

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI**  
**“FEDERICO II”**



**Scuola Politecnica e delle Scienze di Base**  
**Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali**

**Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**

*Laurea Magistrale in Fisica*

**Le Onde Gravitazionali nelle Teorie Estese della Gravitazione**

**Relatori:**

Prof. Salvatore Capozziello

Dott. Daniele Vernieri

**Candidato:**

Pasquale Falcone

Matr. N94000538

**Anno Accademico 2020/2021**

# Indice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>   | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>La Relatività Generale e le sue estensioni</b>                         | <b>9</b>  |
| 2.1      | Le teorie della gravitazione . . . . .                                    | 9         |
| 2.2      | La Relatività Generale . . . . .  | 13        |
| 2.3      | Perché estendere la Relatività Generale . . . . .                         | 21        |
| 2.4      | Le teorie $f(R)$ . . . . .  | 25        |
| 2.5      | L'equivalenza tra teorie $f(R)$ e scalar-tensoriali . . . . .             | 31        |
| <b>3</b> | <b>Le onde gravitazionali: teoria e conferme sperimentali</b>             | <b>38</b> |
| 3.1      | La linearizzazione delle equazioni di Einstein . . . . .                  | 38        |
| 3.2      | Le onde gravitazionali . . . . .  | 43        |
| 3.3      | Gli esperimenti sulle onde gravitazionali . . . . .                       | 47        |
| 3.4      | Il futuro dell'astronomia gravitazionale, l'interferometro LISA . . . . . | 49        |
| <b>4</b> | <b>Le onde gravitazionali nelle teorie <math>f(R)</math></b>              | <b>52</b> |
| 4.1      | La linearizzazione delle equazioni di campo . . . . .                     | 52        |
| 4.1.1    | La soluzione d'onda piana . . . . .                                       | 55        |
| 4.2      | Il problema delle sorgenti . . . . .                                      | 58        |
| 4.3      | La radiazione gravitazionale prodotta da una sorgente . . . . .           | 59        |
| 4.4      | La radiazione di quadrupolo . . . . .                                     | 63        |
| 4.5      | La risposta degli interferometri . . . . .                                | 68        |
| 4.6      | Il fondo stocastico delle onde gravitazionali . . . . .                   | 72        |
| <b>5</b> | <b>Conclusioni e prospettive</b>  | <b>78</b> |

# Capitolo 1

## Introduzione

La forza di gravità governa i sistemi fisici dotati di massa e assume un ruolo di particolare rilievo per i sistemi astrofisici come stelle, pianeti, galassie, ammassi di galassie e buchi neri. Le loro orbite e la loro struttura sono determinate dalla capacità della gravità di attrarre un corpo verso l'altro, atomo dopo atomo, molecola dopo molecola, stella dopo stella.

Sebbene abbiamo un'idea intuitiva di come funzioni la gravità, non è banale capire quale sia il modello matematico che meglio la rappresenta. Fino ad oggi sono state formulate molte teorie della gravitazione, ma la più acclamata e diffusa è la teoria della Relatività Generale, formulata da Albert Einstein nel 1916 [1]. Essa descrive alquanto bene la dinamica del nostro Sistema Solare, riuscendo a rappresentare il moto dei corpi che osserviamo sulla volta celeste ancora meglio della ben nota teoria di Newton. Ma il merito della Relatività Generale non è solo quello di “fittare” bene i dati, ha anche permesso di comprendere che la gravità occupa un ruolo peculiare rispetto alle altre interazioni fondamentali. Essa infatti modifica la struttura dello spazio e del tempo. In presenza di una massa (ovvero una sorgente del campo gravitazionale), le equazioni di campo di Einstein dettano che lo spazio-tempo si incurva attorno ad essa e, cioè, che la distanza che ci permette fisicamente di calcolare la separazione tra due punti dello spazio-tempo non è la distanza euclidea, bensì qualcosa di più generale valido per spazi-tempi non necessariamente piatti. Nelle teorie metriche

della gravità, come appunto la Relatività Generale, il campo gravitazionale è rappresentato da quel tensore che regola il modo in cui calcoliamo le distanze: la metrica. Un corpo che si muove nello spazio-tempo lo fa lungo una curva detta “linea di universo”; in una teoria metrica della gravità è necessario che tali curve siano le più brevi possibili, le cosiddette geodetiche, la cui forma dipende da quella dello spazio-tempo e quindi dal campo gravitazionale. Tale visione dell’attrazione gravitazionale ha permesso, nello scorso secolo, di reinterpretare moltissimi fenomeni fisici osservati e altrimenti incomprensibili. Basti pensare al problema storico dell’avanzamento del perielio di Mercurio, inspiegabile secondo la teoria di Newton a meno di includere un corpo celeste la cui orbita è interna a quella del pianeta <sup>1</sup>, ma che viene perfettamente risolto dalle caratteristiche orbite “a rosetta” predette dalla teoria di Einstein. Oppure basta riflettere su una delle sue applicazioni più importanti: la cosmologia relativistica [2] che sulla base delle equazioni einsteiniane, ci ha permesso di capire che il nostro universo può essere ricostruito con una metrica che ne determina età, forma e storia. Il *Modello Cosmologico Standard* e le cosmologie scientifiche sono costruite sulla gravità di Einstein, anche se questa da sola non basta per rappresentare tutte le caratteristiche dell’universo osservato. Un modello di universo che si espande e allo stesso tempo mantiene un certo grado di isotropia e omogeneità deve obbligatoriamente includere la presenza di materia ed energia “oscure”, nonché il fenomeno dell’*inflazione* cosmica che ha causato la rapidissima espansione dell’universo qualche istante dopo il Big-Bang. Tali ipotesi aggiuntive permettono di descrivere, almeno numericamente, qualunque tipo di osservazione astronomica o cosmologica ci venga in mente. Siffatto modello prende il nome di  $\Lambda$ CDM [3]. Tuttavia, si ha motivo di pensare che in realtà materia ed energia oscure siano solo un modo per costruire un buon modello portando però con sé l’incertezza su cosa siano davvero. La prima evidenza di materia oscura risale al 1933, quando l’astronomo Zwicky [4] stava studiando la dinamica dell’ammasso della Chioma (che possiamo vedere nella figura 1.1 [5]), un ammasso di galassie localizzato a 336 milioni di anni luce dalla Terra. Lo studio del moto delle galassie rivelò un comportamento peculiare: queste si stavano muovendo troppo velocemente per essere gravitazionalmente legate insieme dalla sola ma-

---

<sup>1</sup>Il corpo celeste in questione è l’ipotetico pianeta Vulcano e nonostante le numerose ricerche non venne mai trovato.

teria visibile ai telescopi e l'ammasso sarebbe dovuto "evaporare". Un modo per giustificare la sua esistenza, è ammettere la presenza di una tipologia di materia invisibile ai telescopi e centinaia di volte più abbondante di quella visibile. Questa venne prima chiamata da Zwicky "dunke materie" e qualche anno dopo materia oscura. Sfortunatamente quest'ultima viene osservata solo a distanze extra-galattiche, mentre non si osserva nel Sistema Solare, rendendo ancora più incognita la sua natura. Dati recenti rivelano che essa costituisce circa l'86% della materia dell'intero universo, quindi di fatto non sappiamo cosa costituisce l'universo per il suo 86%. Inoltre nel conteggio totale dell'energia (la massa è una forma di energia) essa occupa circa il 26% a fronte del 5% di materia ordinaria e il restante 69% di energia oscura. Quest'ultima è una forma di energia che occorre considerare per spiegare l'espansione accelerata dell'universo ed è l'energia associata alla "costante cosmologica", un termine costante introdotto dallo stesso Einstein nelle sue equazioni di campo per ottenere un modello di universo statico. In seguito alle scoperte di Hubble sull'espansione accelerata dell'universo, la costante cosmologica assunse invece il ruolo opposto, cioè quello di un fluido perfetto a "pressione negativa" che anziché comprimere e stabilizzare l'universo lo fa dilatare in maniera accelerata. Purtroppo le incognite del modello cosmologico standard non finiscono qui. L'universo osservato è omogeneo e isotropo, in accordo con il *principio cosmologico*, ma tale grado di simmetria non avrebbe potuto permettere la formazione di struttura nell'universo primordiale. Inoltre nel 1965, gli ingegneri Wilson e Penzias, scoprirono casualmente una radiazione di fondo paragonabile a quella di un corpo nero in equilibrio termico a circa 2.7 K. Tale radiazione era stata già teorizzata anni prima nel 1946 da Dicke che la denominò "radiazione di materia cosmica". Al giorno d'oggi la chiamiamo *radiazione cosmica di fondo* e rappresenta una delle prove della *teoria del Big Bang*, anche se mette all'angolo il modello cosmologico standard. Del resto come è possibile che regioni di cielo lontanissime tra loro siano state in equilibrio termodinamico se non sono neanche causalmente connesse? Pochi attimi dopo il Big-Bang lo erano, ma poi qualcosa ha fatto sì che dopo 13.7 miliardi di anni le stesse regioni fossero a distanza tale che la luce non può connetterle. La spiegazione di questo fenomeno venne data da Starobinsky [6](URSS) e da Guth [7] (USA) agli inizi degli anni '80, introducendo il modello di inflazione cosmica: subito dopo il

Big Bang l'universo ha iniziato a espandersi a velocità sempre maggiore fino a superare l'orizzonte della velocità della luce (il che è reso possibile dal fatto che è l'universo stesso ad espandersi). L'inflazione permette di risolvere il cosiddetto "problema dell'orizzonte" giustificando l'isotropia della radiazione cosmica di fondo, nonché il "problema della piattezza", cioè il perché la densità di materia dell'Universo è esattamente (con una precisione nell'ordine di una parte <sup>2</sup> su 10<sup>64</sup>) pari alla densità critica [8]. L'inflazione è attribuita a un campo scalare, l'*inflatone*, non previsto dalla teoria di Einstein, ma al più da teorie alternative della gravità. La Relatività Generale, nonostante i numerosi successi, non sembra essere, quindi, la teoria della gravitazione definitiva. Infatti, anche volendo ignorare i problemi legati al Modello Cosmologico Standard, essa soffre di una patologia incurabile: non è compatibile con la meccanica quantistica [9]. Ma allo stesso tempo continua a ricevere conferme, come la recentissima scoperta delle onde gravitazionali [10, 11, 12, 13]. Dalle sue equazioni di campo, Einstein, dimostrò che in approssimazione di campo debole, lo spazio-tempo può oscillare e che tali oscillazioni si propagano alla velocità della luce [14]. A lungo i fisici si sono chiesti se tali onde fossero onde fisiche, reali, misurabili, oppure un semplice artificio matematico e lo stesso Einstein cambiò più volte opinione a riguardo. Le acerbe tecnologie a disposizione dei fisici di quell'epoca non permettevano di indagare ulteriormente. Infatti, l'effetto delle onde gravitazionali è veramente piccolo, dai dati attuali sappiamo che per poterle rilevare direttamente occorre saper misurare variazioni relative di lunghezza con una precisione di 10<sup>-21</sup>*m*. La loro prova indiretta risale al 1974 [15], quando i due scienziati Hulse e Taylor scoprirono il primo sistema binario composto da due stelle di neutroni, di cui una è una pulsar, PSR 1913+16, distante circa 21000 anni luce dalla Terra. Tale sistema ha un periodo di circa 7 ore e un'orbita altamente ellittica (eccentricità  $\sim 0.6$ ) e la presenza della pulsar permette di calcolare precisamente la sua orbita ed eventuali effetti dovuti alla Relatività Generale. I due fisici scoprirono che il periodo orbitale diminuisce di circa 75 milionesimi di secondo l'anno e la loro orbita si stringe progressivamente di circa 3 metri l'anno, proprio a causa delle onde gravitazionali emesse dal sistema, il

---

<sup>2</sup>riferito all'epoca di Planck, pochi istanti dopo il Big-Bang; all'epoca della nucleosintesi, per i dati che abbiamo raccolto, tale precisione scende a una parte su 10<sup>16</sup>.

che farà terminare la loro danza tra circa 300 milioni di anni. I calcoli effettuati sulla dinamica di PSR 1913+16 concordano fortemente con la teoria, con un errore relativo sulla variazione del periodo di circa lo 0.2%. L'accordo è ancora migliore per il sistema PSR J0737-3039 composto da ben due pulsar di circa 1.3 masse solari ciascuna, scoperto nel 2003 a circa 4000 anni luce dalla Terra. Tali misure sono in accordo con la Relatività Generale con una precisione dello 0.02%. La pulsar binaria PSR J0737-3039 è stata fino al 2015 la migliore dimostrazione dell'esistenza delle onde gravitazionali. Le piccolissime oscillazioni indotte da un'onda gravitazionale verranno poi misurate per la prima volta in maniera diretta con il rivelatore LIGO il 14 settembre del 2015 [10]. Il segnale denominato GW-150914, con una durata di  $0.2s$  è stato generato dalla coalescenza di due buchi neri di circa 36 e 29 masse solari, avvenuta a circa 1.4 miliardi di anni luce da noi [16]. Il buco nero risultante ha una massa pari a 62 masse solari, e la massa mancante, circa 3 volte il nostro Sole, è stata irradiata sotto forma di onde gravitazionali. Da quella data, fino ai giorni nostri, molti sono i sistemi che sono stati rivelati a partire dalle loro emissioni di onde gravitazionali e che sarebbero altrimenti invisibili ai telescopi. Sebbene la Relatività Generale abbia delle patologie incurabili dal lato teorico [9], ci ha permesso di scovare nel buio spazio cosmico colossi come buchi neri binari e continua a collezionare successi. Quindi sorge spontaneo chiedersi quale sia la teoria definitiva della gravità. Tale teoria deve sicuramente, in certi limiti, ricalcare i successi della teoria di Einstein, ma deve anche superare le sue difficoltà. Va ricercata quindi una teoria che includa naturalmente l'inflazione cosmica e che sia compatibile con la meccanica quantistica. Una delle prime teorie alternative che si muove in tale direzione, fu proposta nel 1981 dal già citato Starobinsky, il quale formulò una teoria metrica della gravitazione le cui equazioni di campo discendono da una Lagrangiana differente da quella di Einstein anche se ne costituisce una generalizzazione. La teoria di Starobinsky apre le porte alle cosiddette *Teorie Estese della gravitazione*: una classe di teorie metriche alternative che si sviluppano dallo stesso punto di partenza considerato da Einstein e da Hilbert, ma con una lagrangiana differente. Con gli anni sempre più teorie estese sono state proposte, ma quelle che verranno investigate in questo lavoro di tesi sono le teorie  $f(R)$ , una classe di teorie ben nota come alternativa a materia ed energie oscure [17, 18]. Introducendo una

funzione dello scalare di Ricci  $R$  nell'azione gravitazionale, si riescono a spiegare sia l'espansione accelerata dell'universo che la formazione di strutture, come galassie e ammassi di galassie, senza la necessità di utilizzare artefici come la materia e l'energia oscure. Inoltre, le equazioni di campo delle teorie  $f(R)$  possono essere interpretate tramite quelle della Relatività Generale. Infatti, ciò che genera il campo gravitazionale, non è solo la presenza di materia-energia come nella teoria di Einstein, ma ad essa si affianca la presenza di "termini di materia" che tuttavia non sono realmente generati dalla presenza di materia-energia, ma sono intrinsecamente frutto dei termini non lineari presenti nella lagrangiana "estesa". In questo lavoro di tesi verrà studiato il comportamento di tali teorie nel contesto delle onde gravitazionali, un campo che ha confermato la teoria di Einstein, ma che può riservare ancora altre prospettive. I prossimi capitoli della tesi sono organizzati come segue. Nel capitolo 2 verranno affrontate le basi teoriche sia della Relatività Generale che delle teorie  $f(R)$ , nonché l'equivalenza tra tali teorie e le teorie scalar-tensoriali. Il capitolo 3 sarà dedicato alla comprensione di come le onde gravitazionali emergono direttamente dalle equazioni di campo linearizzate della Relatività Generale, con un accenno agli osservatori gravitazionali attuali, quali LIGO, VIRGO, KAGRA e quelli in fase di progettazione come LISA. Il capitolo 4 contiene la nostra ricerca riguardo le onde gravitazionali in teoria  $f(R)$ , da cui emerge una polarizzazione aggiuntiva di fianco alle due  $h_+$  e  $h_\times$  della Relatività Generale, a cui corrisponde un gravitone massivo. Analizzeremo tale polarizzazione in presenza di una sorgente gravitazionale. Segue lo sviluppo in multipoli della radiazione gravitazionale in teoria  $f(R)$ , con il fine di trovare la formula di quadrupolo relativa alla polarizzazione scalare. Nella sezione finale del capitolo 4 sono discussi gli eventuali risvolti osservativi delle onde gravitazionali in teorie  $f(R)$ . L'obiettivo del presente lavoro è, quindi, quello di analizzare in che modo l'estensione della teoria della gravità, in particolare nel contesto delle teorie  $f(R)$ , può influenzare i segnali delle onde gravitazionali. Tale ipotesi viene sviluppata sulla base di considerazioni teoriche in attesa che futuri lavori possano investigarla anche dal punto di vista sperimentale-numeric, con il supporto di simulazioni della possibile forma del segnale.



Figura 1.1: L'ammasso della Chioma.

