i due termini precedenti, si ricava che

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left(\hat{\hat{H}} \hat{X} \hat{X} \hat{\hat{H}} \right) &= \sum_n \langle \phi_n | \hat{\hat{H}} \hat{X} \hat{X} \hat{\hat{H}} | \phi_n \rangle = \sum_n (E_n - E_{\min})^2 \langle \phi_n | \hat{X} \hat{X} | \phi_n \rangle \\ &= \sum_{n,q} (E_n - E_{\min})^2 \langle \phi_n | \hat{X} | \phi_q \rangle \langle \phi_q | \hat{X} | \phi_n \rangle \\ &= \sum_{n,q} (E_n - E_{\min})^2 \left| \langle \phi_n | \hat{X} | \phi_q \rangle \right|^2 \\ \operatorname{tr} \left(\hat{\hat{H}} \hat{X} \hat{\hat{H}} \hat{X} \right) &= \sum_n \langle \phi_n | \hat{\hat{H}} \hat{X} \hat{\hat{H}} \hat{X} | \phi_n \rangle = \sum_{n,q} \langle \phi_n | \hat{\hat{H}} \hat{X} | \phi_q \rangle \langle \phi_q | \hat{\hat{H}} \hat{X} | \phi_n \rangle \\ &= \sum_{n,q} (E_n - E_{\min}) (E_q - E_{\min}) \langle \phi_n | \hat{X} | \phi_q \rangle \langle \phi_q | \hat{X} | \phi_n \rangle \\ &= \sum_{n,q} (E_n - E_{\min}) (E_q - E_{\min}) \left| \langle \phi_n | \hat{X} | \phi_q \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

e calcolandone la differenza, si ottiene

$$\begin{aligned}
 & \text{tr}\left(\hat{H}\hat{X}\hat{X}\hat{H}\right) - \text{tr}\left(\hat{H}\hat{X}\hat{H}\hat{X}\right) = \\
 & = \sum_{n,q} (E_n - E_{\min})^2 \left| \langle \phi_n | \hat{X} | \phi_q \rangle \right|^2 + \\
 & - \sum_{n,q} (E_n - E_{\min})(E_q - E_{\min}) \left| \langle \phi_n | \hat{X} | \phi_q \rangle \right|^2 \\
 & = \sum_{n,q} (E_n - E_{\min})(E_n - E_q) \left| \langle \phi_n | \hat{X} | \phi_q \rangle \right|^2 \\
 & \leq \sum_n (E_n - E_{\min})(E_n - E_{\min}) \left| \langle \phi_n | \hat{X}^2 | \phi_n \rangle \right| \\
 & \leq \sum_n (E_{\max} - E_{\min})^2 \left| \langle \phi_n | \hat{X}^2 | \phi_n \rangle \right| \\
 & \leq (E_{\max} - E_{\min})^2 \sum_n \left| \langle \phi_n | \hat{X}^2 | \phi_n \rangle \right| \\
 & \leq (E_{\max} - E_{\min})^2 \text{tr}\left(\hat{X}^2\right) \\
 & \implies \text{tr}\left(\hat{H}\hat{X}\hat{X}\hat{H}\right) - \text{tr}\left(\hat{H}\hat{X}\hat{H}\hat{X}\right) \leq \left\| \hat{H} \right\|_{\text{op}}^2 \text{tr}\left(\hat{X}^2\right)
 \end{aligned}$$

dove E_{\max} è il più grande autovalore di \hat{H} pertanto è uguale proprio alla norma operatoriale di quest'ultimo, $\left\| \hat{H} \right\|_{\text{op}} = E_{\max} - E_{\min}$.