## Capitolo 2

# La Relatività Generale e le sue estensioni

### 2.1 Le teorie della gravitazione

Galilei, alla fine del sedicesimo secolo, fu il primo a introdurre pendoli e piani inclinati nello studio della gravità terrestre; la gravità ha giocato un ruolo fondamentale nello sviluppo delle idee di Galilei riguardo la necessità degli esperimenti negli studi scientifici e nello sviluppo del metodo empirico-sperimentale, contribuendo alla Rivoluzione Scientifica che aveva iniziato Copernico e che finirà Newton. Sebbene Galilei riuscì a capire molto riguardo la gravità, basti pensare al celebre esperimento della caduta dei gravi dalla torre di Pisa, essa ha trovato una descrizione matematica non prima del 1687, quando Newton pubblicò i *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [19], in cui introdusse la ben nota *legge di gravitazione universale* che regola la forza attrattiva che due corpi con massa  $m_1$  ed  $m_2$  esercitano vicendevolmente

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.1)$$

dove  $G$  è la costante di gravitazione universale. Con l'equazione (2.1) la gravità terrestre

venne correlata alla gravità celeste, riuscendo a racchiudere le scoperte di Copernico, Keplero e Galilei, in una singola teoria matematica, fornendo agli astronomi dei secoli successivi gli strumenti per calcolare la meccanica celeste di pianeti e oggetti orbitanti. Infatti, la teoria di Newton fa previsioni corrette per una grande varietà di fenomeni a diverse scale di distanza, includendo sia gli esperimenti terrestri che le osservazioni astronomiche e ha di fatto rivoluzionato la concezione millenaria che cielo e Terra fossero regolati da leggi differenti. Probabilmente non c'è stata alcuna teoria nella storia ad aver avuto un impatto così importante sulla vita dell'uomo come quella di Newton. Non a caso, nel secolo successivo alla pubblicazione dei *Principia*, c'è stato un repentino avanzamento tecnologico che ha portato alla Rivoluzione Industriale. E tale teoria continua tutt'oggi ad essere alla base delle tecnologie non relativistiche<sup>1</sup>. Infatti, uno dei problemi della teoria di Newton risiede nella covarianza, cioè nella formulazione delle stesse leggi fisiche in sistemi di riferimento differenti che si muovono gli uni rispetto agli altri; il principio di *relatività galileiana*, che Newton ereditò dal *Dialogo sui due Massimi Sistemi del Mondo*, incorpora l'idea chiave di spazio e tempo assoluti: lo spazio è assunto essere una struttura fissa, un'arena rigida dove i fenomeni fisici hanno luogo; il tempo è universale e non dipende dall'osservatore. Tale punto chiave è il maggiore responsabile dell'obsolescenza della teoria di Newton in favore di quella di Einstein. Ma andando con ordine, la gravità newtoniana iniziò a incontrare difficoltà anni prima dell'avvento di Einstein, con la scoperta del problema della precessione del perielio dell'orbita di Mercurio. Per ogni pianeta il punto di minima distanza dal Sole non è costante, esso ruota nel tempo di alcuni secondi d'arco per secolo, tale effetto è particolarmente amplificato per Mercurio data la sua vicinanza con il Sole. Tra le misure astronomiche e la previsione teorica c'era uno scarto di circa 43 secondi d'arco, la precessione era troppo rapida per la teoria di Newton e l'inspiegabile divergenza dalle osservazioni iniziò ad incrinare il successo della teoria al punto tale che si provò ad introdurre termini correttivi nell'equazione (2.1) per far quadrare i calcoli, senza riscuotere un effettivo successo. Nel 1859 l'astronomo Le Verrier [20] propone l'esistenza di un pianeta chiamato Vulcano,

---

<sup>1</sup>Cioè quelle tecnologie che non necessitano delle basi teoriche della Relatività Generale (o Speciale). Un esempio di tecnologia relativistica è il GPS

invisibile ai telescopi, la cui orbita è più interna di quella di Mercurio; l'ipotetico pianeta avrebbe dovuto perturbare l'orbita di Mercurio quel tanto che bastava da spiegare l'inconsistenza tra teoria e dati, tuttavia, l'esistenza di questo pianeta non venne mai dimostrata da osservazioni dirette o indirette. Il problema della precessione di Mercurio era un segnale che la teoria newtoniana andava in qualche modo modificata o rimpiazzata da eventuali alternative. Venne infatti risolto nell'ambito della Relatività Generale di Einstein solo nel 1915. L'inizio del '900 fu un periodo florido e pieno di sfide per la fisica o, più in generale, per la scienza. Nel 1905 Albert Einstein pubblicò la *relatività ristretta* [21], anche detta relatività speciale, per estendere la relatività galileiana, della meccanica classica, alle equazioni di Maxwell dell'elettrodinamica, covarianti rispetto a trasformazioni di Lorentz ma non alle trasformazioni di Galilei. Egli riprese alcuni punti della relatività galileiana postulando inoltre che la luce si propaga nel vuoto sempre alla stessa velocità indipendentemente dal moto della sorgente. Tale comportamento peculiare della luce influenza il modo stesso in cui calcoliamo le distanze e misuriamo lo scorrere del tempo. Infatti, le misure di intervalli di tempo e di lunghezza che possono effettuare due ipotetici osservatori inerziali, non coincidono necessariamente. Cioè, avvengono una contrazione delle lunghezze e una dilatazione temporale. Questo accade perché la struttura matematica di spazio e tempo si fondono insieme in un'unica entità: lo spazio-tempo. Esso non coincide necessariamente con la struttura euclidea della teoria newtoniana, ma segue una struttura metrica lorentziana.

L'idea che il tempo è assoluto e non dipende dall'osservatore fu definitivamente superata con la scoperta della Relatività Speciale, spazio e tempo diventano entità relative all'osservatore, in particolare alla sua velocità. Anche il ruolo della gravità venne completamente modificato nella generalizzazione della relatività speciale, la teoria della Relatività Generale, pubblicata nel 1916 [1]. La gravità regola la forma stessa dello spazio-tempo, influenzando sia il moto degli oggetti in caduta libera che la geometria dell'universo e soprattutto spiega perfettamente la precessione dell'orbita di Mercurio soppiantando definitivamente le bizzarre ipotesi di pianeti invisibili o correzioni alla forza di gravità introdotte negli anni precedenti.

Negli anni che seguirono, Einstein continuò a collezionare successi in diversi ambiti. Nel 1917

riuscì a descrivere teoricamente il fenomeno quantistico dell'*emissione stimolata*, un meccanismo alla base dei moderni laser e nello stesso anno applicò la teoria della Relatività Generale alla Cosmologia [2], descrivendo l'universo come un universo statico e immutabile. Nel 1918, i due fisici Lense e Thirring teorizzano che lo spazio-tempo può essere letteralmente trascinato da un corpo massivo in rotazione, tale fenomeno prende il nome di *frame-dragging*. Ma una data difficilmente dimenticata dagli astronomi è il 1919 quando Eddington fu capace di misurare la deflessione della luce causata dall'attrazione gravitazionale del Sole durante un'eclissi solare; infatti, la presenza di una massa come il Sole curva lo spazio-tempo e devia localmente i fotoni, di conseguenza, le stelle attorno alla corona solare furono osservate a posizioni differenti rispetto a quelle usuali con una deviazione di 0.84 secondi d'arco. La gravità del Sole modifica il viaggio dei fotoni nei pressi della corona proprio come una lente, tale fenomeno è, infatti, chiamato *lensing gravitazionale* e venne predetto teoricamente anni prima anche nel contesto della fisica newtoniana, ma solo la Relatività Generale è capace di dare l'esatta deviazione [22]. Se la gravità è capace di piegare lo spazio che percorrono i fotoni, allora è capace anche di "stirare" le loro lunghezze d'onda; nel 1925, l'astronomo Walter Sydney Adams osserva che in presenza di un campo gravitazionale relativamente intenso, come quello generato da stelle massicce, i fotoni emessi da una certa sorgente vedono la loro lunghezza d'onda aumentare proporzionalmente all'intensità del campo gravitazionale, tale fenomeno prende il nome di redshift gravitazionale e venne definitivamente dimostrato da Pound e Rebka nel 1959 [23]. Nel 1929, Edwin Hubble scoprì il moto di recessione delle galassie, dimostrando che l'universo è in espansione e confutando, quindi, il modello statico di Einstein. Ma molti altri modelli di universo vennero costruiti sulle equazioni di campo della Relatività Generale. Infatti, solo qualche anno prima, nel 1923, Alexander Friedmann trovò la soluzione di un universo in espansione, predicendo i risultati di Hubble. L'interesse per la teoria di Einstein raggiunse il suo apice negli anni compresi tra il 1960 – 1975 durante i quali la teoria collezionò un grande numero di successi, per questo ci si riferisce a quegli anni come alla *golden-age* della Relatività Generale. Il rinnovato interesse per la teoria di Einstein permise la diffusione sia della cosmologia relativistica che dell'astrofisica relativistica. Per esempio, il concetto di Buco Nero come singolarità gravita-

zionale venne fatto notare da Schwarzschild già nel 1915, ma solo negli anni Sessanta, all'inizio della golden-age, divenne oggetto di interesse e venne effettivamente ipotizzata l'esistenza di buchi neri supermassicci al centro delle galassie e di dimensioni inferiori nello spazio profondo. Questo accadde anche per molti altri modelli di universo formulati in quegli anni, come il modello del Big-Bang di Friedmann che si diffuse proprio in quel periodo.

## 2.2 La Relatività Generale

Ogni teoria metrica della gravità si fonda sui principi che regolano come la gravità determina la struttura dello spazio-tempo. Il *Principio di Equivalenza in forma debole*, asserisce che la massa gravitazionale (di un corpo di prova, attratto dalla forza di gravità secondo la legge della Gravitazione universale) e quella inerziale (quella che compare nella seconda legge di Newton  $F = m_i a$ ) [24] coincidono, il che implica che è impossibile distinguere gli effetti di un campo gravitazionale da quelli che si generano in un sistema di riferimento uniformemente accelerato. La prima formulazione di tale principio proviene dalla teoria della gravitazione studiata di Newton ed è stata verificata sperimentalmente con un'accuratezza dell'ordine di  $10^{-13}$ [14]. Esso viene generalizzato da Einstein ad esperimenti anche non gravitazionali [23], con il *Principio di Equivalenza di Einstein*, enunciato come segue :

- il Principio di Equivalenza in forma debole è valido;
- il risultato di un qualsiasi esperimento localmente<sup>2</sup> non gravitazionale è indipendente dalla velocità dell'apparato in caduta libera;
- il risultato di un qualunque esperimento non gravitazionale è indipendente da dove, quando viene effettuato.

---

<sup>2</sup>Il campo gravitazionale è equivalente a un'accelerazione inerziale solo localmente, quindi, per apparati sperimentali abbastanza piccoli da non essere soggetti alle disomogeneità del campo gravitazionale che non permetterebbero di confondere gli effetti della gravità con quelli di un'accelerazione uniforme.

Volendo includere anche esperimenti gravitazionali nel Principio di Equivalenza, per estenderlo a tutte le leggi fisiche, si può enunciare il cosiddetto *Principio di Equivalenza in forma forte*:

- il Principio di Equivalenza in forma debole è valido;
- il risultato di un qualunque esperimento locale è indipendente dalla velocità dell'apparato in caduta libera;
- il risultato di un qualsiasi esperimento locale è indipendente da dove e quando viene effettuato.

A tali principi si affiancano quelli propri di una teoria metrica:

- Lo spazio-tempo è caratterizzato da una metrica  $g_{\mu\nu}$ ;
- le linee di mondo seguite dai corpi di prova sono le geodetiche della metrica.
- nei sistemi localmente in caduta libera, detti sistemi locali di Lorentz, le leggi non gravitazionali della fisica sono quelle della relatività ristretta.

La Relatività Generale rispetta sia i postulati di cui sopra, che il Principio di Equivalenza in forma forte, il che la rende una teoria metrica della gravitazione a tutti gli effetti; tuttavia, molte altre teorie metriche soddisfano tali requisiti e ne costituiscono una valida alternativa. In quanto teoria metrica, un corpo in caduta libera segue una curva detta geodetica. Per trovarne le equazioni sfruttiamo il Principio di Equivalenza. Consideriamo quindi un certo sistema di coordinate che  $\xi_\mu$  tale da annullare il campo gravitazionale e da essere localmente inerziale. In un sistema inerziale siffatto l'accelerazione è nulla, e cioè:

$$\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2} = 0 \quad , \quad ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad , \quad (2.2)$$

dove  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(+, -, -, -)$  o in maniera equivalente  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-, +, +, +)$ . Sia  $x_\mu$  il sistema di coordinate del laboratorio tale che  $\xi_\mu = \xi_\mu(x_\nu)$ , l'equazione (2.2) diventa:

$$\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu dx^\alpha dx^\beta = 0 \quad , \quad (2.3)$$

Dove  $u^\alpha = dx^\alpha/ds$  è la quadri-velocità del corpo e le quantità  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  sono dette *connessioni affini* ed emergono in maniera naturale dalla trasformazione di coordinate per passare un sistema inerziale a uno non inerziale. Se volessimo leggere le equazioni (2.3) in termini newtoniani, le prime descrivono un corpo che non risente di accelerazioni nelle seconde, invece, il termine in gamma assume il ruolo di una forza apparente definita come  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = d^2\xi^\mu/dx^\alpha dx^\beta$ . Le connessioni affini rivestono un ruolo importante nelle teorie metriche in quanto definiscono le accelerazioni gravitazionali, conviene quindi definirle in funzione della metrica. Consideriamo di nuovo la trasformazione di coordinate  $\xi_\mu = \xi_\mu(x_\nu)$ , l'elemento di linea diventa  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ , dove la metrica nel sistema del laboratorio è  $g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}(d\xi^\alpha)/(dx^\mu)(d\xi^\beta)/(dx^\nu)$  e la sua derivata  $g_{\mu\nu,\lambda} = g_{\rho\nu}\Gamma_\mu^\lambda{}^\rho + g_{\rho\mu}\Gamma_\nu^\lambda{}^\rho$ . In questo modo si possono definire i simboli di Christoffel di prima specie come:

$$\{\lambda, \mu\nu\} = \{\lambda, \nu\mu\} = g_{\rho\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^\rho, \quad (2.4)$$

con  $\{\lambda, \mu\nu\} = \frac{1}{2}(g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda})$  e i simboli di Christoffel di seconda specie

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = g^{\rho\lambda}\{\lambda, \mu\nu\} \quad (2.5)$$

Abbiamo ora la base matematica per poter capire in che modo i simboli di Christoffel e le equazioni del moto, nel formalismo metrico, si riducono a quelle di Newton nel caso di campi gravitazionali deboli e stazionari<sup>3</sup>. Nella dinamica newtoniana il tempo è assoluto, quindi le equazioni del moto sono tre e corrispondono alle equazioni (2.3) se consideriamo solo indici spaziali  $k = 1, 2, 3$ , ovvero

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^k du^\alpha du^\beta = 0. \quad (2.6)$$

Richiediamo che il tempo proprio e il tempo coordinato coincidono e sviluppiamo il secondo

---

<sup>3</sup>La stazionarietà ci permette di richiedere che la metrica sia stazionaria, cioè che la derivata nel tempo  $g_{\mu\nu,0} = 0$

termine del membro di sinistra dell'equazione (2.6) ottenendo

$$\Gamma_{\mu\nu}^k \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = \Gamma_{00}^k \left( \frac{dx^0}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{0i}^k \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^i}{ds} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}, \quad (2.7)$$

di questi termini teniamo solo il primo, perché a campi deboli corrispondono basse velocità, quindi  $v/c \ll 1$ . Quindi le equazioni del moto diventano

$$\frac{d^2 x^k}{c^2 dt^2} + \Gamma_{00}^k = 0. \quad (2.8)$$

Calcolando le connessioni affini con le equazioni (2.5) risulta

$$\Gamma_{00}^k = \frac{1}{2} g_{00,k}. \quad (2.9)$$

Se consideriamo le equazioni newtoniane del moto di un corpo in presenza del potenziale gravitazionale  $U$ , queste risultano

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = U_{,k}. \quad (2.10)$$

Per confronto tra le equazioni (2.8) e (2.10) otteniamo:

$$\frac{c^2}{2} g_{00} = -U + cost, \quad (2.11)$$

dove  $cost$  è una costante da calcolare con le condizioni asintotiche<sup>4</sup> del potenziale ed è uguale a 1, quindi risulta

$$g_{00} = -2U/c^2 + 1. \quad (2.12)$$

se il potenziale  $U$  è generato da un corpo di massa  $M$  posto a distanza  $R$ , allora  $U = (GM)/(c^2 R)$ , quindi

$$g_{00} = -\frac{2GM}{c^2 R} + 1 = 1 - \frac{R_s}{R} \quad (2.13)$$

---

<sup>4</sup>A distanza infinita  $R \rightarrow +\infty$  il potenziale  $U \rightarrow 0$  ed  $g_{00} \rightarrow \eta_{00} = 1$

dove abbiamo definito il raggio di Schwarzschild  $R_s = \frac{2GM}{c^2}$  che viene spesso utilizzata come indicatore degli effetti relativistici. Se un corpo ha un raggio molto maggiore del raggio di Schwarzschild, gli effetti relativistici che lo coinvolgono sono trascurabili.

La metrica si comporta analogamente a un potenziale gravitazionale, essa presenta a 16 componenti, cioè 16 potenziali gravitazionali contro l'unico potenziale  $U$  presente nella teoria di Newton. Questo accade perché il tensore metrico incorpora la geometria dello spazio-tempo e, nel limite delle basse energie, lo spazio-tempo è sostanzialmente quello di Minkowski fatta eccezione per la componente 00; tale spazio tempo si dice piatto o meglio a curvatura zero. Il concetto di curvatura è intrinsecamente legato alla dinamica. Infatti, come vedremo dall'equazione di campo in presenza di una sorgente gravitazionale, la metrica viene determinata a partire dal tensore di curvatura. Per chi è familiare alla geometria differenziale, la curvatura di una varietà geometrica è data dal *tensore di Riemann*:

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}. \quad (2.14)$$

Un modo molto diretto di capire in che termini il tensore di Riemann coinvolge la curvatura e, attraverso la *deviazione geodetica*. Se prendiamo in considerazione un fascio di geodetiche, i suoi elementi tendono a convergere oppure a divergere quando lo spazio-tempo è curvo. Consideriamo le equazioni parametriche di due geodetiche:

$$x^{\mu} = x^{\mu}(s), \quad (2.15)$$

$$x'^{\mu} = x^{\mu}(s) + \xi^{\mu}(s), \quad (2.16)$$

dove il vettore di connessione  $\xi^{\mu}$  collega due punti sulle geodetiche, tale vettore permette di analizzare in che modo le due curve si avvicinano o si allontanano tra loro (rimanendo sempre parallele). Riportiamo quindi l'equazione della deviazione geodetica

$$\frac{D^2\xi^{\mu}}{ds^2} = R_{\lambda\nu\rho}^{\mu} \frac{dx^{\rho}}{ds} \frac{dx^{\lambda}}{ds} \xi^{\nu}, \quad (2.17)$$

dove  $D/ds$  è l'operatore di derivata covariante, ovvero la generalizzazione della derivata nello spazio euclideo a varietà differenziabili qualsiasi. Per varietà riemanniane, con connessioni di Levi-Civita, come quelle viste fin'ora è definita come

$$\frac{D\xi^\mu}{ds} = \frac{d\xi^\mu}{ds} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \xi^\lambda. \quad (2.18)$$

Il ruolo del tensore di Riemann nelle equazioni di cui sopra è evidente se il tensore di Riemann è uguale a zero, le geodetiche restano equidistanti, il che è tipico di uno spazio-tempo piatto; Se invece è diverso da zero le geodetiche vicine accelerano e quindi tendono a convergere o divergere. In altre parole, la curvatura controlla direttamente il modo in cui accelerano le geodetiche in un fascio. L'equazione (2.17) sarà molto utile per valutare l'effetto delle onde gravitazionali a partire dal tensore di Riemann.

Ogni teoria della gravità ha un set di equazioni di campo che permette di calcolare la dinamica del campo gravitazionale. Riferendoci a quelle della gravità di Newton, delle equazioni di campo accettabili devono essere del secondo secondo ordine e la loro soluzione deve ridursi a quella newtoniana per campi deboli, quindi bisogna saperle ridurre in una forma simile all'equazione di Poisson; inoltre devono essere scritte in forma tensoriale per obbedire al principio di covarianza. Tali condizioni portarono Einstein a postulare equazioni di campo in assenza di materia del tipo

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}, \quad (2.19)$$

dove  $G_{\mu\nu}$  è il *tensore di Einstein*,  $R_{\mu\nu}$  è il *tensore di Ricci*, definito come la contrazione del primo e terzo indice del tensore di Riemann, ed  $R$  è lo scalare di curvatura, traccia del tensore di Ricci. Le equazioni (2.19) soddisfano le condizioni di sopra, in particolare possono essere ricondotte all'equazione di Poisson; infatti, le equazioni (2.19) sono equivalenti a richiedere che  $R_{\mu\nu} = 0$ , la cui componente 00 può essere scritta nel limite di campi deboli e stazionari (vedi

l'equazione (2.12)) in funzione del potenziale newtoniano  $U$  come

$$R_0^0 = -\frac{1}{c^2} \nabla^2 U \quad (2.20)$$

che rappresenta un'appropriata generalizzazione dell'equazione di Poisson. Al di là degli argomenti di natura fisica sopra riportati, le equazioni di campo (2.19) possono essere derivate da un *principio variazionale*

$$\delta \int \sqrt{-g} \mathcal{L} d\Omega, \quad (2.21)$$

dove la quantità  $\sqrt{-g} d\Omega$  è il volume invariante. Infatti, se consideriamo la trasformazione di coordinate  $x^\alpha = x^\alpha(\bar{x}^\mu)$ , dove  $\bar{x}^\mu$  sono le coordinate inerziali locali, l'elemento di volume si trasforma tramite il determinante jacobiano della trasformazione  $d\Omega = J d\bar{\Omega}$ . La metrica trasforma come  $\bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} g_{\mu\nu}$ , il cui determinante  $\bar{g}$  vale  $\bar{g} = -1 = J^2 g$ , per cui l'elemento di volume invariante diventa  $d\bar{\Omega} = \sqrt{-\bar{g}} d\Omega$ . La scelta della densità di lagrangiana  $\mathcal{L}$  è arbitraria, tuttavia la scelta più ovvia è lo scalare di curvatura  $R$ ; infatti se si vogliono ottenere equazioni di Eulero-Lagrange del secondo ordine, la lagrangiana deve contenere almeno i quadrati delle derivate prime della metrica. Tale scelta fu proprio quella adottata da Einstein e precedentemente da Hilbert nel 1915 per dedurre le equazioni di campo, ma come vedremo per le teorie estese lo scalare di Ricci non è l'unica scelta possibile correndo però il rischio di dedurre equazioni di campo di ordine superiore al secondo. Va notato che le equazioni (2.19) valgono nel vuoto e per tenere conto di eventuali sorgenti gravitazionali occorre introdurre al membro di destra il *tensore energia-impulso*  $T_{\mu\nu}$ . Usualmente le sorgenti di campo gravitazionale sono rappresentate attraverso il modello di *fluido perfetto* caratterizzato da una certa densità specifica di energia, legata alla sua densità a riposo  $\rho$ ,  $\epsilon = \rho c^2$  e pressione  $p$ , tale per cui il tensore energia-impulso risulta:

$$T_{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta}, \quad (2.22)$$

dove  $u^\alpha$  è la quadri-velocità del fluido. Le equazioni di campo in presenza di materia diventano

quindi:

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

dove  $\chi$  è la costante di accoppiamento. Dall'equazione (2.20) otteniamo che nel limite newtoniano vale  $-\frac{1}{c^2}\nabla^2 U = -\frac{1}{2}\chi\rho c^4$ , la quale deve coincidere con l'equazione di Poisson  $\nabla^2 U = -4\pi G\rho$ , quindi otteniamo  $\chi = 8\pi G/c^4$ .

## Il Modello Cosmologico Standard

Le previsioni teoriche della Relatività Generale sono adatte alla costruzione di una rappresentazione scientifica dell'universo che risulta fortemente in accordo con le osservazioni. Tale rappresentazione è il Modello Cosmologico Standard e si fonda sulle seguenti evidenze osservative:

- l'esistenza di strutture a larga scala, quali galassie e ammassi di galassie;
- l'isotropia e l'omogeneità oltre una certa scala pari a circa 100 Mpc <sup>5</sup>;
- l'espansione delle galassie in base alla legge di Hubble;
- un'età dell'universo dell'ordine di 14 milioni di anni;
- presenza di elio di origine cosmologica per una frazione del 25% di tutta la materia visibile;
- una densità di materia-energia dell'ordine della densità critica. Avere un universo aperto o chiuso dipende dalla densità di materia-energia, se la densità è al di sopra della densità critica l'universo inizierebbe a collapsare, al contrario per densità pari o inferiore a essa il processo di espansione continuerebbe per tempi indefinitamente lunghi. Inoltre anche la forma dell'universo viene definita tramite la densità critica, in particolare attraverso il parametro di densità  $\Omega = \rho/\rho_c$ : se  $\Omega < 1$  è universo spazialmente aperto, per  $\Omega = 1$  è spazialmente piatto, per  $\Omega > 1$  è un universo chiuso;

---

<sup>5</sup>Mega Parsec.

- la presenza di una forma di energia non addensata in strutture e completamente diversa da ogni altra forma di energia conosciuta che prende il nome di costante cosmologica. Inoltre responsabile dell'espansione accelerata dell'universo;
- una radiazione di fondo cosmico assimilabile a quella di un corpo nero in equilibrio termodinamico alla temperatura di circa 3K;
- l'evidenza di evoluzione cosmica desunta da radiosorgenti e quasar ad alto redshift.

Tuttavia i primi modelli di universo proposti dai cosmologi, tra cui lo stesso Einstein, prima della scoperta dell'espansione dell'universo, erano modelli statici cioè né in contrazione né in espansione; del resto era difficile immaginare l'universo peculiare che abitiamo senza avere altro che le equazioni di campo. A tale fine lo stesso Einstein modificò le equazioni di campo (2.23) aggiungendo un termine costante  $\Lambda$  per equilibrare l'espansione o la contrazione dell'universo

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

Tale termine è la costante cosmologica pari a  $\Lambda \simeq 10^{-57} \text{cm}^{-2}$  e sebbene faccia parte del modello statico di Einstein, ormai obsoleto, è attualmente un ingrediente fondamentale della cosmologia moderna; infatti l'attuale espansione dell'universo viene associata alla presenza di un fluido perfetto cosmologico a pressione negativa, cioè tale da esercitare una forza repulsiva tra gli oggetti celesti su larga scala. L'energia usualmente chiamata *energia oscura*.

## 2.3 Perché estendere la Relatività Generale

Nel 1919, appena quattro anni dopo la pubblicazione della Relatività Generale, Weyl per primo iniziò a considerare modifiche alla teoria includendo invarianti di ordine superiore allo scalare di Ricci all'interno dell'azione gravitazionale, portando a equazioni di campo del quarto ordine. Altri tentativi seguirono a quello di Weyl, lo stesso Eddington che supportò la teoria di Einstein con

la scoperta del lensing gravitazionale, nel 1923 propose una modifica della gravità. Tuttavia, in quegli anni tali modifiche erano frutto di una certa curiosità scientifica piuttosto che di una vera e propria necessità. Modificare l'azione gravitazionale, complicandola e complicando di conseguenza le equazioni di campo, guidati dalla sola curiosità e senza prove sperimentali contro la Relatività Generale non riscosse molto successo né aveva molto senso. Dovettero passare anni prima che tali motivazioni emergessero naturalmente dal contesto scientifico. Infatti, proprio all'inizio della golden age, negli anni '60, iniziarono ad apparire studi che evidenziavano certi vantaggi nel complicare l'azione gravitazionale. Ma tutti gli argomenti provenienti dalla fisica classica non sembravano convincenti rispetto a quelli di natura quantistica [25]. Infatti, sebbene la teoria di Einstein preveda una serie di fenomeni e di osservazioni sia su scale astrofisiche che cosmologiche, essa non è compatibile con una trattazione quantistica. La Relatività Generale non è rinormalizzabile e quindi quantizzabile, il che la rende una teoria incompleta e incapace di rappresentare la gravità a scale microscopiche come, ad esempio, nell'universo primordiale negli istanti successivi al Big Bang. Nel 1962 Utiyama e DeWitt dimostrarono che sebbene la relatività non sia rinormalizzabile, una teoria metrica della gravità la cui azione è supportata anche da termini di ordine superiore rispetto allo scalare di Ricci, come appunto le teorie metriche del quarto ordine, poteva essere quantizzata a singolo loop. Questa circostanza causò un vero e proprio boom degli studi riguardo la gravità del quarto ordine negli anni '70 e sempre più fisici iniziarono a lavorarci e continuano a farlo tutt'ora.

Nel 1977, Stelle [25], scoprì che le azioni di ordine superiore potevano portare alla rinormalizzazione della teoria della gravità e in particolare che il termine quadratico nell'azione era cruciale per poter rinormalizzare la teoria. Infatti, anche la moderna teoria delle super-stringhe fornisce in ambito di teoria dei campi, tra gli altri termini, un termine di curvatura quadratica nell'azione gravitazionale. Storicamente non sono state teorie prive di problemi. Infatti, equazioni di campo del quarto ordine sono più difficili da integrare e portano con loro un problema interpretativo in quanto da esse emergono uno o più gradi di libertà aggiuntivi che vanno fisicamente interpretati, nonché la difficoltà nel ritrovare la fisica Newtoniana alle basse energie. Con l'avvento di sempre più moderni metodi di calcolo tali problemi sono stati parzialmente risolti. Non solo si è riusciti a

ritrovare il potenziale gravitazionale newtoniano per corpi isolati, nonostante il grado elevato delle equazioni differenziali, ma i gradi di libertà aggiuntivi vennero interpretati come gravitoni massivi che affiancano l'usuale gravitone privo di massa della Relatività Generale [26]. Tuttavia, emerse anche che i termini aggiuntivi presenti nell'azione modificata si manifestano come correzioni alle equazioni di Einstein che sono rilevanti solo in certi regimi della gravità e a certe scale, come la scala di Planck, quindi nell'universo primordiale, e vicino le singolarità dei buchi neri, quindi per campi particolarmente intensi (regime di campo forte). Tali correzioni in linea di principio non dovrebbero essere visibili nel limite delle basse energie, cioè a larga scala, e quindi non sono osservabili nell'universo presente. Per tali ragioni conviene parlare di tali teorie come ad estensioni della Relatività Generale e non a vere e proprie alternative. Attualmente, infatti, non si hanno particolari evidenze sperimentali di tale classe di teorie al punto da preferirle alla relatività. Se da un lato conviene modificare la teoria della gravità per renderla compatibile con scale microscopiche di lunghezza e quindi con la Meccanica Quantistica, dall'altro emergono motivazioni, che potremmo chiamare contemporanee, che suggeriscono la modifica dell'azione gravitazionale per risolvere alcuni problemi rilevati in cosmologia e astrofisica, come il problema della materia e dell'energia oscure, nonché quello della costante cosmologica e dell'inflazione.

I più recenti dati provenienti da differenti campagne osservative, come ad il satellite Planck che permise l'analisi delle anisotropia della radiazione di fondo cosmico, nonché lo studio delle supernovae Ia [27], suggeriscono che l'universo è composto al più da forme di materia-energia a noi ignote secondo il seguente bilancio: 4% di materia ordinaria barionica, 20% di materia oscura e 76% di energia oscura. La materia oscura viene ritrovata in particolare negli aloni esterni delle galassie e presenta quindi le stesse proprietà della materia ordinaria nel formare strutture, tuttavia non è stata ancora rilevata durante gli esperimenti nei laboratori terrestri. L'energia oscura, come già accennato, è invece completamente differente dalle usuali forme di materia-energia e non si raggruppa in strutture come il resto della materia (ordinaria e oscura). Un modo immediato per notare la peculiarità di questa forma di energia è attraverso la richiesta di natura fisica che la densità di energia di una certa regione di spazio sia definita positiva; la materia oscura viola la cosiddetta

ta *Strong Energy Condition*<sup>6</sup> a differenza della materia oscura e di quella ordinaria, il che spiega l'espansione accelerata dell'universo nell'attuale epoca cosmologica; infatti in aggiunta a tale accelerazione, va considerata un'altra epoca di espansione accelerata molto più rapida di quella attuale, avvenuta nell'universo primordiale in accordo con il paradigma inflazionario. L'inflazione cosmica è necessaria per risolvere problemi cosmologici come il problema dell'orizzonte, della piattezza, dei monopoli e della formazione di strutture a larga scala. Nella storia dell'universo, tra i due periodi di espansione accelerata, si interpongono due epoche quella in cui l'universo è dominato dalla materia e quella in cui è dominato da radiazione, durante le quali l'espansione è invece decelerata; il che spiegherebbe il passaggio da una fase di espansione molto accelerata (l'inflazione) e quella attuale.

Al di là delle motivazioni di natura puramente cosmologica, seguono motivazioni di natura astrofisica; la presenza di energia oscura è infatti stata scoperta già nel 1933, da Zwicky, nei cluster di galassie (che non potrebbero esistere senza tale materia aggiuntiva) e nel 1959 nelle singole galassie. Sebbene la natura della componente oscura dell'universo non sia affatto chiara, neanche in epoca recente, l'attuale modello cosmologico standard ne assume l'esistenza con il fine di spiegare per quanto possibile le osservazioni cosmologiche e astrofisiche; esso prende il nome di  $\Lambda$ CDM ( $\Lambda$  Cold Dark Matter) e assume l'esistenza della costante cosmologica  $\Lambda$  come energia oscura in aggiunta alla materia oscura "fredda" cioè con una velocità caratteristica tipicamente inferiore alla velocità della luce, affiancato dal paradigma inflazionario, basato usualmente su un certo campo scalare, l'*inflatone*, a cui si attribuisce il ruolo di aver espanso l'universo primordiale. Tale modello soffre di alcuni problemi o meglio pecca di motivazioni teoriche riguardo la controparte oscura dell'universo, il che lo rende un modello che si può definire empirico, basato sui dati. Un problema che va citato a indice di esempio per l'incongruenza interna del  $\Lambda$ CDM riguarda proprio la co-

<sup>6</sup>Considerando un fluido perfetto, in un sistema di coordinate tale per cui il tensore energia impulso è diagonale  $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$ , la *strong energy condition* implica che  $\rho + p \geq 0$  e che  $\rho + 3p \geq 0$ ; tali condizioni non vengono soddisfatte dall'energia oscura a causa della pressione negativa. Tuttavia ciò non basta a scartare l'energia come componente del contenuto di energia dell'universo, in quanto, in generale, le condizioni sull'energia sono condizioni "ragionevoli" matematicamente parlando, ma non costituiscono un vero e proprio limite fisico.

stante cosmologica, infatti questa è usualmente interpretata come l'energia del vuoto cosmico che emerge da una trattazione quantistica; tuttavia il valore che si ottiene dai dati è molto piccolo per essere attribuito a una certa energia del vuoto dei campi materiali. Inoltre una problematica molto meno tecnica è il problema della coincidenza che consiste l'impossibilità di giustificare il fatto che la densità di energia legata alla costante cosmologica sia paragonabile a quello della materia ordinaria proprio nell'epoca attuale. Si rivelano quindi necessarie prospettive differenti a quelle di forme "oscure" di energia-materia che permeano l'universo, come appunto l'estensione della teoria della gravitazione. Del resto sembra molto simile al già citato caso della precessione di Mercurio che si provò a spiegare assumendo l'esistenza di un pianeta invisibile, ma che come sappiamo ha costituito una delle prove che la teoria di Newton era ormai obsoleta in favore dell'affermazione della teoria di Einstein.

## 2.4 Le teorie $f(R)$

In questo lavoro di tesi ci concentreremo su una particolare classe di teorie estese della gravità, le teorie  $f(R)$  che rappresentano una ben nota alternativa alla Relatività Generale [28, 29, 30, 9, 31, 32, 6, 33, 34, 35, 36, 37, 18, 38, 39]. Esse sono teorie di ordine superiore che nascono dalla generalizzazione dell'azione di Hilbert-Einstein, in cui la densità di lagrangiana è una funzione dello scalare di curvatura. Includendo anche la presenza di materia occorre minimizzare l'azione *estesa*:

$$S_{f(R)} = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R) + 2\chi \mathcal{L}^{(m)}] \quad (2.25)$$

dove  $f(R)$  è una funzione analitica dello scalare di Ricci e  $\mathcal{L}^{(m)}$  è la lagrangiana della materia. Le teorie  $f(R)$  rappresentano una ben nota alternative alla materia oscura [17] che è anche capace di rappresentare l'inflazione cosmica avvenuta nelle prime fasi della storia dell'universo [36]. Per esempio, l'attuale espansione accelerata dell'universo può essere derivata evitando di assumere l'ipotesi che esista un qualche tipo di fluido cosmico con pressione negativa, modificando l'azione

gravitazionale. Infatti una delle proprietà delle teorie  $f(R)$  che la rende particolarmente versatile è quella di mimare l'effetto della presenza di un fluido perfetto nelle equazioni di campo di Einstein, con termini aggiuntivi di curvatura dovute ai termini di ordine superiore presenti nell'azione (2.25). Infatti, a titolo di esempio, considerando un fluido perfetto con pressione  $p$  e densità  $\rho$ , legate dall'equazione di stato tramite il parametro  $\omega$  come  $p = \omega\rho$  e un modello  $f(R) \simeq R^m$  è stata dimostrato [38, 40] che esiste una relazione chiusa tra il parametro  $\omega$  e l'esponente  $m$  dell'azione modificata. Questa proprietà può essere vista come un'alternativa in termini di curvatura a materia o energie oscure [36, 17, 37].

Inoltre, tale classe di teorie estese passa abilmente i test del sistema solare [41, 42] ed è in buon accordo con il limite delle basse energie, proprio come [33, 28] la teoria di Einstein. Ma le caratteristiche salienti delle teorie  $f(R)$  risiedono nelle equazioni di campo del quarto ordine. A causa del loro ordine superiore, tali equazioni fanno emergere interessanti peculiarità della gravità come il grado di libertà scalare aggiuntivo; infatti, come sarà approfondito nel prossimo capitolo, quando si studiano, le onde gravitazionali, emerge la presenza di una polarizzazione aggiuntiva rispetto alle due già presenti in Relatività Generale e si tratta appunto di una polarizzazione scalare.