Riassumendo, si è ottenuta la seguente disuguaglianza

$$\begin{aligned}
 \text{tr}\left\{ \left(-i \left[\hat{H}, \hat{X} \right] \right)^2 \right\} &= \text{tr}\left\{ \left(-i \left[\hat{H}, \hat{X} \right] \right)^2 \right\} \\
 &\leq -2 \left\| \hat{H} \right\|_{\text{op}}^2 \text{tr}\left(\hat{X}^2\right)
 \end{aligned} \tag{F.4}$$

grazie alla quale è possibile riscrivere il primo termine della (F.3) nel seguente modo

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{\sqrt{2^{N_q} N_M}} \sqrt{\sum_m \text{tr}\left\{ \left(-i \left[\hat{L}_j, -i \left[\hat{H}, \hat{\rho}(t_m) \right] \right] \right)^2 \right\}} \\
 & \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2^{N_q} N_M}} \left\| \hat{L}_j \right\|_{\text{op}} \sqrt{\sum_m \text{tr}\left\{ \left(-i \left[\hat{H}, \hat{\rho}(t_m) \right] \right)^2 \right\}} \\
 & \leq \frac{4}{\sqrt{2^{N_q} N_M}} \left\| \hat{L}_j \right\|_{\text{op}} \left\| \hat{H} \right\|_{\text{op}} \sqrt{\sum_m \text{tr}\left\{ \left(\hat{\rho}(t_m) \right)^2 \right\}}
 \end{aligned}$$

considerando che $\text{tr}\{(\hat{\rho}(t_m))^2\} \leq 1$, si ha che

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\sqrt{2^{N_q} N_M}} \|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \|\hat{H}\|_{\text{op}} \sqrt{\sum_m \text{tr}\{(\hat{\rho}(t_m))^2\}} \\ & \leq \frac{4}{\sqrt{2^{N_q} N_M}} \|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \|\hat{H}\|_{\text{op}} \sqrt{\sum_m 1} \\ & = 4 \|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \|\hat{H}\|_{\text{op}} \sqrt{\frac{N_t}{2^{N_q} N_M}} \end{aligned}$$

quindi

$$\delta B_j \leq 4 \|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \|\hat{H}\|_{\text{op}} \sqrt{\frac{N_t}{2^{N_q} N_M}} + \sum_m \left| \text{tr} \left\{ \hat{l}_j(t_m) \frac{\hat{R}_m^{(1)}}{\delta t} \right\} \right| \quad (\text{F.5})$$

Il secondo termine della (F.3) è il seguente

$$\sum_m \left| \text{tr} \left\{ \hat{l}_j(t_m) \frac{\hat{R}_m^{(1)}}{\delta t} \right\} \right| = \sum_m \left| \langle \hat{l}_j(t_m), \frac{\hat{R}_m^{(1)}}{\delta t} \rangle \right|$$

e può essere maggiorato utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\sum_m \left| \langle \hat{l}_j(t_m), \frac{\hat{R}_m^{(1)}}{\delta t} \rangle \right| \leq \sum_m \left\| \hat{l}_j(t_m) \right\| \left\| \frac{\hat{R}_m^{(1)}}{\delta t} \right\|$$

esplicitando gli operatori presenti nella precedente espressione e utilizzando ripetutamente la relazione (F.4), si ottiene