In quanto segue, deriviamo le equazioni di campo estese per una generica funzione  $f(R)$ . Consideriamo l'azione (2.25), senza la lagrangiana della materia, per ottenere le equazioni di campo in assenza di sorgenti gravitazionali; minimizzando l'azione otteniamo:

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \sqrt{-g} f(R) &= \int d^4x [\delta(\sqrt{-g} f(R)) + \sqrt{-g} \delta(f(R))] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) \right] \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

dove  $'$  indica la derivata rispetto a  $R$ . Valutiamo ora questi integrali in un sistema di riferimento inerziale locale, dove i simboli di Christoffel (2.5) si annullano. Considerando

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \partial_\sigma (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - g^{\mu\sigma} \partial_\sigma (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu) \equiv \partial_\sigma W^\sigma, \quad (2.27)$$

dove abbiamo definito il tensore  $W^\sigma$  come

$$W^\sigma \equiv g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu. \quad (2.28)$$

Dobbiamo risolvere ognuno dei due termini dell'equazione (2.26); il secondo integrale è quindi

$$\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} f'(R) \partial_\sigma W^\sigma, \quad (2.29)$$

notiamo come il membro di sinistra può essere integrato per parti:

$$\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\sigma} [\sqrt{-g} f'(R) W^\sigma] - \int d^4x \partial_\sigma [\sqrt{-g} f'(R)] W^\sigma. \quad (2.30)$$

Il primo termine del membro di destra è una pura divergenza, quindi possiamo usare il teorema di Green e valutare il flusso del campo su una superficie di integrazione (ad esempio una sfera di raggio infinito) tale che su tale superficie possiamo supporre che il campo si annulli <sup>7</sup>. Quindi il suo flusso e il termine di divergenza nell'equazione (2.30) si annulla. L'equazione (2.30) diventa quindi:

$$\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = - \int d^4x \partial_\sigma [\sqrt{-g} f'(R)] W^\sigma. \quad (2.31)$$

Non resta che valutare il campo  $W^\sigma$ ; consideriamo la sua definizione (2.28), otteniamo

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma &= \delta \left[ \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \right] \\ &= \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} [\partial_\mu (\delta g_{\alpha\nu}) + \partial_\nu (\delta g_{\mu\alpha}) - \partial_\alpha (\delta g_{\mu\nu})], \end{aligned} \quad (2.32)$$

<sup>7</sup>Per ragioni fisiche stiamo considerando campi che a distanze asintotiche vanno a zero.

nel sistema di riferimento inerziale locale, risulta

$$\begin{aligned}\partial_\alpha g_{\mu\nu} &= \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0, \\ \delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu &= \frac{1}{2}g^{\nu\alpha}\partial_\mu(\delta g_{\nu\alpha}).\end{aligned}\tag{2.33}$$

Combinando le equazioni (2.32) e (2.33) otteniamo

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}[-\partial_\mu(g_{\alpha\nu}\delta g^{\alpha\sigma}) - \partial_\nu(g_{\mu\alpha}\delta g^{\sigma\alpha}) - g^{\sigma\alpha}\partial_\alpha(\delta g_{\mu\nu})] \\ &= \frac{1}{2}\partial^\sigma(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) - \partial^\mu(g_{\alpha\mu}\delta g^{\nu\alpha}) \\ &= -\frac{1}{2}\partial^\sigma(g_{\nu\alpha}\delta g^{\nu\alpha}),\end{aligned}\tag{2.34}$$

e il tensore  $W^\sigma$  vale

$$W^\sigma = \partial^\sigma(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) - \partial^\mu(g_{\mu\nu}\delta g^{\sigma\nu}).\tag{2.35}$$

Il secondo termine dell'equazione (2.30) può essere integrato per parti

$$\begin{aligned}\int d^4x\sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \\ \int d^4x\partial_\sigma[\sqrt{-g}f'(R)]&[\partial^\mu(g_{\mu\nu}\delta g^{\sigma\nu}) - \partial^\sigma(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})].\end{aligned}\tag{2.36}$$

integrando l'equazione (2.36), di nuovo, per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\int d^4x\sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \\ \int d^4xg_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial_\sigma[\sqrt{-g}f'(R)]\delta g^{\mu\nu} &- \int d^4xg_{\mu\nu}\partial^\mu\partial_\sigma[\sqrt{-g}f'(R)]\delta g^{\sigma\nu},\end{aligned}\tag{2.37}$$

dove abbiamo messo a zero il termine di pura divergenza, analogamente a come fatto in precedenza con il teorema di Green. Ora, avendone calcolato tutti i termini singolarmente possiamo calcolare

la variazione totale dell'azione (2.26) come:

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \sqrt{-g} f(R) &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ &+ \int d^4x \left[ g_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial_\sigma (\sqrt{-g} f'(R)) - g_{\sigma\nu} \partial^\mu \partial_\sigma (\sqrt{-g} f'(R)) \right] \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Annullando la variazione dell'azione otteniamo le equazioni di campo del vuoto [9]:

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{f(R)}{2} g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R). \quad (2.39)$$

Notiamo come le equazioni (2.39) possono essere scritte in una forma alternativa che ricorda quelle di Einstein (2.19), introducendo il tensore  $G_{\mu\nu}$ ,

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) + g_{\mu\nu} \frac{[f(R) - f'(R)R]}{2} \right\}. \quad (2.40)$$

Il membro di destra va trattato come un tensore energia-impulso efficace dovuto ai termini di curvatura di ordine superiore  $T_{\mu\nu}^{curv}$ , che agisce come un termine di sorgente nelle equazioni di Einstein analogamente a una sorgente materiale. Questo approccio è particolarmente utile nella pratica, in quanto permette un confronto diretto tra teoria estesa e la relatività. Se volessimo includere la presenza di materia, inserendo la lagrangiana  $\mathcal{L}^{(m)}$  all'interno dell'azione (2.25), otterremmo le seguenti equazioni di campo:

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} + [g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu] f'(R) = \chi T_{\mu\nu}. \quad (2.41)$$

La forma esatta delle equazioni (2.41) dipende ovviamente dalla scelta della funzione  $f(R)$ , notiamo che scegliendo  $f(R) = R$  otteniamo proprio le equazioni di campo di Einstein (2.23); durante questo lavoro di tesi studieremo in particolare il modello:

$$f(R) = R^{1+\epsilon}, \quad (2.42)$$

con  $|\epsilon| \ll 1$ , dove  $\epsilon$  rappresenta la deviazione dalla densità di lagrangiana di Hilbert-Einstein [43, 44]. Il modello (2.42) consente di deviare infinitesimamente dalla Relatività Generale. Il parametro  $\epsilon$  ha il ruolo di parametrizzare i termini delle equazioni di campo (2.41) dovuti alla modifica dell'azione gravitazionale. Nel capitolo 4 analizzeremo le equazioni delle onde gravitazionali linearizzando le equazioni di campo nel limite Post-Minkowskiano e quindi ad un regime di curvatura circa zero. Aspettandoci piccole deviazioni dalla relatività generale, la funzione (2.42) può essere sviluppata in serie di Taylor attorno a  $\epsilon \simeq 0$ . ottenendo [45] :

$$f(R) = R R^\epsilon \simeq R(1 + \epsilon(\log R)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \simeq R + \epsilon R \log R, \quad (2.43)$$

dove abbiamo utilizzato la derivata della funzione esponenziale  $\frac{d}{d\epsilon} R^\epsilon = R^\epsilon \log(R)$ . Notiamo come emerge un problema di dimensioni fisiche, in quanto il secondo termine al membro di destra dell'equazione (2.43) non ha le dimensioni dello scalare di curvatura  $R$ . Affiancheremo quindi al modello (2.42) un modello molto simile, in cui introduciamo il parametro  $R_*$  per rendere adimensionale l'argomento del logaritmo

$$f(R) = R + \epsilon R \log(R/R_*), \quad (2.44)$$

tale parametro può essere interpretato come un parametro libero del modello inteso come un valore di scala della curvatura. La scelta del modello (2.42), così come del modello (2.44) permette di controllare tramite  $\epsilon$  le deviazioni dalla Relatività Generale; infatti nel limite di  $\epsilon \rightarrow 0$  l'azione estesa si riduce a quella di Hilbert-Einstein.

Tale modelli verranno utilizzati nel capitolo 4 per calcolare le polarizzazioni delle onde gravitazionali in teoria estesa, in particolare per studiarne il limite per  $\epsilon \rightarrow 0$  tentando di recuperare le stesse polarizzazioni che emergono dalle equazioni di campo della Relatività Generale. Anticipiamo che questa operazione ci permetterà di capire se le soluzioni delle equazioni di campo (2.41) linearizzate si riducono a quelle della teoria di Einstein nel limite di  $\epsilon \rightarrow 0$  e, in particolare,

se il parametro  $\epsilon$  può "spegnere" la polarizzazione scalare aggiuntiva che emerge in teoria  $f(R)$  [30, 46].

## 2.5 L'equivalenza tra teorie $f(R)$ e scalar-tensoriali

Nelle teorie  $f(R)$  emerge un grado di libertà aggiuntivo, rispetto alla Relatività Generale, che è possibile identificare direttamente dalle equazioni di campo (2.41) e che è particolarmente evidente se si considera una delle proprietà peculiari di tale classe di teorie; esse sono infatti equivalenti alle cosiddette teorie *scalar-tensoriali*, una ben nota classe di teorie alternative in cui un campo scalare  $\phi$  è accoppiato allo scalare di Ricci  $R$ . Esse possiedono un grado di libertà scalare in aggiunta ai due tensoriali della relatività, da cui il nome scalar-tensoriali. Ci si può chiedere quindi in che termini le due classi di teorie sono equivalenti. Un criterio immediato riguarda proprio le equazioni di campo; infatti, partendo dalle equazioni di una delle due teorie, se con un opportuno cambio di variabili si riescono ad ottenere quelle di un'altra teoria, allora potremmo dire che tali teorie sono *dinamicamente equivalenti* [18]. Cioè descrivono la stessa dinamica e si dice che esse sono *rappresentazioni* diverse della stessa teoria. Dato che sia le teorie  $f(R)$  che quelle scalar-tensoriali derivano da un principio variazionale, tale equivalenza riguarda anche l'azione; in quanto segue, dimostreremo la loro equivalenza a partire proprio dall'azione gravitazionale. Considerando l'azione (2.25), questa può essere riscritta in termini di un *campo ausiliario*  $A$  come segue:

$$S_{f(R)} = \frac{1}{2\chi} \int d^4x \sqrt{-g} [f(A) + f'(A)(R - A) + 2\chi\mathcal{L}] . \quad (2.45)$$

La variazione rispetto ad campo  $A$  porta all'equazione:

$$f''(A)(R - A) = 0 , \quad (2.46)$$

quando  $f''(R) \neq 0$  vale  $A = R$  e l'azione (2.45) è uguale all'azione (2.25). Possiamo definire quindi il campo  $A$  come:

$$\phi = f'(A), \quad (2.47)$$

e definendo il potenziale  $V(\phi)$  come

$$V(\phi) = A(\phi)\phi - f(A(\phi)), \quad (2.48)$$

l'azione (2.45) diventa

$$S_{f(R)} = \frac{1}{2\chi} \int d^4x \sqrt{-g} [\phi R - V(\phi)] + S^{(m)}, \quad (2.49)$$

dove  $S^{(m)}$  è la parte dell'azione che rappresenta la materia. Di seguito riportiamo l'azione di una ben nota teoria scalar-tensoriale, quale la teoria di Brans-Dicke in presenza del potenziale  $V(\phi)$  :

$$S_{BD} = \frac{1}{2\chi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi + V(\phi) \right] + S^{(m)} = 0, \quad (2.50)$$

notiamo, infine, come le azioni (2.50) e (2.49) siano equivalenti quando  $\omega = 0$ . Partendo, quindi, dalla stessa azione e seguendo lo stesso principio variazionale, le equazioni di campo rappresenteranno la stessa teoria, ma attraverso rappresentazioni differenti; è opportuno quindi riportare le equazioni di campo che discendono dall'azione (2.50) con  $\omega = 0$  :

$$G_{\mu\nu} = \frac{\chi}{\phi} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2\phi} g_{\mu\nu} V(\phi) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi), \quad (2.51)$$

$$R = V'(\phi). \quad (2.52)$$

Facendo la traccia dell'equazione (2.51) e sostituendo  $R$  con  $V'(\phi)$ , otteniamo

$$3\square\phi + 2V(\phi) - \phi \frac{dV}{d\phi} = \chi T. \quad (2.53)$$

Data una sorgente gravitazionale con tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$ , la dinamica del campo scalare è data dall'equazione (2.53). Il Possiamo inoltre definire il potenziale efficace tramite la sua derivata

$$\frac{dV_{eff}}{d\phi} = \frac{1}{3} \left[ \phi \frac{dV}{d\phi} - 2V \right], \quad (2.54)$$

e integrandola rispetto al campo scalare  $\phi$ , otteniamo l'espressione del potenziale efficace

$$V_{eff}(\phi) = \frac{1}{3} \left[ \phi V(\phi) - 2 \int d\phi V(\phi) \right]. \quad (2.55)$$

L'equazione (2.53), in assenza di materia, può essere scritta in una forma che ricorda l'equazione di Klein-Gordon<sup>8</sup> attraverso il potenziale efficace (2.54):

$$\square\phi - \frac{dV_{eff}}{d\phi} = 0. \quad (2.56)$$

Il grado di libertà scalare può essere visto da un punto di vista di fisica delle particelle come un gravitone massivo con spin-0; la massa del gravitone ricopre un ruolo cruciale quando si studia la propagazione della polarizzazione scalare; infatti, una particella con una massa non nulla rappresenta un'interazione con un range finite più è alto il valore della massa, minore sarà il range. Una particella priva di massa, come i fotoni o i gravitoni "classici", sono legati ad una interazione con range infinito.

Il campo scalare  $\phi$  ha una massa [32], definita come:

$$m^2(\phi) \equiv \frac{d^2V_{eff}}{d\phi^2} = \frac{1}{3} \left( \phi \frac{d^2V}{d\phi^2} - \frac{dV}{d\phi} \right). \quad (2.57)$$

Per tenere conto della massa del campo scalare (2.57) nelle equazioni di campo, espandiamo la

---

<sup>8</sup>L'equazione di Klein-Gordon  $\square\phi + m^2\phi = 0$  è l'equazione di campo di una particella massiva di spin-0 e ricopre un ruolo fondamentale in teoria quantistica dei campi.

derivata del potenziale  $\frac{dV_{eff}}{d\phi}$  attorno al suo minimo  $V_{eff}^{(min)} \equiv V_{eff}(\phi_0)$  :

$$\frac{dV_{eff}}{d\phi} = \frac{dV_{eff}}{d\phi}|_{\phi_0} + \frac{d^2V_{eff}}{d\phi^2}|_{\phi_0}\phi + \dots = m_0^2\phi + \dots \quad (2.58)$$

L'equazione (2.56) può essere riscritta usando l'espansione (2.58) come

$$\square\phi - m_0^2\phi = \frac{\chi}{3}T. \quad (2.59)$$

Ora, possiamo calcolare il potenziale (2.55) e la massa efficace (2.57) per modello (2.42). Invertendo l'equazione (2.47), risulta

$$R(\phi) = \left( \frac{\phi}{1+\epsilon} \right)^{\frac{1}{\epsilon}}. \quad (2.60)$$

Il potenziale  $V(\phi)$  può essere calcolato dall'equazione (2.68) e risulta

$$V(\phi) = R(\phi)\phi - f(R(\phi)) = \epsilon \left( \frac{\phi}{1+\epsilon} \right)^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} = \epsilon R(\phi). \quad (2.61)$$

Quindi il potenziale efficace, dall'equazione (2.54), risulta

$$V_{eff}(\phi) = \frac{\epsilon}{3(1+2\epsilon)(1+\epsilon)^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}} \left[ \phi^{\frac{1+2\epsilon}{\epsilon}} - 2(1+2\epsilon)Cost \right], \quad (2.62)$$

dove  $Cost$  è una costante di integrazione e ponendola uguale a zero otteniamo

$$V_{eff}(\phi) = \frac{\epsilon}{3(1+2\epsilon)(1+\epsilon)^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}} \phi^{\frac{1+2\epsilon}{\epsilon}}. \quad (2.63)$$

La derivata prima del potenziale efficace (2.63) vale

$$\frac{dV_{eff}}{d\phi} = \frac{1}{3(1+\epsilon)^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}} \phi^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}, \quad (2.64)$$

e si annulla proprio per  $\phi = 0$ . Infatti, come è possibile vedere in figura 2.1, il potenziale efficace

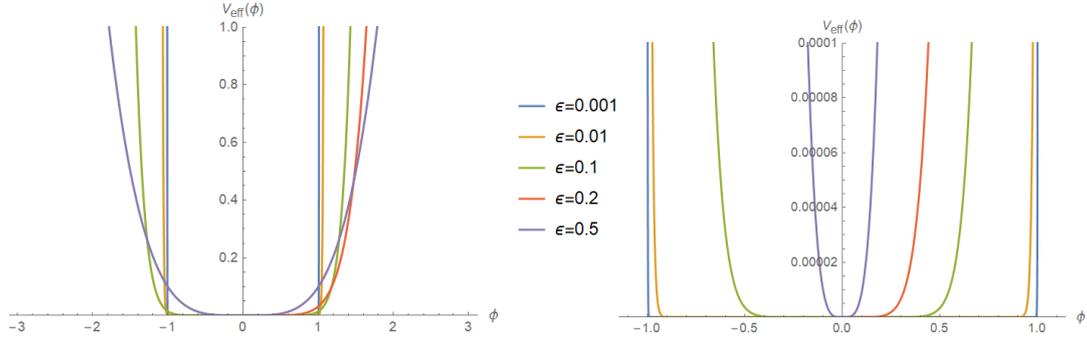


Figura 2.1: A sinistra è mostrato il potenziale efficace in funzione del campo scalare  $\phi$ ; a destra è mostrato un ingrandimento del grafico sull'origine.

presenta un minimo in  $\phi_0 = 0$ . La massa efficace può essere calcolata dall'equazione (2.57) derivando nuovamente l'equazione (2.64)

$$m^2(\phi) = \frac{1}{3(1+\epsilon)^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}} \frac{1+\epsilon}{\epsilon} \phi^{\frac{1}{\epsilon}}. \quad (2.65)$$

La massa efficace intorno al minimo  $\phi_0 = 0$  è quindi zero. Consideriamo il modello (2.44), ottenuto dallo sviluppo in serie di Taylor del modello (2.42). Scriviamo l'espressione campo scalare  $\phi$  per tale modello

$$\phi = 1 + \epsilon \log(R/R_*) + \epsilon \operatorname{sgn}(R) = 1 + \epsilon (1 + \log(R/R_*)) , \quad (2.66)$$

dove  $\operatorname{sgn}(R)$  è la *funzione segno* (uguale a  $-1$  se  $R < 0$  e a  $1$  se  $R > 0$ ) e per semplicità abbiamo posto  $R > 0$ . Scriviamo l'espressione dello scalare di curvatura in funzione del campo scalare, invertendo l'equazione (2.66)

$$R(\phi) = R_* e^{\frac{\phi-1-\epsilon}{\epsilon}}. \quad (2.67)$$

Il potenziale, secondo l'equazione (2.48) risulta

$$V(\phi) = \epsilon R(\phi), \quad (2.68)$$

notiamo che tale potenziale è simile a quello dell'equazione (2.68) e l'unica differenza risiede nella scrittura di  $R(\phi)$ , proprio perché il modello (2.44) discende direttamente da (2.42) e ne costituisce una particolarizzazione per  $R$  positivi ed  $\epsilon$  piccoli.

Il potenziale efficace definito dall'equazione (2.55) risulta

$$V_{eff}(\phi) = \frac{R_*}{3} \left[ \frac{\epsilon\phi - 3\epsilon^2}{3} e^{\frac{\phi-1-\epsilon}{\epsilon}} + cost \right], \quad (2.69)$$

dove  $cost$  è una costante di integrazione. Derivando il potenziale efficace otteniamo

$$\frac{dV_{eff}}{d\phi} = -\frac{R_*}{3} (2\epsilon - \phi) e^{\frac{\phi-1-\epsilon}{\epsilon}}, \quad (2.70)$$

che si annulla per

$$\phi = 2\epsilon, \quad (2.71)$$

possiamo concludere che il potenziale efficace presenta un punto critico in  $\phi_0 = 2\epsilon$ , in particolare rappresenta un punto di minimo. La costante di integrazione  $cost$  presente nell'equazione (2.69) può essere fissata imponendo che la derivata del potenziale efficace rispetto al parametro  $\epsilon$  si annulli anch'essa nel minimo  $\phi_0 = 2\epsilon$ . Per farlo sostituiamo la funzione  $f(\epsilon)$  al posto della costante  $cost$  nell'equazione del potenziale efficace (2.69) ottenendo:

$$V_{eff}(\phi) = \frac{R_*}{3} \left[ \frac{\epsilon\phi - 3\epsilon^2}{3} e^{\frac{\phi-1-\epsilon}{\epsilon}} + f(\epsilon) \right]. \quad (2.72)$$

Derivando l'equazione (2.72) rispetto ad epsilon e ponendola uguale a zero otteniamo:

$$f(\epsilon) + \epsilon f'(\epsilon) = -\frac{R_*}{3} e^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} (2\epsilon + 1), \quad (2.73)$$

la cui soluzione è

$$f(\epsilon) = -\frac{R_*}{3} \epsilon e^{1-\frac{1}{\epsilon}} + A/\epsilon, \quad (2.74)$$

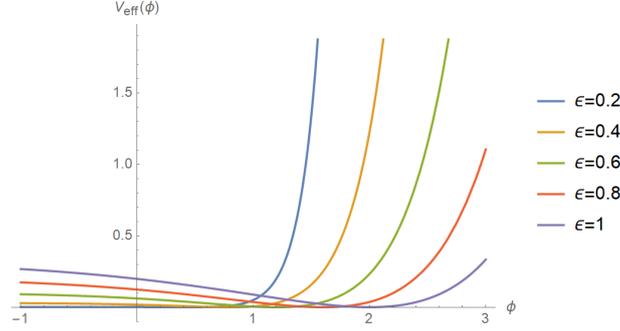


Figura 2.2: Il potenziale efficace in funzione del campo  $\phi$ . Per semplicità abbiamo fissato  $R_* = 1$ . Notiamo come tale grafico sia circa equivalente al ramo destro del grafico in figura 2.1.

scegliendo la costante  $A = 0$  per non incorrere in divergenze per  $\epsilon \rightarrow 0$ , il potenziale efficace (2.72) risulta:

$$V_{eff}(\phi) = \frac{R_*}{3} \left[ \frac{\epsilon\phi - 3\epsilon^2}{3} e^{\frac{\phi-1-\epsilon}{\epsilon}} + \epsilon e^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \right]. \quad (2.75)$$

Nella figura 2.2 possiamo osservare il grafico del potenziale efficace (2.75) e il suo minimo  $\phi_0$ . Noto il potenziale efficace e il suo minimo, possiamo calcolare la massa efficace del campo scalare (2.57) in  $\phi_0$

$$m_0^2 = \frac{R_*}{3} e^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}. \quad (2.76)$$

Notiamo come in generale la massa (2.76) è diversa da zero ed è proprio zero nel limite di  $\epsilon \rightarrow 0$ .

## Capitolo 3

# Le onde gravitazionali: teoria e conferme sperimentali

### 3.1 La linearizzazione delle equazioni di Einstein

Consideriamo uno spazio-tempo descritto dalla metrica  $g_{\mu\nu}$  tale che il campo gravitazionale possa essere separato in due elementi: il background  $\bar{g}_{\mu\nu}$  e la perturbazione  $h_{\mu\nu}$ . Le onde gravitazionali emergono naturalmente dalle equazioni di campo della Relatività Generale dopo un'operazione di linearizzazione in termini della perturbazione  $h_{\mu\nu}$  che rappresenta proprio il campo gravitazionale legato all'onda gravitazionale. In quanto segue esamineremo il campo gravitazionale supponendo che il background sia uno spazio-tempo piatto, cioè nel limite *post-Minkowskiano*:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\alpha\beta} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

con  $h_{\mu\nu} \ll 1$ . Questa scomposizione sarà particolarmente utile per selezionare dalle equazioni di campo solo la parte che interessa la perturbazione  $h_{\mu\nu}$ . Ma prima di procedere, va chiarito in che modo uno spazio-tempo di background potrebbe essere piatto quando studiamo un sistema fisico,

come per esempio un sistema binario di stelle di neutroni o di buchi neri. Di certo, in prossimità di tali sorgenti il campo gravitazionale non è per nulla trascurabile, per cui si commetterebbe un errore nel supporre che lo spazio-tempo sia piatto; come fa un sistema a produrre uno spazio-tempo piatto? La risposta giace proprio nella distanza a cui vogliamo misurare il campo gravitazionale, infatti al crescere della distanza, l'intensità del campo gravitazionale diminuisce fino a diventare trascurabile. Ma allora perché non dovrebbe essere trascurabile anche il campo gravitazionale associato alle onde gravitazionali generate dallo stesso ipotetico sistema situato a distanza praticamente infinita dai nostri laboratori? In altre parole, come facciamo a separare il background e le onde gravitazionali e perché godono di trattamenti diversi? In generale, non esiste un modo che non risulti ambiguo nel decidere a priori quale sia il background e quale sia la perturbazione, tuttavia possiamo farci guidare da ragioni fisiche; infatti, proprio come accade, ad esempio, per le onde del mare, le increspature sulla superficie vengono chiaramente identificate come onde, mentre il mare vero è proprio ciò che vi è al di sotto; la separazione naturale tra background e onda gravitazionale emerge proprio quando c'è una chiara separazione nella scala, proprio come avviene tra il mare che possiamo osservare tranquillamente su scale di chilometri e le sue onde che increspano l'acqua su scale molto più piccole. Per esempio, consideriamo una metrica di background  $\bar{g}_{\mu\nu}$  che varia su una scala tipica di lunghezza  $L_B$ , sulla quale supponiamo esista una piccola perturbazione caratterizzata da una certa lunghezza di scala che per le onde gravitazionali possiamo identificare con la lunghezza d'onda  $\lambda$  tale che la lunghezza d'onda ridotta<sup>1</sup>  $\bar{\lambda} = \lambda/2\pi$  risulta:

$$\bar{\lambda} \ll L_B. \quad (3.2)$$

In questo caso la perturbazione  $h_{\mu\nu}$  ha il significato fisico di una serie di increspature su un background "liscio". In maniera analoga, una simile distinzione tra background e perturbazione può essere fatta anche in termini di frequenze. Se  $\bar{g}_{\mu\nu}$  varia su scale temporali che corrispondono a una frequenza massima pari a  $f_B$  e, invece,  $h_{\mu\nu}$  è una perturbazione piccata in  $f$ , allora possiamo

<sup>1</sup>Per una funzione oscillante  $f(x)$  che oscilla con una fase  $e^{ikx}$ , come nel caso di un'onda con numero d'onda  $k$ , la lunghezza tipica su cui tale funzione varia è  $\lambda/2\pi = 1/k = \bar{\lambda}$  invece che  $\lambda$ , nel senso che  $|df/dx| = (1/\bar{\lambda})|f|$ .

chiaramente distinguere tra i due se:

$$f \gg f_B. \quad (3.3)$$

Notiamo infine che (3.3) e (3.2) costituiscono due condizioni indipendenti poiché  $f_B$  ed  $L_B$  del background sono tra loro indipendenti, sebbene per la parte di perturbazione che identifichiamo come un'onda le due siano invece inversamente proporzionali  $\lambda = c/f$ ; per cui basta una sola delle due condizioni per poter chiaramente separare background e perturbazione.

Una volta che specificato come separare la perturbazione dal background possiamo procedere alla linearizzazione delle equazioni (2.23) introducendovi  $h_{\mu\nu}$  definita in (3.1) e trascurando tutti i termini  $\mathcal{O}(h^2)$ . Per prima cosa vanno calcolati il tensore di Ricci e lo scalare di curvatura linearizzati. Per farlo partiamo dal tensore di Riemann definito nell'equazione (2.14), dove osserviamo due tipi di termini " $\partial\Gamma$ " e " $\Gamma\Gamma$ ". Riguardo il primo, possiamo supporre che sia dello stesso ordine di grandezza di  $\Gamma$  in  $h_{\mu\nu}$ , mentre il secondo è nell'ordine di  $\Gamma^2$ . Espandendo l'equazione (2.5), otteniamo quattro tipi di termini: il prodotto di  $\eta^{l\sigma}$  con la derivata di  $\eta$ , ma questo termine è zero perché  $\eta_{\mu\nu}$  non dipende dalle coordinate spazio-temporali; il prodotto di  $h^{l\sigma}$  con la derivata di  $\eta$ , anche questo termine è zero; il termine quadratico  $h^{l\sigma}h_{\mu\sigma,\nu}$  va come  $h^2$  e possiamo trascurarlo<sup>2</sup>; l'ultimo termine è l'unico che non trascuriamo. Quindi possiamo scrivere i simboli di Christoffel linearizzati (2.5) come

$$\Gamma_{\mu\nu}^l = \frac{1}{2}\eta^{l\sigma}(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}). \quad (3.4)$$

Ora, possiamo procedere con la stessa operazione per il tensore di Riemann (2.14). I termini  $\partial\Gamma$  sono gli unici che non trascuriamo e il tensore di Riemann linearizzato risulta:

$$\tilde{R}_{\mu\kappa\nu}^{\sigma} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}. \quad (3.5)$$

Il tensore di Ricci risulta dalla contrazione degli indici  $\sigma$  e  $\rho$  del tensore di Riemann linearizzato

---

<sup>2</sup>Stiamo supponendo che la perturbazione e le sue derivate siano dello stesso ordine di grandezza.

definito dall'equazione (3.5):

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\rho} (h_{\nu\rho,\mu\sigma} - h_{\sigma\rho,\mu\nu} + h_{\mu\sigma,\rho\nu} - h_{\mu\nu,\rho\sigma}) , \quad (3.6)$$

lo scalare di curvatura può essere calcolato usando semplicemente la sua definizione  $\tilde{R} = \eta^{\sigma\nu}\tilde{R}_{\sigma\nu}$ . Per ottenere equazioni di campo che ricordano quelle di un'onda, occorre sfruttare l'invarianza della Relatività Generale rispetto al gruppo di tutte le possibili trasformazioni di coordinate,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu , \quad (3.7)$$

dove  $x'^\mu$  è una funzione arbitraria di  $x^\mu$ , più precisamente richiediamo che sia invertibile, differenziabile e con inversa differenziabile, cioè richiediamo che  $x'^\mu$  rappresenti un diffeomorfismo.

Per la trasformazione di coordinate (3.7), la metrica si trasforma come:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) , \quad (3.8)$$

faremo riferimento a tale simmetria come alla *simmetria di gauge* della Relatività Generale. Per fissare la gauge scegliamo un sistema di riferimento tale che le equazioni (3.1) valgano per una regione di spazio sufficientemente estesa. Ma la scelta del sistema di riferimento non fissa completamente la gauge; infatti, resta una certa libertà di gauge. A tal proposito, consideriamo la trasformazione di coordinate

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) , \quad (3.9)$$

dove  $|\xi^\mu|$  e le sue derivate sono dello stesso ordine di grandezza di  $|h^{\mu\nu}|$ . In questo modo il tensore  $h_{\mu\nu}$  si trasforma secondo le equazioni (3.8):

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) , \quad (3.10)$$

e se vale  $|h_{\mu\nu}| \sim |\partial_\mu \xi_\nu| \ll 1$ , allora vale anche  $|h'_{\mu\nu}| \ll 1$  e quindi tale famiglia di diffeomorfismi

costituisce una simmetria propria della teoria linearizzata.

Per scrivere le equazioni di campo linearizzate in maniera compatta conviene definire:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (3.11)$$

la cui traccia è  $\bar{h} = h - 2h$ . Possiamo quindi invertire le equazioni (3.11)

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}. \quad (3.12)$$

Le equazioni di campo linearizzate possono essere quindi derivate utilizzando il tensore di Riemann (3.5), il tensore di Ricci (3.6) e lo scalare di Ricci linearizzati insieme all'equazione (3.12) in termini di  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , ottenendo:

$$-\frac{1}{2}(\square\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^\rho\partial^\sigma\bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho\partial_\nu\bar{h}_{\mu\rho} - \partial^\rho\partial_\mu\bar{h}_{\nu\rho}) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (3.13)$$

Notiamo che non abbiamo ancora fissato la gauge. Per la libertà di gauge possiamo fissare 4 condizioni sulla metrica. Infatti l'equazione (3.10) può essere scritta nella forma:

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - (\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\xi^\rho), \quad (3.14)$$

e quindi

$$\partial\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow (\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu})' = \partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} - \square\xi_\mu. \quad (3.15)$$

Dall'equazione (3.15) risulta che possiamo fissare  $(\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu})' = 0$  scegliendo  $\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} = \square\xi_\mu$  [47].

Possiamo quindi fissare la gauge:

$$\partial^\rho\bar{h}_{\rho\nu} = 0. \quad (3.16)$$

Se usiamo le condizioni (3.16), le equazioni di campo (3.13) assumono una forma particolarmente

semplice:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.17)$$

che costituisce l'equazione delle onde per il campo  $h_{\mu\nu}$  e rappresenta il punto di partenza del formalismo utilizzato per trattare le onde gravitazionali.

### 3.2 Le onde gravitazionali

Come abbiamo visto nella sezione precedente, le equazioni di campo di Relatività Generale includono in maniera naturale un'equazione delle onde, proprio come succede in elettrodinamica dove combinando le equazioni di Maxwell si ottiene un'equazione delle onde del tipo

$$\square A_\mu = 0, \quad (3.18)$$

dove  $A_\mu$  è il quadri-potenziale del campo elettromagnetico. Ogni volta che vogliamo descrivere le onde elettromagnetiche nel vuoto, dobbiamo risolvere le equazioni (3.18), la cui soluzione elementare è chiamata *onda piana*, oppure *onda monocromatica*, definita come

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = E_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad (3.19)$$

dove  $E$  è il campo elettrico. Tale onda piana si propaga in una certa direzione  $\hat{\mathbf{k}}$ , perpendicolare alla direzioni dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Ma il campo elettromagnetico gode di un'altra importante proprietà, il campo  $E$  oscilla nel piano ortogonale a  $\hat{\mathbf{k}}$  secondo la sua *polarizzazione*. I fisici hanno condotto negli anni numerosi studi riguardo il campo elettromagnetico e tali studi pongono le basi per lo studio fondamentale di ogni tipo di radiazione. In maniera del tutto analoga, la radiazione gravitazionale viene trasmessa da una particella chiamata *gravitone*. In relatività, il gravitone si propaga nel vuoto con la stessa velocità della luce, proprio perché le equazioni sono simili. Infatti,

le equazioni (3.17) nel vuoto risultano

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (3.20)$$

dove  $\square = 1/c^2 \partial_t^2 - \nabla_x$ . Le soluzioni elementari della (3.20) sono onde gravitazionali piane che si propagano in una certa direzione  $\hat{k}$ , proprio come accade nel caso delle onde elettromagnetiche. L'effetto dell'onda gravitazionale  $\bar{h}_{\mu\nu}$  si manifesta solo nel piano perpendicolare alla direzione di propagazione. Notiamo che, diversamente dal campo elettromagnetico, il campo gravitazionale è descritto da un tensore di rango due, che possiamo identificare come una matrice  $4 \times 4$  per un totale di 16 componenti. Per determinare completamente le proprietà dell'onda gravitazionale bisognerebbe fissare 16 componenti del tensore  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , tuttavia supponendo che la metrica sia simmetrica, tali componenti passano da 16 a 10; se inoltre consideriamo i 4 vincoli imposti dalla scelta di gauge (3.16), possiamo ridurre ulteriormente i gradi di libertà del campo gravitazionale, passando da 10 a 6 componenti indipendenti; inoltre dalla libertà di gauge (3.10) possiamo imporre altre 4 vincoli per un totale quindi di 2 componenti indipendenti del campo gravitazionale. Ciò garantisce che il tensore dell'onda gravitazionale sia sempre trasverso e a traccia nulla (TT)<sup>3</sup>, tale che  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ . Nella gauge TT, il tensore  $h_{ij}$  ha solo due componenti indipendenti, cioè le due polarizzazioni "cross" e "plus" [14, 47, 10, 12, 48, 49]. Possiamo scrivere le onde piane nella forma

$$h_{ij}^{\text{TT}}(x) = e_{ij}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.21)$$

dove  $e_{ij}$  è il tensore delle polarizzazioni [50]; in un sistema di riferimento in cui la direzione  $z$  coincide con la direzione di propagazione  $\hat{k}$ , risulta

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \cos[\omega(t - z/c)]. \quad (3.22)$$

---

<sup>3</sup>Questa particolare gauge è peculiare della Relatività Generale e, come vedremo nel prossimo capitolo, non può essere recuperata nel caso  $f(R)$ , dove il campo gravitazionale delle onde gravitazionali sarà determinato da 3 componenti indipendenti, data la presenza del grado di libertà scalare.

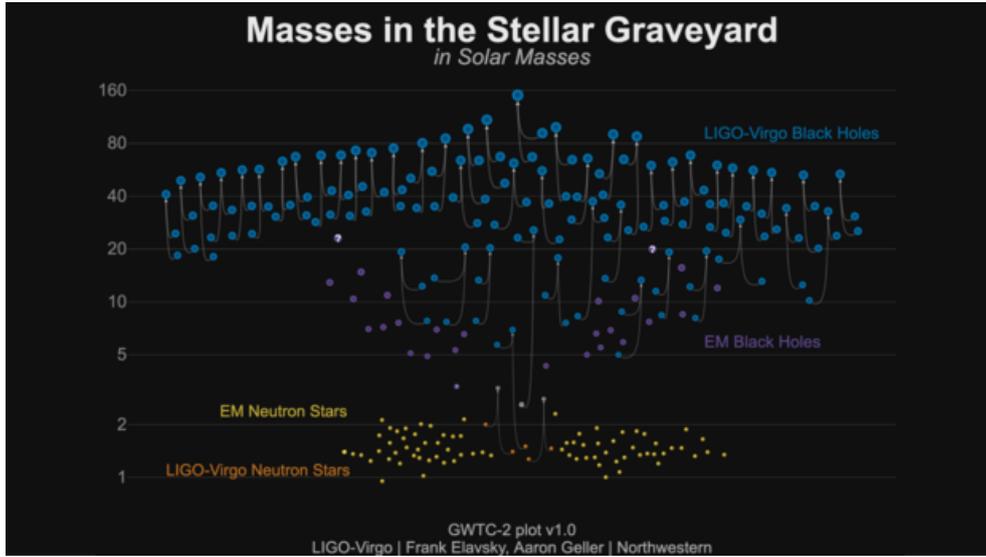


Figura 3.1: Questo grafico mostra il numero totale e le masse dei buchi neri e delle stelle di neutroni che si sono fusi (in blu) insieme ai buchi neri precedentemente noti (in viola).

Consideriamo l'equazione (2.17), nel sistema di riferimento proprio del detector la deviazione geodetica vale [47]

$$\ddot{\xi}^i = \frac{1}{2} \ddot{h}^{TT} \xi^j \quad (3.23)$$

In tale sistema di riferimento, come leggiamo direttamente dalla (3.23), l'onda gravitazionale agisce nel piano  $xy$ , quindi, un ipotetico corpo di prova inizierebbe a deformarsi in fase con l'onda gravitazionale solo nel piano  $xy$ , ma non lungo la direzione  $z$ . In un interferometro con i bracci di lunghezza  $L$ , la variazione di lunghezza<sup>4</sup>  $\delta L$  dovuta al passaggio di un'onda gravitazionale vale<sup>5</sup> circa  $\frac{\Delta L}{L} \simeq h_+$ .