$$\begin{aligned} & \sum_m \left\| \hat{l}_j(t_m) \right\| \left\| \frac{\hat{R}_m^{(1)}}{\delta t} \right\| = \\ & = \sum_m \sqrt{\text{tr} \left\{ \left(-i [\hat{L}_j, \hat{\rho}(t_m)] \right)^2 \right\}} \sqrt{\text{tr} \left\{ \left(-\frac{\delta t}{2} [\hat{H}, [\hat{H}, \hat{\rho}(t_m)]] \right)^2 \right\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{\delta t}{2} \sum_m \sqrt{2 \|\hat{L}_j\|_{\text{op}}^2 \text{tr} \{(\hat{\rho}(t_m))^2\}} \sqrt{\text{tr} \left\{ \left(-i [\hat{H}, -i [\hat{H}, \hat{\rho}(t_m)]] \right)^2 \right\}} \\
 &\leq \frac{\delta t}{2} \|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \sum_m \sqrt{2 \text{tr} \{(\hat{\rho}(t_m))^2\}} \sqrt{2 \|\hat{H}\|_{\text{op}}^2 \text{tr} \left\{ \left(-i [\hat{H}, \hat{\rho}(t_m)] \right)^2 \right\}} \\
 &\leq \delta t \|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \|\hat{H}\|_{\text{op}} \sum_m \sqrt{\text{tr} \{(\hat{\rho}(t_m))^2\}} \sqrt{2 \|\hat{H}\|_{\text{op}}^2 \text{tr} \{(\hat{\rho}(t_m))^2\}} \\
 &= \sqrt{2} \delta t \|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \|\hat{H}\|_{\text{op}}^2 \sum_m \sqrt{\text{tr} \{(\hat{\rho}(t_m))^2\}} \sqrt{\text{tr} \{(\hat{\rho}(t_m))^2\}} \\
 &= \sqrt{2} \delta t \|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \|\hat{H}\|_{\text{op}}^2 \sum_m \text{tr} \{(\hat{\rho}(t_m))^2\} \\
 &\leq \sqrt{2} \delta t \|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \|\hat{H}\|_{\text{op}}^2 \sum_m 1 \\
 &= \sqrt{2} \delta t \|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \|\hat{H}\|_{\text{op}}^2 N_t \\
 &\implies \sum_m \|\hat{l}_j(t_m)\| \left\| \frac{\hat{R}_m^{(1)}}{\delta t} \right\| \leq \sqrt{2} \delta t \|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \|\hat{H}\|_{\text{op}}^2 N_t
 \end{aligned}$$

L'espressione completa di δB_j è, dunque, la seguente

$$\delta B_j \leq 4 \|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \|\hat{H}\|_{\text{op}} \sqrt{\frac{N_t}{2^N N_M}} + \sqrt{2} \delta t \|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \|\hat{H}\|_{\text{op}}^2 N_t \quad (\text{F.6})$$

considerando che $\{\hat{L}_j\}$ sono un sottinsieme di $\{\hat{O}_k\}$, essi presentano il loro stesso coefficiente di normalizzazione per cui la loro norma operatoriale soddisfa certamente la seguente disuguaglianza

$$\|\hat{L}_j\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{\sqrt{2^{N_q}}}$$

quindi la (F.6) diventa

$$\delta B_j \leq 4 \|\hat{H}\|_{\text{op}} \sqrt{\frac{N_t}{4^{N_q} N_M}} + \sqrt{2} \delta t \frac{N_t}{\sqrt{2^{N_q}}} \|\hat{H}\|_{\text{op}}^2$$

Le componenti del vettore $\delta \vec{h}$ soddisfano, quindi, la seguente disuguaglianza

$$\begin{aligned}
 \delta h_p &= \sum_j (V^{-1})_{pj} \delta B_j \\
 &\leq \sum_j (V^{-1})_{pj} \left(4 \|\hat{H}\|_{\text{op}} \sqrt{\frac{N_t}{4^{N_q} N_M}} + \sqrt{2} \delta t \frac{N_t}{\sqrt{2^{N_q}}} \|\hat{H}\|_{\text{op}}^2 \right)
 \end{aligned}$$

dalla precedente si ricava quella relativa al suo modulo

$$\begin{aligned} |\vec{\delta h}| &= \sqrt{\sum_p (\delta h_p)^2} \\ &\leq \left(4 \|\hat{H}\|_{\text{op}} \sqrt{\frac{N_t}{4^{N_q} N_M}} + \sqrt{2} \delta t \frac{N_t}{\sqrt{2^{N_q}}} \|\hat{H}\|_{\text{op}}^2 \right) \sqrt{\sum_{p,j} [(V^{-1})_{pj}]^2} \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

L'espressione di $|\vec{\delta h}|$ può essere riscritta utilizzando le seguenti relazioni