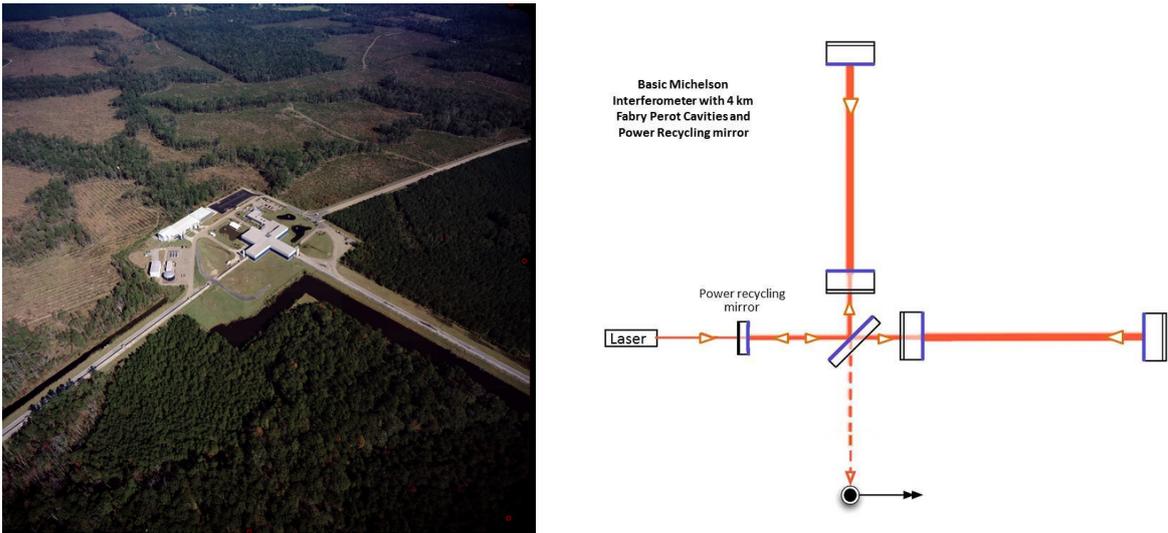


Figura 3.2: A sinistra vediamo l'interferometro sito nelle campagne di Livingstone; nell'immagine di destra è rappresentato schematicamente l'interferometro di Michelson con la cavità laser di Fabry-Perot presente nei bracci; il laser percorre tutta la lunghezza del braccio prima di essere riflesso nella direzione opposta, per poi propagarsi ancora per altri 4 km prima di essere nuovamente riflesso. Questo processo permette al laser di percorrere una distanza molto più lunga della reale lunghezza dei bracci, per una lunghezza equivalente molto maggiore della lunghetta effettiva.

### 3.3 Gli esperimenti sulle onde gravitazionali

Il primo interferometro gravitazionale mai costruito è stato il *Laser Interferometer Gravitational-waves Observatory* (LIGO), sito negli Stati Uniti; venne progettato con lo scopo di arricchire il campo dell'astrofisica gravitazionale [51] (vedi la figura 3.1) con la rivelazione diretta di onde gravitazionali; la distorsione dello spazio-tempo viene misurata direttamente con il metodo dell'interferometria laser, con particolare attenzione rivolta al comparto ottico, altamente ingegnerizzato. Ognuno dei due interferometri è fatto da due lunghi bracci di 4 km di lunghezza, orientati con la tipica forma a "L", come possiamo vedere in figura 3.2, in cui sono collocate le ugualmente lunghe camere a vuoto che permettono un passaggio ottimale del laser. L'interferometro può misurare l'oscillazione della lunghezza del percorso fatto dalla luce all'interno dei bracci al passaggio di un'onda gravitazionale, un moto che si compie su una lunghezza tipica circa 10000 volte più piccola dello spessore di un protone  $\sim 0.8 \times 10^{-15}$ , con un'incredibile errore relativo. Per capirne l'ordine di grandezza, equivale a commettere un errore assoluto pari allo spessore di un capello nel misurare la distanza della stella più vicina a noi  $\sim 4.2ly$ . LIGO comprende quattro strutture sul territorio statunitense, due interferometri, siti a una distanza di 3002 km l'uno dall'altro e due centri di ricerca che lavorano per far funzionare gli interferometri in maniera sincrona. Il segnale misurato da ogni interferometro è lo stesso a parte una differenza di fase pari a  $\pi$ , questo accorgimento permette ai ricercatori di avere un doppio controllo su un eventuale segnale di un'onda gravitazionale. La misura del passaggio dell'onda risulta in certo senso unica, i due interferometri si comportano come un singolo interferometro ad alta precisione. Tuttavia, questa configurazione sfavorisce la misura di una polarizzazione longitudinale e questo, come vedremo, rende difficile la rivelazione della polarizzazione aggiuntiva che emerge nelle teorie  $f(R)$ , così come per altre teorie di ordine superiore, e soltanto una rete completa mondiale di interferometri lo renderebbe possibile [52].

---

<sup>4</sup>Tale variazione non va intesa come una distanza coordinata, ma è la variazione della distanza propria  $ds$  tra gli elementi ottici dell'interferometro (specchio e beam-splitter).

<sup>5</sup>Se fissiamo  $h_{\times} = 0$ .

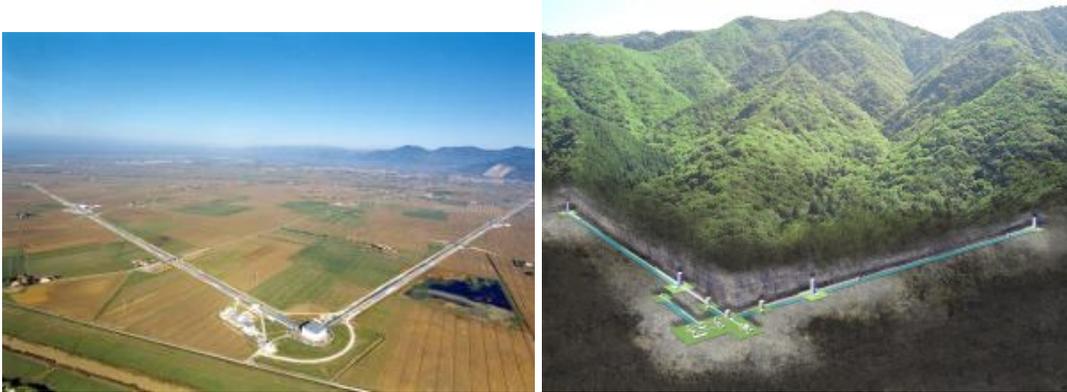


Figura 3.3: A sinistra possiamo vedere la vista aerea dell'interferometro VIRGO, a destra è riportata l'illustrazione dell'interferometro KAGRA nella miniera di Kamioka.

Il secondo osservatorio gravitazionale mai progettato è VIRGO, sito in Italia a Cascina (vedi la figura 3.3). A differenza di LIGO, è costituito da bracci di 3km, ma grazie alla cavità risonante di Fabry-Perot la lunghezza ottica del fascio laser si estende quasi a 1000 km. Negli ultimi anni la collaborazione VIRGO ha lavorato insieme a LIGO nel campo della rivelazione di onde gravitazionali [53]; l'ultima run di osservazioni, chiamata O3, i cui dati, raccolti su un periodo di un anno, sono stati rilasciati ad Aprile, ha reso la rete LIGO e VIRGO, l'osservatorio di onde gravitazionali più sensibile fino ad oggi. I tre detectors registrano dati continuamente comportandosi come un unico osservatorio globale. Come ci si aspettava, i risultati scientifici provenienti dalla run O3, hanno rilevato segnali provenienti da nuove sorgenti, come il merging di binarie miste fatte da un buco nero e da una stella di neutroni [54]. Inoltre, dato il continuo lavoro di ottimizzazione delle strutture, il merging di buchi neri binari è diventato abbastanza comune, vengono infatti rilevati con la frequenza di circa uno a settimana.

L'interferometro di più recente progettazione è il *Kamioka Geavitational Wave Detector* (KAGRA); il terzo osservatorio di onde gravitazionali esistente è sito in Giappone nel prossimo futuro lavorerà con LIGO e VIRGO durante la campagna di osservazioni denominata O4. Ma gode di una peculiarità rispetto agli interferometri occidentali, esso infatti è il primo interferometro costruito

### 3.4. IL FUTURO DELL'ASTRONOMIA GRAVITAZIONALE, L'INTERFEROMETRO LISA49

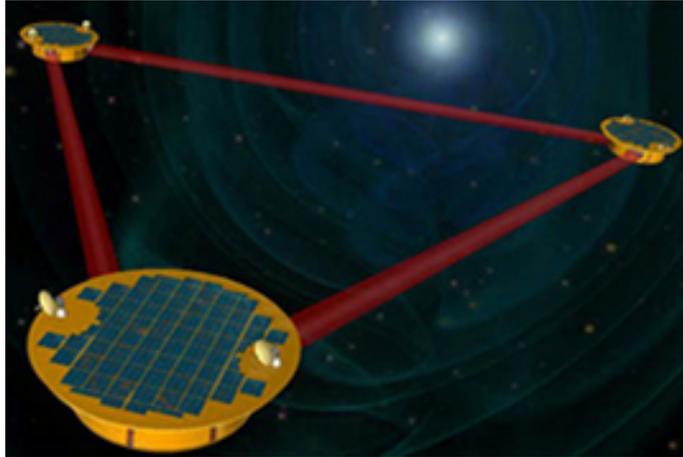


Figura 3.4: Un'illustrazione delle tre sonde spaziale che formano l'interferometro LISA. Questo sistema a 3-corpi orbiterà attorno alla Terra nei prossimi anni. Proprio come è successo nel passaggio dai telescopi tradizionali a quelli spaziali, LISA sarà libera dei canali di rumore presenti sulla Terra, il che lo renderà capace di misure drasticamente più sensibili e su una banda di frequenze ben più ampia.

sottoterra, nelle profondità della miniera di Kamioka-cho, nella città di Hida (vedi la figura 3.3). L'interferometro giapponese, presenta inoltre specchi raffreddati criogenicamente e rappresenta quello, attualmente, più avanzato tecnologicamente. Allo stato attuale si stima che sia in grado almeno di rilevare gli stessi sistemi coalescenti rilevati nelle run precedenti dagli altri interferometri [55]. Avere un terzo interferometro attivo risiede nell'ampliare l'attuale rete di antenne gravitazionali; infatti, la rilevazione simultanea di un'onda gravitazionale fatta con una rete di 3 detector (3G), permette di triangolare il segnale e determinare con maggiore precisione la direzione e la distanza della sorgente, rispetto a una rete 2G.

### 3.4 Il futuro dell'astronomia gravitazionale, l'interferometro LISA

Il Laser Interferometer Space Antenna (LISA) è un rivelatore di onde gravitazionali che verrà mandato in orbita nel prossimo futuro. È composto da tre sonde spaziali che disteranno milioni di

3.4. IL FUTURO DELL'ASTRONOMIA GRAVITAZIONALE, L'INTERFEROMETRO LISA50

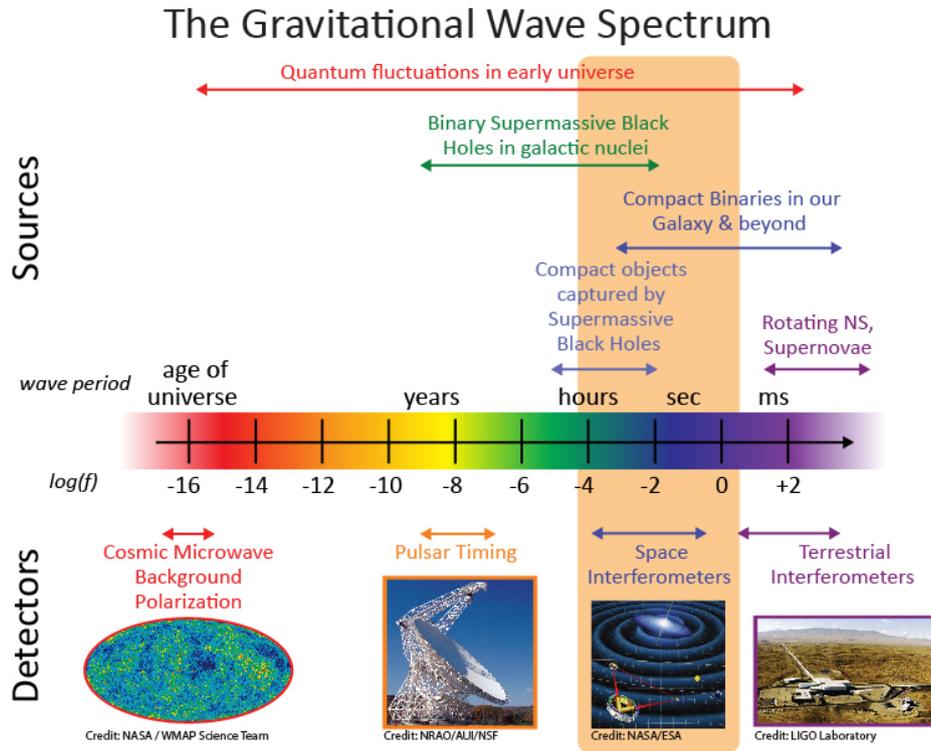


Figura 3.5: In figura è mostrato lo spettro delle onde gravitazionali nel contesto nell'astronomia multi-messaggera, l'interferometro spaziale LISA copre una banda compresa tra gli interferometri terrestri e le pulsar-timing-array; sarà capace di rilevare sistemi coalescenti, nonché il fondo stocastico di onde gravitazionali, che sono inosservabili dalla Terra .

km le une dalle altre (vedi la figura 3.4). Tali sonde emetteranno dei raggi laser che verranno fatti rimbalzare da una sonda all'altra ricercando segnali di onde gravitazionali dalla distorsione dello spazio-tempo in cui si propaga il laser.

LISA opererà in un range di basse frequenze comprese tra  $0.1 \text{ mHz}$  e  $1 \text{ Hz}$  ( per confronto, il range di frequenze di LIGO è di  $10 - 1000 \text{ Hz}$ ), vedi la figura 3.5. La differenza principale con gli osservatori gravitazionali terrestri risiede nel fatto che LISA potrà misurare onde gravitazionali con una lunghezza d'onda molto maggiore, che corrisponde a oggetti in orbite molto più ampie di quelle rivelate dalle scorse run da LIGO e da VIRGO, ampliando ulteriormente il campo dell'astro-

### 3.4. IL FUTURO DELL'ASTRONOMIA GRAVITAZIONALE, L'INTERFEROMETRO LISA51

nomia gravitazionale, riuscendo potenzialmente a rivelare un range più ampio di sorgenti di onde gravitazionali. Si prevede che, dallo spazio, si riuscirà ad evitare il rumore sismico che attualmente limita l'osservazione di sistemi come binarie ultra-compatte nella nostra Galassia, i rari merger di buchi neri supermassicci al centro di altre galassie e gli *extreme mass-ratio inspirals* [56]. Inoltre permetterà di misurare per la prima volta il fondo stocastico di onde gravitazionali generato dalla sovrapposizione di onde gravitazionali emesse nella nostra galassia, o in tutto il resto l'universo, oppure da meccanismi di natura cosmologica. Tra tutte le varie possibilità offerte da LISA c'è quella di testare la Relatività Generale a livelli di sensibilità, nonché per regimi della gravità, ancora inesplorati, testando tra l'altro le polarizzazioni non previste dalla teoria di Einstein.

## Capitolo 4

# Le onde gravitazionali nelle teorie $f(R)$

### 4.1 La linearizzazione delle equazioni di campo

Nelle teorie estese della gravitazione, le equazioni di campo sono differenti da quelle della Relatività Generale e figurano alcuni termini aggiuntivi; la procedura di linearizzazione delle equazioni di campo (2.39) varia leggermente, dobbiamo infatti partire dalle equazioni di campo scritte in forma scalar-tensoriale (2.51). Per linearizzare le equazioni di campo espandiamo il tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  e il campo scalare  $\phi$  su un background piatto:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad , \quad \phi = \phi_0 + \delta\phi . \quad (4.1)$$

Terremo tutti i termini del primo ordine in  $h_{\mu\nu}$  e  $\delta\phi$ , ciò significa che trascureremo tutti i termini del tipo  $\mathcal{O}((h_{\mu\nu})^2)$ ,  $\mathcal{O}(h_{\mu\nu}\delta\phi)$  e  $\mathcal{O}(\delta\phi^2)$ . Considerando le equazioni (2.51), moltiplicandole per  $\phi$ , otteniamo

$$\phi G_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(\phi) = \chi T_{\mu\nu} . \quad (4.2)$$

Consideriamo il primo termine del membro di sinistra  $G_{\mu\nu}\phi$ , al primo ordine otteniamo:

$$(\phi_0 + \delta\phi) \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) = \phi_0 \left( \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\tilde{R} \right), \quad (4.3)$$

dove  $\tilde{R}_{\mu\nu}$  è il tensore di Ricci linearizzato (3.6) e  $\tilde{R}$  la sua traccia. Considerando il secondo termine del membro di sinistra nell'equazione (4.2), notiamo la presenza di due operatori differenziali che agiscono su  $\phi$ , quindi possiamo sostituire a  $\phi$  direttamente  $\delta\phi$  ( $\phi_0$  è costante), ottenendo:

$$(g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)(\phi_0 + \delta\phi) = (\eta_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu)\delta\phi. \quad (4.4)$$

Il terzo termine al membro di sinistra dell'equazione (4.2), al primo ordine risulta:

$$\frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(\phi_0 + \delta\phi) \simeq \frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(\phi_0) = 0, \quad (4.5)$$

dove abbiamo posto  $V(\phi_0)$  uguale a zero. Quindi le equazioni di campo (4.2) linearizzate sono:

$$\phi_0\tilde{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial_\nu\delta\phi - \eta_{\mu\nu}\square\delta\phi, \quad (4.6)$$

dove  $\tilde{G}_{\mu\nu}$  è il tensore di Einstein linearizzato. Per scriverle in maniera compatta possiamo identificare la polarizzazione scalare (o modo scalare) [33, 30, 9, 57, 58] con

$$h_f = \frac{\delta\phi}{\phi_0}, \quad (4.7)$$

quindi le equazioni di campo (4.6) diventano:

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial_\nu h_f - \eta_{\mu\nu}\square h_f + \frac{\chi}{\phi_0}T_{\mu\nu}. \quad (4.8)$$

Come in Relatività Generale, anche nelle teorie  $f(R)$  c'è una certa libertà di gauge. Possiamo fissare la gauge scegliendo la gauge di Lorentz (3.16). Il tensore di Einstein, nelle equazioni (4.8)

con la gauge (3.16) non è altro che  $\square \bar{h}_{\mu\nu}$ , come possiamo vedere dall'equazione (3.17); mentre, il membro di destra delle equazioni (4.8) rimane lo stesso proprio perché  $h_f$  non è modificato dalla gauge a traccia invertita (3.11) che non è sufficiente in questo contesto per ritrovare un'equazione delle onde. Infatti, le equazioni di campo risultano:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu h_f - \eta_{\mu\nu} \square h_f + \frac{\chi}{\phi_0} T_{\mu\nu}. \quad (4.9)$$

Quindi prima di risolvere le equazioni di campo (4.8) bisogna riscriverle usando un'altra gauge.

Nel vuoto,  $T_{\mu\nu} = 0$ , quindi le equazioni (4.9) diventano:

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu h_f - \eta_{\mu\nu} \square h_f, \quad (4.10)$$

e l'equazione della traccia (2.59) diventa:

$$\square \phi - m_0^2 \phi = 0. \quad (4.11)$$

Ora, utilizziamo una sostituzione molto simile <sup>1</sup> all'equazione (3.11):

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \left( \frac{h}{2} - h_f \right) \eta_{\mu\nu} \quad (4.12)$$

allora, possiamo considerare la trasformazione di coordinate (3.9); il tensore  $\bar{h}_{\mu\nu}$  si trasforma secondo le equazioni (3.8).

Per garantire che le condizioni imposte dalla gauge si conservino durante una trasformazione di coordinate (3.8), dobbiamo richiedere che

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = \partial^\mu \bar{h}'_{\mu\nu}. \quad (4.13)$$

---

<sup>1</sup>Abbiamo usato di nuovo la notazione  $\bar{h}_{\mu\nu}$  per identificare il tensore metrico su cui andiamo a imporre la nostra scelta di gauge, ma bisogna notare che è diverso dalla precedente definizione (3.11)

Notiamo che abbiamo imposto quattro condizioni sulla derivata seconda di  $\xi_\mu$ , ma non abbiamo fissato esattamente le sue componenti; quindi, attraverso la trasformazione di coordinate, possiamo imporre quattro condizioni sul campo  $\bar{h}_{\mu\nu}$ . In questo modo possiamo eliminare con la gauge i termini spuri nelle equazioni di campo linearizzate. Usando la gauge (4.12), con le condizioni (3.16), otteniamo:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (4.14)$$

$$\square h_f - m^2 h_f = 0, \quad (4.15)$$

dove l'equazione (4.15) è uguale alla (4.11) con l'identificazione (4.7). L'equazione (4.15) è un'equazione omogenea di Klein-Gordon. Risulta immediato ottenere l'equazione non omogenea di Klein-Gordon quando si considera la presenza di una sorgente con un certo tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$ . Usando l'equazione (2.59), dividendola per  $\phi_0$  otteniamo

$$\square h_f - m^2 h_f = \frac{8\pi G}{3\phi_0 c^4} T. \quad (4.16)$$

Dall'equazione (4.16) possiamo notare che l'equazione di campo per il modo scalare dipende dalla specifica scelta della funzione  $f(R)$  attraverso  $\phi_0$ .

#### 4.1.1 La soluzione d'onda piana

Le soluzioni elementari per le equazioni di campo (4.14) e (4.15) sono onde piane; trovare la soluzione è immediato, passando in trasformata di Fourier otteniamo

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}(\mathbf{p}) e^{ip^\alpha x_\alpha} + c.c., \quad (4.17)$$

$$h_f = a(\mathbf{q}) e^{iq^\alpha x_\alpha} + c.c., \quad (4.18)$$

dove  $p^\alpha$  e  $q^\alpha$  sono i quadri-momenti rispettivamente del modo tensoriale e di quello scalare; essi sono definiti come

$$\begin{aligned} p^\alpha &\equiv (\omega, \mathbf{p}), & \omega &= p \equiv |\mathbf{p}|, \\ q^\alpha &\equiv (\omega_m, \mathbf{q}), & \omega_m &= \sqrt{m^2 + q^2}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

dove  $\omega$  è la frequenza angolare dell'onda piana tensoriale e  $\omega_m$  quella dell'onda scalare. Il fatto che la legge di dispersione per il modo scalare (massivo)  $h_f$  non è lineare va sottolineato; la velocità dei moti tensoriali (con massa pari a zero)  $\bar{h}_{\mu\nu}$  è la velocità della luce  $c$ , mentre a causa della legge di dispersione definita dall'ultima delle equazioni (4.19), il modo scalare ha una velocità che dipende dalla frequenza e dalla massa ed è, per un range finito di frequenze, al di sotto della velocità della luce. Consideriamo adesso un sistema di riferimento in cui la direzione  $\hat{z}$  coincide con la direzione di propagazione dell'onda gravitazionale, ortogonale al piano delle coordinate<sup>2</sup>  $xy$ . Ricordiamo che  $p^\alpha$  e  $q^\alpha$  sono entrambi *vettori nulli* [59], cioè risulta

$$p^\alpha p_\alpha = 0, \quad (4.20)$$

$$q^\alpha q_\alpha = 0. \quad (4.21)$$

La parte spaziale di tali quadri-vettori  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  sono rispettivamente i vettore d'onda del modo massless e di quello massivo [30, 33]. Per un'onda che si propaga lungo la direzione  $z$ ,  $p^\alpha$  e  $q^\alpha$  hanno solo le componenti 0 e 3 diversi da zero; infatti, vale  $\mathbf{q} = (\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{z}})\hat{\mathbf{z}} = q_3\hat{\mathbf{z}}$ . Otteniamo quindi

$$p_\alpha = (p_0, 0, 0, p_3), \quad q_\alpha = (q_0, 0, 0, q_3). \quad (4.22)$$

Sostituendo i quadri-vettori definiti nelle equazioni (4.22) nell'equazione (4.14) otteniamo:

$$p_0 = \omega, \quad p_3 = \omega. \quad (4.23)$$

---

<sup>2</sup>Per esempio, possiamo far coincidere l'asse  $x$  con la linea dei nodi e scegliere l'asse  $y$  in modo da completare un sistema di coordinate destrorso. In ogni caso, nella trattazione che segue, non è importante identificare in maniera specifica le coordinate  $x$  e  $y$ .

Sostituendo analogamente, la seconda delle (4.22) nell'equazione (4.15) otteniamo

$$q_0 = \omega_m, \quad q_3 = \sqrt{\omega_m^2 + \gamma^2}. \quad (4.24)$$

Un'onda piana con numero d'onda  $\mathbf{k}$  e frequenza angolare  $\omega$  si propaga ad una velocità di gruppo  $\mathbf{v}_g$  definita come

$$\mathbf{v}_g \equiv \left( \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} \right). \quad (4.25)$$

Possiamo quindi utilizzare l'equazione (4.25) per calcolare la velocità dei modi tensoriali:

$$\mathbf{v}_g^{(tens)} = c \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.26)$$

e del modo scalare

$$\mathbf{v}_g^{(scal)} = \frac{\sqrt{\omega^2 - m^2 c^2}}{\omega} c \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.27)$$

Il modo tensoriale si propaga ad una velocità pari a quella della luce, quello scalare ha una velocità minore e dipende dalla frequenza dell'onda gravitazionale; in particolare,  $v_g^{(scal)}$  cresce con la frequenza, raggiungendo la velocità della luce nel limite delle alte frequenze  $\omega \rightarrow \infty$ . Possiamo ora calcolare la forma di  $h_{ij}$  per le teorie  $f(R)$ . Imponiamo che la traccia sia nulla  $h = 0$  usando la libertà di gauge residua (che permette di imporre 4 condizioni su  $h_{ij}$ ) poniamo  $h_{00} = -h_{33} = h_f$ ; notiamo però che con questa scelta l'onda gravitazionale non è più trasversale, ma presenta anche una componente longitudinale  $h_f$ . L'onda ha quindi una parte trasversale, equivalente a quella della Relatività Generale, con polarizzazioni  $h_+$  e  $h_\times$  il cui effetto è circoscritto al piano  $xy$  e una parte longitudinale determinata dalla polarizzazione scalare  $h_f$ . Possiamo definire una base di tensori

fatta da 3 tensori di rango-2  $e_{\mu\nu}^{(A)}$  per scomporre in componenti l'effetto delle varie polarizzazioni

$$e_{\mu\nu}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{\mu\nu}^{(\times)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{\mu\nu}^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

in questo modo possiamo scrivere

$$h_{\mu\nu}(t, z) = h_+(t, z)e_{\mu\nu}^{(+)} + h_\times(t, z)e_{\mu\nu}^{(\times)} + h_f(t, z, v_g^{(scal)})e_{\mu\nu}^{(s)}. \quad (4.29)$$

Facciamo notare che in alternativa avremmo potuto mantenere la trasversalità, rilassando l'ipotesi  $h = 0$ , nel qual caso sarebbe emersa una polarizzazione di *breathing* al posto di quella longitudinale.

## 4.2 Il problema delle sorgenti

La linearizzazione delle equazioni di campo implica campi deboli e basse velocità, non è quindi un formalismo adatto a descrivere quei sistemi con campi gravitazionali particolarmente intensi e con velocità caratteristiche comparabili a quelle della luce (in ordine di frazioni). Tale approccio non si presta bene per descrivere, quindi, l'emissione di onde gravitazionali da parte di sistemi binari coalescenti per l'intero arco temporale della coalescenza ed è tanto meno efficace quanto più ci si avvicina all'istante di tempo in cui i corpi raggiungono una distanza infinitesima, quando, data l'intensità del campo gravitazionale e per le velocità in gioco, conviene risolvere numericamente le equazioni complete (non linearizzate). Con tali premesse, in quanto segue, andremo a considerare sistemi che si muovono lentamente, in teoria linearizzata. La radiazione emessa da tale classe di sistemi può essere analizzata scomponendo la radiazione in una serie di termini di multipolo (monopolo, dipolo, quadrupolo...). In Relatività Generale il termine dominante è quello di quadrupolo; in quanto segue mostreremo l'espansione in multipoli nelle teorie  $f(R)$ .

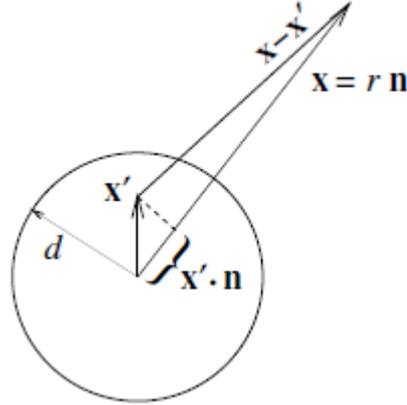


Figura 4.1: Il vettore  $\mathbf{x}'$  rappresenta le coordinate della sorgente rispetto al suo centro di massa, il vettore  $\mathbf{x}$ , invece, le coordinate del sistema per un osservatore sulla Terra.

### 4.3 La radiazione gravitazionale prodotta da una sorgente

In presenza di un sistema che agisce da sorgente gravitazionale, le equazioni di campo diventano le (3.17) per la componente tensoriale (a parte un fattore  $\phi_0$  al denominatore) e (4.16) per quella scalare. Notiamo che le equazioni del campo tensoriale sono analoghe a quelle del campo elettromagnetico [50], per cui possono essere risolte in maniera simile utilizzando il metodo della funzione di Green. Esso consiste nel risolvere le equazioni (3.17) trovando la funzione  $\mathcal{G}(x, x')$  definita in modo tale da poter scrivere

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = -2 \frac{\chi}{\phi_0} \int d^4 x' G(x - x') T_{\mu\nu}(x') , \quad (4.30)$$

e l'equazione (3.17) può essere, quindi, scritta in maniera equivalente come un'equazione differenziale per  $\mathcal{G}(x, x')$ :

$$\square \mathcal{G}(x - x') = \delta^4(x - x') . \quad (4.31)$$

Esistono due tipi di soluzioni all'equazione (4.31) quella *ritardata* e quella *anticipata*. Ma tra le due solo la soluzione ritardata ha significato fisico. Quest'ultima prevede che tra il tempo di

emissione  $t'$  e quello in cui l'onda raggiunge l'osservatore  $t$  è presente un ritardo pari al tempo impiegato dall'onda per percorrere la distanza tra la sorgente e l'osservatore; quindi, i campi vanno calcolati al tempo ritardato  $t_{ret}$  definito come:

$$t_{ret} = t - \frac{|x - x'|}{c}. \quad (4.32)$$

La funzione di Green ritardata [50, 47] risulta:

$$\mathcal{G}(x - x') = -\frac{1}{4\pi|x - x'|} \delta(x_{ret}^0 - x'^0) = -\frac{1}{4\pi|x - x'|} \delta(ct_{ret} - ct'). \quad (4.33)$$

La soluzione definita nell'equazione (4.30) diventa

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = \frac{\chi}{2\pi\phi_0} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T_{\mu\nu} \left( t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right). \quad (4.34)$$

Le onde gravitazionali vengono tipicamente emesse da sistemi molto distanti da noi, ad esempio il primo segnale mai rivelato GW150914 [10] proveniva dal moto a spirale di due buchi neri (e dal successivo "ringdown") da una distanza di ben  $410Mpc$  dalla Terra. Conviene, quindi, calcolare i campi gravitazionali generati da sorgenti infinitamente distanti ( $r \rightarrow \infty$ ), cioè studieremo le onde gravitazionali nella "far zone". Inoltre, possiamo assumere che il diametro tipico della sorgente  $d$  (che potremmo grossomodo identificare con il semiasse maggiore dell'orbita del sistema binario) è molto più piccolo della distanza tra la Terra e il centro di massa del sistema binario. Possiamo, quindi, espandere la soluzione (4.34) in termini di  $r$  e della direzione della sorgente  $\mathbf{n}$  come mostrato in figura 4.1. Risolviamo, ora, l'equazione per il modo scalare (4.16) sotto le stesse ipotesi di campi deboli, sorgenti lente e far-zone, usando nuovamente il metodo di Green. Definiamo la polarizzazione scalare come

$$h_f = \frac{\chi}{3\phi_0} \int d^4x' \mathcal{G}_m(x, x') T(x'), \quad (4.35)$$

dove  $\mathcal{G}_m(x, x')$  è la funzione di Green per campi massivi. L'equazione (4.16) con  $h_f$  definita come nell'equazione (4.35) diventa

$$(\square - m^2)\mathcal{G}_m(x, x') = \delta^4(x - x'). \quad (4.36)$$

La funzione di Green relativa all'operatore differenziale " $\square - m^2$ " si ottiene [60, 33] facendo la trasformata di Fourier dell'equazione (4.36) e risulta

$$\mathcal{G}_m(x, x') = \int d^4p \frac{1}{m^2 + p^2} e^{ip(x-x')}. \quad (4.37)$$

Abbiamo già definito in precedente il momento  $p$  nelle equazioni (4.19) come

$$p_\mu = (-\omega/c, \mathbf{k}), \quad (4.38)$$

$$p^2 = -\omega^2/c^2 + |\mathbf{k}|^2. \quad (4.39)$$

Stiamo cercando di descrivere la radiazione gravitazionale generata a distanza  $r$ , per cui è conveniente utilizzare un sistema di coordinate polari  $x = (ct, r, \theta, \phi)$ . La parte in  $d^3k$  dell'integrale (4.37) dipende dal cammino di integrazione, possiamo quindi definirla a tratti

$$\mathcal{G}_m(x, x') = \begin{cases} \mathcal{G}_{OUT}(x, x') = \frac{1}{4\pi r} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} e^{i\sqrt{\omega^2/c^2 - m^2}r} \\ \quad \text{se } \omega^2 > m^2c^2 \\ \mathcal{G}_{IN}(x, x') = \frac{1}{4\pi r} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} e^{-\sqrt{m^2 - \omega^2/c^2}r} \\ \quad \text{se } \omega^2 < m^2c^2 \end{cases} \quad (4.40)$$

I due rami della funzione di Green (4.40) necessitano di qualche commento. Per  $\omega^2 < m^2c^2$ , il secondo termine esponenziale sotto il segno di integrale è un numero reale e sostituendolo nell'equazione (4.35), otteniamo un esponenziale del tipo  $h_f \simeq e^{-(m^2 - \omega^2/c^2)r}$  e nel limite  $r \rightarrow \infty$  tale esponenziale va a zero. Questo non accade quando  $\omega^2 > m^2c^2$ . Possiamo quindi identificare

la frequenza di cut-off  $\omega_c^2 \equiv m^2 c^2$  tale per cui, fissata la massa del campo scalare, il sistema non genera onde gravitazionali al di sotto della frequenza  $\omega_c$ . Il modo scalare presenta un comportamento simile a quello di un filtro passa-alto che taglia le basse frequenze. Invece, per  $\omega > \omega_c$ , il modo scalare si propaga come un'onda piana con una certa velocità minore di quella della luce. La funzione di Green ottenuta per il modo scalare può essere ricondotta a una forma simile a quella ottenuta per i modi tensoriali  $\mathcal{G}(x, x')$ . A tal proposito, consideriamo un'onda piana ad una frequenza fissata  $\omega_b$ , la velocità di gruppo del modo scalare sarà anch'essa fissata secondo l'equazione (4.19) ad un certo valore  $v_g(\omega_b) = v$ : per risolvere l'integrale (4.35) e scrivere  $h_f$  in una forma compatta, la funzione di Green (4.40) può essere scritta come

$$\mathcal{G}_m(x, x') = \frac{1}{4\pi r} \left( \int_{-\infty}^{-m} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} e^{i\sqrt{\omega^2/c^2 - m^2} r} + \int_m^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} e^{i\sqrt{\omega^2/c^2 - m^2} r} + \int_{-m}^m \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} e^{-\sqrt{m^2 - \omega^2/c^2} r} \right). \quad (4.41)$$

L'equazione (4.41) può essere riscritta introducendo la funzione delta di Dirac definita attraverso la trasformata di Fourier

$$\delta(y - y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i(y-y_0)\omega}. \quad (4.42)$$

Consideriamo l'equazione (4.41) e osserviamo che il terzo termine del membro di destra va a zero nel limite di  $r \rightarrow \infty$ ; in tale limite la funzione di Green può essere scritta come:

$$\mathcal{G}_m(x, x') = \frac{1}{4\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} e^{i\omega \frac{\sqrt{\omega^2 - m^2}}{\omega} r} - \frac{1}{4\pi r} \int_{-m}^{+m} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} e^{i\omega \frac{\sqrt{\omega^2 - m^2}}{\omega} r}. \quad (4.43)$$

Osserviamo che il secondo termine del membro di destra dell'equazione (4.43) va asintoticamente a zero per distanze infinite; infatti, quando  $\omega^2 < m^2 c^2$ , l'esponente diventa  $i\sqrt{\omega^2/c^2 - m^2} =$

$-\sqrt{m^2 - \omega^2/c^2}$  e nel limite di  $r \rightarrow \infty$  va a zero. Otteniamo quindi che la (4.43) si scrive come

$$\mathcal{G}_m(x, x') = \frac{1}{4\pi r} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t' - \frac{v}{c} \frac{r}{c})} = \frac{\delta(t - t' - \frac{v}{c} \frac{r}{c})}{4\pi r}. \quad (4.44)$$

Notiamo come la funzione (4.44) è simile alla funzione di Green dei modi tensoriali (4.33). Il modo scalare nell'equazione (4.35) con funzione di Green (4.44) può essere scritto nella forma seguente

$$h_f = \frac{\chi}{3\phi_0} \int d^4x' \frac{\delta(t - t' - \frac{v}{c} \frac{r}{c})}{4\pi r} T(\mathbf{x}', t') \quad (4.45)$$

$$= \frac{\chi}{3\phi_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{T(\mathbf{x}', t - \frac{v}{c} \frac{r}{c})}{4\pi r}. \quad (4.46)$$

A questo punto è evidente che la differenza principale tra la polarizzazione scalare (4.45) e quelle tensoriali (4.34) risiede nella differenza tra il ritardo temporale nelle soluzioni ritardate. In particolare, essendo  $v < c$  il modo scalare risulta in ritardo rispetto a quelli tensoriali e i rispettivi campi vanno calcolati in istanti di tempo che differiscono per un certo  $\Delta$  pari a:

$$\Delta = r(c - v). \quad (4.47)$$

Notiamo che nel limite  $m^2 \rightarrow 0$  la differenza  $\Delta$  diventa zero.