- dato che l'insieme $\{\hat{L}_j\}$ è sottoinsieme di un insieme di operatori di base ortonormali, anche gli operatori \hat{L}_j sono ortogonali tra loro, quindi utilizzando (4.2) e la (C.9) è possibile riscrivere la traccia di \hat{H}^2 nel seguente modo

$$\begin{aligned} \text{tr}(\hat{H}^2) &= \sum_{j,k} \left\{ \text{tr}(\hat{L}_j \hat{H}) \text{tr}(\hat{L}_k \hat{H}) \right\} \text{tr}(\hat{L}_j \hat{L}_k) \\ &= \sum_{j,k} \left\{ \text{tr}(\hat{L}_j \hat{H}) \text{tr}(\hat{L}_k \hat{H}) \right\} \langle \hat{L}_j, \hat{L}_k \rangle \\ &= \sum_{j,k} \left\{ \text{tr}(\hat{L}_j \hat{H}) \text{tr}(\hat{L}_k \hat{H}) \right\} \delta_{jk} \\ &= \sum_j \text{tr}(\hat{L}_j \hat{H}) \text{tr}(\hat{L}_j \hat{H}) = \sum_j h_j^2 \end{aligned}$$

sfruttando il risultato appena ottenuto, si ricava la seguente disuguaglianza

$$|\vec{h}| = \sqrt{\sum_p (h_p)^2} = \sqrt{\text{tr}(\hat{H}^2)} = \|\hat{H}\| \geq \|\hat{H}\|_{\text{op}} \quad (\text{F.8})$$

- si considerino due generiche matrici quadrate A , B e se ne calcoli il prodotto righe per colonne

$$C = A \cdot B$$

l'espressione di un generico elemento della matrice C è la seguente

$$C_{jk} = \sum_{\alpha} A_{j\alpha} B_{\alpha k}$$

utilizzando questa formula per calcolare il quadrato della matrice V^{-1} , si ottiene

$$(V^{-1})^2 = (V^{-1}) \cdot (V^{-1}) \implies [(V^{-1})^2]_{jk} = \sum_{\alpha} (V^{-1})_{j\alpha} (V^{-1})_{\alpha k}$$

Adesso si vuole calcolare la traccia di $(V^{-1})^2$:

$$\begin{aligned}
 \text{tr} [(V^{-1})^2] &= \sum_j [(V^{-1})^2]_{jj} = \sum_j \sum_\alpha (V^{-1})_{j\alpha} (V^{-1})_{\alpha j} \\
 &= \sum_{j=\alpha} (V^{-1})_{jj} (V^{-1})_{jj} + \sum_{j \neq \alpha} (V^{-1})_{j\alpha} (V^{-1})_{\alpha j} \\
 &= \sum_{j=\alpha} [(V^{-1})_{jj}]^2 + \sum_{j \neq \alpha} (V^{-1})_{j\alpha} (V^{-1})_{\alpha j}
 \end{aligned}$$

considerando che la matrice V^{-1} è simmetrica, $(V^{-1})_{jk} = (V^{-1})_{kj}$, si ottiene

$$\begin{aligned}
 \text{tr} [(V^{-1})^2] &= \sum_{j=\alpha} [(V^{-1})_{jj}]^2 + \sum_{j \neq \alpha} [(V^{-1})_{j\alpha}]^2 \\
 &= \sum_{j,\alpha} [(V^{-1})_{j\alpha}]^2
 \end{aligned} \tag{F.9}$$

si è, quindi, ottenuto che la traccia della matrice $[V^{-1}]^2$ è uguale alla sommatoria del quadrato delle sue componenti.

Grazie alle relazioni (F.8), (F.9), la (F.7) diventa

$$\begin{aligned}
 |\delta \vec{h}| &\leq \left(4 \|\hat{H}\|_{\text{op}} \sqrt{\frac{N_t}{4^{N_q} N_M}} + \sqrt{2} \delta t \frac{N_t}{\sqrt{2^{N_q}}} \|\hat{H}\|_{\text{op}}^2 \right) \sqrt{\sum_{p,j} [(V^{-1})_{pj}]^2} \\
 &= \left(4 |\vec{h}| \sqrt{\frac{N_t}{4^{N_q} N_M}} + \sqrt{2} \delta t \frac{N_t}{\sqrt{2^{N_q}}} \|\hat{H}\|_{\text{op}} |\vec{h}| \right) \sqrt{\text{tr} \{(V^{-1})^2\}}
 \end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] Dominik Hangleiter, Ingo Roth, Jens Eisert e Pedram Roushan. *Precise Hamiltonian identification of a superconducting quantum processor*. 2021. arXiv: 2108.08319 [quant-ph].
- [2] J. M. Chow et al. “Randomized Benchmarking and Process Tomography for Gate Errors in a Solid-State Qubit”. In: *Phys. Rev. Lett.* 102 (9 mar. 2009), p. 090502.
- [3] *Hamiltonian Tomography*. URL: <https://qiskit.org/textbook/ch-quantum-hardware/hamiltonian-tomography.html#Hamiltonian-Tomography>.
- [4] David P. DiVincenzo. “The Physical Implementation of Quantum Computation”. In: *Fortschritte der Physik* 48.9-11 (2000), pp. 771–783.
- [5] Mark M. Wilde. *Quantum Information Theory*. Cambridge University Press, 2013.
- [6] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton e Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics, Vol. III: The New Millennium Edition: Quantum Mechanics*. Basic Books, 2010.
- [7] P. Krantz, M. Kjaergaard, F. Yan, T. P. Orlando, S. Gustavsson e W. D. Oliver. “A quantum engineer’s guide to superconducting qubits”. In: *Applied Physics Reviews* 6.2 (2019), p. 021318.
- [8] Sangil Kwon, Akiyoshi Tomonaga, Gopika Lakshmi Bhai, Simon J. Devitt e Jaw-Shen Tsai. “Gate-based superconducting quantum computing”. In: *Journal of Applied Physics* 129.4 (2021), p. 041102.
- [9] E. Magesan e J. M. Gambetta. “Effective Hamiltonian models of the cross-resonance gate”. In: *Phys. Rev. A* 101 (5 mag. 2020), p. 052308.
- [10] Jens Koch et al. “Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box”. In: *Phys. Rev. A* 76 (4 ott. 2007), p. 042319.
- [11] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc e G. Grynberg. *Atom—Photon Interactions*. John Wiley e Sons, Ltd, 1998.
- [12] E. Knill et al. “Randomized benchmarking of quantum gates”. In: *Phys. Rev. A* 77 (1 gen. 2008), p. 012307.

- [13] Isaac L. Chuang e M. A. Nielsen. “Prescription for experimental determination of the dynamics of a quantum black box”. In: *Journal of Modern Optics* 44.11-12 (1997), pp. 2455–2467.
- [14] D. Rattacaso, G. Passarelli, A. Mezzacapo, P. Lucignano e R. Fazio. “Optimal parent Hamiltonians for time-dependent states”. In: *Phys. Rev. A* 104 (2 ago. 2021), p. 022611.
- [15] Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010.
- [16] Marlan O. Scully e M. Suhail Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [17] B. Zwiebach. *Multiparticle states and tensor products*. URL: https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-05-quantum-physics-ii-fall-2013/lecture-notes/MIT8_05F13_Chap_08.pdf.
- [18] *Entanglement*. URL: <https://quantum-computing.ibm.com/composer/docs/iqx/guide/entanglement#ghz-states>.
- [19] *Qubit*. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Qubit>.
- [20] Harald Ibach e Hans Lüth. *Solid-State Physics. An Introduction to Principles of Materials Science*. Springer, 2009.
- [21] Michael Tinkham. *Introduction to superconductivity*. Dover Publication, Inc, 2019.
- [22] Giuseppe Grosso e Giuseppe Pastori-Parravicini. *Solid State Physics*. London: Academic Press, 2000.
- [23] Sarah Sheldon, Easwar Magesan, Jerry M. Chow e Jay M. Gambetta. “Procedure for systematically tuning up cross-talk in the cross-resonance gate”. In: *Phys. Rev. A* 93 (6 giu. 2016), p. 060302.
- [24] Easwar Magesan et al. “Efficient Measurement of Quantum Gate Error by Interleaved Randomized Benchmarking”. In: *Phys. Rev. Lett.* 109 (8 ago. 2012), p. 080505.
- [25] *Clifford gates*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Clifford_gates.
- [26] L. S. Cederbaum, J. Schirmer e H.-D. Meyer. “Block diagonalisation of Hermitian matrices”. In: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 22.13 (lug. 1989).