## 4.4 La radiazione di quadrupolo

In Relatività Generale, lo sviluppo in multipoli della radiazione gravitazionale, nel limite di campi deboli, prevede che il primo termine non nullo dello sviluppo sia quello di quadrupolo (che rappresenta anche il termine dominante), seguito da quello di ottupolo e così via. I termini di monopolo e di dipolo sono identicamente nulli. Per sistemi con campi gravitazionali tali per cui le velocità orbitali sono nell'ordine di frazioni di quella della luce, non possiamo individuare di un termine dominante nello sviluppo in multipoli, dato che, ognuno di tali termini è moltiplicato per un rap-

porto  $(v/c)^n \sim (\omega/c)^n$  dove  $n = 1$  per il quadrupolo,  $n = 2$  per l'ottupolo e così via. Il rapporto tra un termine dello sviluppo e il successivo va come  $\sim v/c$  e di conseguenza tutti i multipoli contribuiscono circa allo stesso modo. Ma nel caso di campi gravitazionali deboli e sorgenti lente per cui  $v \ll c$  il termine dominante è quello di quadrupolo [47]. Ciò accade in Relatività Generale, così come per le teorie  $f(R)$  [61], come dimostreremo in quanto segue. In particolare, parlando di multipoli, ci si riferisce a quelli della massa. Possiamo identificare approssimativamente il dipolo di massa con  $p_{dip} \simeq M_{tot} r_{CM}$ , il quadrupolo come  $p_{quad} \simeq M_{tot} r_{CM}^2$  e così via. Tuttavia come si vedremo in seguito il termine di dipolo non contribuisce alla radiazione gravitazionale. Non abbiamo definito il termine di monopolo perché esso rappresenta quella parte di radiazione analoga a quella generata da una distribuzione di materia a simmetria sferica che, per il teorema di Birkhoff, deve essere stazionaria e non può quindi rappresentare onde gravitazionali. Questo è il motivo per cui sono state osservate per sistemi binari e non, ad esempio, per stelle che collassano.

Le onde gravitazionali vengono quindi generate dall'asimmetria nella distribuzione di materia del sistema. In particolare, i modi tensoriali  $h_{\mu\nu}$ , dipendono al primo ordine dalla derivata temporale seconda del *momento di quadrupolo di massa*, definito come:

$$M_{ij} = \int d^3x' \rho(x') x'_i x'_j. \quad (4.48)$$

Nelle teorie  $f(R)$  emerge di fianco ai modi tensoriali anche quello scalare. Anticipando quanto verrà dimostrato, il termine di quadrupolo del modo scalare dipende dalla traccia della derivata temporale seconda della matrice (4.48). Una tale dipendenza funzionale, implica che il quadrupolo si annulla per quei sistemi che godono di una certa simmetria tale per cui la traccia di  $\ddot{M}_{ij}$  è nulla<sup>3</sup>. Dall'equazione (4.45) possiamo ottenere il termine di quadrupolo del modo scalare, ma prima di continuare, notiamo che in precedenza abbiamo fatto l'approssimazione che  $|x - x'| \sim r$ , tuttavia per sviluppare in multipoli è importante includere anche  $x'$ , quindi  $|x - x'| = r - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}'$ . Dobbiamo

---

<sup>3</sup>Per esempio la radiazione di quadrupolo per  $h_f$  è nulla se analizziamo la radiazione emessa da una massa in orbita circolare vista frontalmente dalla Terra.

quindi espandere l'equazione (4.45) in potenze di  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}'$  ottenendo così

$$h_f = \frac{\chi}{3\phi_0} \int d^3x' \frac{1}{4\pi r} 4\pi r \int \frac{d\omega}{2\pi} \hat{T}(x', \omega) e^{-i\omega(t - \frac{v}{c^2}(r + \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}))}, \quad (4.49)$$

dove  $\hat{T}$  è la trasformata di Fourier della traccia del tensore energia impulso. Possiamo espandere il termine esponenziale dell'equazione (4.49) in serie di Taylor:

$$e^{-i\omega(t - \frac{v}{c^2}(r + \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}))} \simeq e^{-i\omega(t - \frac{v}{c^2}r)} (1 - i\omega(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}) + o(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x})) \quad (4.50)$$

ottenendo

$$\begin{aligned} h_f &= \frac{\chi}{3\phi_0} \int d^3x' \frac{1}{4\pi r} \eta^{\mu\nu} \left( T_{\mu\nu}(x', t - \frac{v}{c^2}r) + x'^i n^i \partial_t T_{\mu\nu}(x', t - \frac{v}{c^2}r) \right) \\ &= \frac{\chi}{3\phi_0} \frac{1}{4\pi r} \eta^{\mu\nu} \left( S_{\mu\nu} + n_m \dot{S}^{\mu\nu, m} + \dots \right)_{ret}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

dove abbiamo definito i *momenti del tensore energia-impulso*  $S^{ij}$  e  $S^{ij,k}$  definiti come segue

$$S^{ij}(t) = \int d^3x T^{ij}(t, \mathbf{x}), \quad (4.52)$$

$$S^{ij,k}(t) = \int d^3x T^{ij}(t, \mathbf{x}) x^k, \quad (4.53)$$

Il significato fisico dei vari termini dell'espansione risulterà più chiaro una volta eliminati i momenti di  $T^{\mu\nu}$  in favore del momento della densità di energia  $T^{00}$  e del momento lineare  $T^{0i}/c$ . Definiamo i momenti di  $T^{00}/c^2$  come

$$M = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}), \quad (4.54)$$

$$M^i = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i, \quad (4.55)$$

$$M^{ij} = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i x^j, \quad (4.56)$$

e così via. Definiamo anche i momenti di  $T^{0i}/c$  come

$$P^i = \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \mathbf{x}), \quad (4.57)$$

$$P^{i,j} = \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \mathbf{x}) x^j, \quad (4.58)$$

$$P^{i,jk} = \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \mathbf{x}) x^j x^k. \quad (4.59)$$

Dalla legge di conservazione [47, 61]

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (4.60)$$

possiamo ottenere un'identità alquanto utile sui due momenti introdotti sopra. Consideriamo l'equazione (4.60), per l'indice  $\nu = 0$  otteniamo

$$\partial_0 T^{00} = -\partial_i T^{0i}. \quad (4.61)$$

Consideriamo ora la derivata nel tempo dell'equazione (4.55):

$$\dot{M}^i = \frac{1}{c^2} \int d^3x (\partial_0 T^{00}) x^i, \quad (4.62)$$

usando l'identità (4.61) otteniamo

$$\dot{M}^i = -\frac{1}{c} \int d^3x (\partial_j T^{0j}) x^i, \quad (4.63)$$

integrando per parti

$$\dot{M}^i = -\frac{1}{c} \int d^3\mathbf{x} (\partial_j \mathbf{x}^i) T^{0j} = P^i. \quad (4.64)$$

Allo stesso modo otteniamo le seguenti identità:

$$\dot{M} = 0, \quad M^{ij} = P^{i,j} + P^{j,i}. \quad (4.65)$$

Possiamo usare le equazioni (4.65) per scrivere il tensore (4.52) come

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \ddot{M}^{ij}. \quad (4.66)$$

Il termine dominante per il modo scalare (4.51) è  $\eta^{\mu\nu} S_{\mu\nu}$  che per l'equazione (??) è proprio quello di quadrupolo. L'ampiezza della radiazione di quadrupolo associata al modo scalare (4.51), usando l'equazione (4.66), vale:

$$[h_f(t, \mathbf{x})]_{QUAD} = \left[ \frac{\chi}{3\phi_0} \frac{1}{4\pi r} \eta^{\mu\nu} S_{\mu\nu} \right]_{t'=t-\frac{r}{c}} = \left[ \frac{\chi}{3\phi_0} \frac{1}{4\pi r} \ddot{M} \right]_{t'=t-\frac{r}{c}}. \quad (4.67)$$

I calcoli per trovare la formula di quadrupolo per i modi tensoriali  $h_{ij}$  sono analoghi a quelli fatti per ottenere l'equazione (4.67); otteniamo

$$[h_{ij}(t, \mathbf{x})]_{QUAD} = \left[ \frac{\chi}{4\pi\phi_0 r} \ddot{M}_{ij} \right]_{t'=t-\frac{r}{c}}, \quad (4.68)$$

dove non abbiamo richiesto che  $h_{ij}$  sia trasverso e a traccia nulla; quindi, definiamo l'operatore  $\Lambda_{ij,kl}$  che estrae la parte trasversa e a traccia nulla del tensore  $\ddot{M}_{kl}$ . L'equazione (4.68) diventa:

$$[h_{ij}(t, \mathbf{x})]_{QUAD} = \left[ \frac{1}{\phi_0 r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl} \ddot{M}_{kl} \right]_{t'=t-\frac{r}{c}}. \quad (4.69)$$

Supponendo che l'ordine di grandezza di  $\ddot{M}_{ij}$  è lo stesso della sua traccia  $\ddot{M}$ , la radiazione

di quadrupolo associata al modo scalare è dello stesso ordine di grandezza di quella dei modi tensoriali. Tuttavia, in generale, il rapporto tra la radiazione di quadrupolo tensoriale e scalare è:

$$ratio = \frac{[h^{tens}]_{quad}}{[h_f]_{quad}} \sim \frac{\ddot{M}_{ij}}{\ddot{M}}. \quad (4.70)$$

## 4.5 La risposta degli interferometri

In quanto segue, si vuole analizzare la possibile risposta degli interferometri in presenza del modo scalare  $h_f$ . Il suo effetto va sommato a quello delle altre due polarizzazioni  $h_+$  e  $h_\times$  e quindi lo si può considerare a tutti gli effetti un possibile discrimine tra Relatività Generale e teorie estese della gravità.

Consideriamo un anello di masse di prova a riposo, ognuna con massa pari a  $m_p$  e scegliamo un sistema di riferimento con l'asse  $z$  orientato verso la direzione di propagazione dell'onda, con l'origine che coincide con il centro dell'anello e in cui una massa di prova ha coordinate  $(x_0, y_0, z_0)$ . Studieremo l'effetto delle onde gravitazionali sulla massa di test nel *sistema di riferimento proprio dell'interferometro* in cui il loro l'effetto può essere descritto in termini di forze Newtoniane; infatti, in tale sistema di riferimento, identifichiamo la separazione in termini di coordinate con la distanza geodetica  $\xi^i$ . Per cui l'effetto dell'onda sarà quello di modificare le coordinate in

$$\xi_i(t) = (x_0 + \delta x(t), y_0 + \delta y(t), z_0 + \delta z(t)). \quad (4.71)$$

L'equazione delle geodetiche (2.17) può essere riscritta come

$$\ddot{\xi}^i = -c^2 \tilde{R}_{0j0}^i \xi^j, \quad (4.72)$$

dove  $\tilde{R}_{0j0}^i$  sono le componenti "elettriche" del tensore di Riemann linearizzato; dalla definizione (3.5) segue:

$$R_{0j0}^i = R_{0i0j} = -\frac{1}{2c^2} \ddot{h}_{ij}. \quad (4.73)$$

identificando il vettore  $\ddot{\xi}^i$  con l'accelerazione delle masse di prova, le equazioni (4.72) descrivono la dinamica della massa di prova. Possiamo quindi associare all'onda gravitazionale una forza definita come: [62, 46, 63, 30]

$$F_i = \frac{m_p}{2} \ddot{h}_{ij} \xi^j . \quad (4.74)$$

Consideriamo l'effetto della sola polarizzazione longitudinale  $h_f$ , tale che

$$h_{ij} = \delta_{i3} \delta_{3j} h_f(z, t) . \quad (4.75)$$

Dall'equazione (4.74) notiamo come l'unica componente non nulla sia quella lungo  $z$ , poniamo quindi  $\delta x(t) = \delta y(t) = 0$  nell'equazione (4.71). Supponendo che l'onda sia un'onda piana del tipo

$$h_f(z, t) = h_f(z) \sin(\omega t) , \quad (4.76)$$

l'equazione (4.74) diventa

$$\ddot{\delta z} = \frac{1}{2} \ddot{h}_f(z_0 + \delta z) \simeq \frac{1}{2} \ddot{h}_f(\delta z) , \quad (4.77)$$

che possiamo integrare direttamente ottenendo:

$$\delta z = \frac{h_f}{2} \sin(\omega t) . \quad (4.78)$$

Quindi l'effetto della polarizzazione longitudinale è quello di far oscillare le masse di prova lungo la direzione  $z$ , in fase con l'onda, come è possibile vedere in figura 4.3 [64].

Per una direzione di incidenza qualsiasi, diversa da  $z$ , possiamo derivare il pattern angolare di risposta degli interferometri terrestri. Seguendo l'approccio di [39, 65] definiamo il pattern angolare della generica polarizzazione  $A$  come

$$F_A(\hat{\Omega}) = \mathbf{D} : e_A(\hat{\Omega}) , \quad (4.79)$$

dove  $\mathbf{D} \equiv \frac{1}{2} [\hat{u} \otimes \hat{u} - \hat{v} \otimes \hat{v}]$  è il tensore associato alla geometria del detector, con  $\hat{u}$  e  $\hat{v}$  orientati come i bracci dell'interferometro, l'operatore ":" rappresenta la contrazione ed  $e_A(\hat{\Omega})$  è il tensore delle polarizzazioni di ciascuna delle polarizzazioni  $A = \{+, \times, s\}$  (già definito nell'equazione (4.28) per un'onda incidente dalla direzione ortogonale al piano dell'interferometro). I vettori  $\hat{u}$  e  $\hat{v}$  sono unitari e ortogonali e tali da formare una base destrorsa con il versore della direzione azimutale  $\hat{\omega}$

$$\begin{cases} \hat{u} = (1, 0, 0) \\ \hat{v} = (0, 1, 0) \\ \hat{\omega} = (0, 0, 1) \end{cases} \quad (4.80)$$

Definiamo un sistema di riferimento ruotato di un angolo  $(\theta, \phi)$

$$\begin{cases} \hat{u}' = (\cos(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\sin(\phi), -\sin(\theta)) \\ \hat{v}' = (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0) \\ \hat{\omega}' = (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta)) \end{cases} \quad (4.81)$$

Attraverso un'altra rotazione di un angolo  $\psi$  si può definire in maniera generale un sistema di riferimento tale per cui la direzione azimutale coincide con quella di propagazione dell'onda, come mostrato in figura 4.2 dove abbiamo definito

$$\begin{cases} \hat{m} = \hat{u}'\cos(\psi) + \hat{v}'\sin(\psi) \\ \hat{n} = -\hat{v}'\sin(\psi) + \hat{u}'\cos(\psi) \\ \hat{\Omega} = \hat{\omega}' \end{cases} \quad (4.82)$$

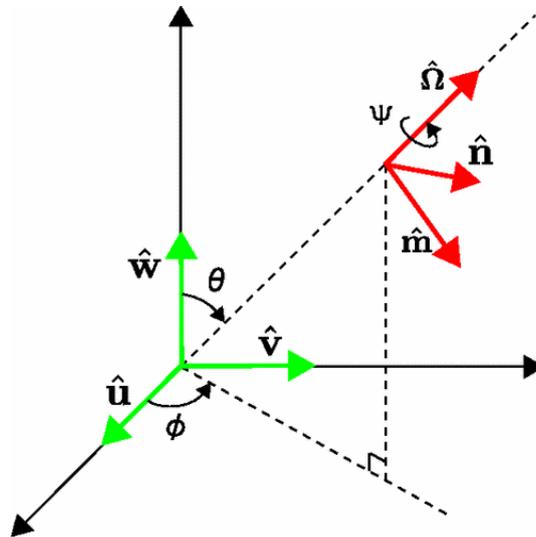


Figura 4.2: Il sistema di coordinate orientato secondo la geometria dell'interferometro è rappresentato in verde, quello dell'onda gravitazionale è in rosso.

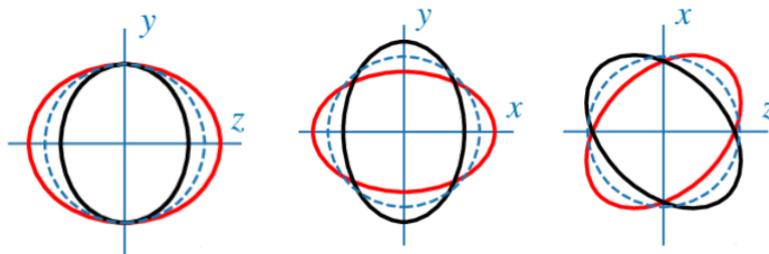


Figura 4.3: L'effetto delle polarizzazioni su un anello di masse ( da sinistra, rispettivamente  $h_f$ ,  $h_+$ ,  $h_x$  ) di prova per un'onda gravitazionale incidente lungo la direzione  $z$ . Le circonferenze tratteggiate rappresentano le posizioni non perturbate delle masse di prova (in assenza dell'onda), le ellissi rosse e nere mostrano, invece, l'effetto dell'onda gravitazionale con una fase pari rispettivamente a  $\pi/2$  e  $3\pi/2$ .

Possiamo scrivere i tensori di polarizzazione per una generica direzione  $\hat{\Omega}$  come:

$$e_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{m} \otimes \hat{m} - \hat{n} \otimes \hat{n}] \quad (4.83)$$

$$e_\times = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{m} \otimes \hat{n} + \hat{n} \otimes \hat{m}] \quad (4.84)$$

$$e_s = \sqrt{2}\hat{\Omega} \otimes \hat{\Omega}. \quad (4.85)$$

Otteniamo i pattern angolari (4.79) per le tre polarizzazioni:

$$F_+(\theta, \phi, \psi) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta) \cos 2\phi \cos 2\psi - \cos\theta \sin 2\phi \sin 2\psi \quad (4.86)$$

$$F_\times(\theta, \phi, \psi) = -\frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta) \cos 2\phi \sin 2\psi - \cos\theta \sin 2\phi \cos 2\psi \quad (4.87)$$

$$F_s(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2\theta \cos 2\phi. \quad (4.88)$$

I pattern angolari (4.88) sono rappresentati in figura 4.4 per  $\psi = 0$ . Sofferamoci ora su un dettaglio dei pattern angolari: essi non dipendono dalla frequenza  $\omega$  dell'onda incidente. Ciò accade perché le equazioni (4.88) sono state ottenute con un approccio puramente geometrico che rappresenta il limite delle basse frequenze del pattern angolare che, in genere, dipende dalla frequenza. Inoltre l'equazione (4.79) è valida nel limite in cui il detector abbia una lunghezza tipica molto maggiore della lunghezza d'onda ridotta dell'onda gravitazionale, come nel caso degli interferometri di LIGO-VIRGO. I pattern angolari ottenuti sono quindi validi solo nel limite delle basse frequenze e solo per gli interferometri terrestri, quindi non per l'interferometro spaziale LISA.

## 4.6 Il fondo stocastico delle onde gravitazionali

Uno dei molti obiettivi della futura missione LISA sarà quello di misurare il segnale del *fondo stocastico di onde gravitazionali*. Sebbene non sia stato ancora misurato con gli attuali interferometri terrestri, dato l'elevato rumore alle basse frequenze, sono state avanzate alcune ipotesi sulla

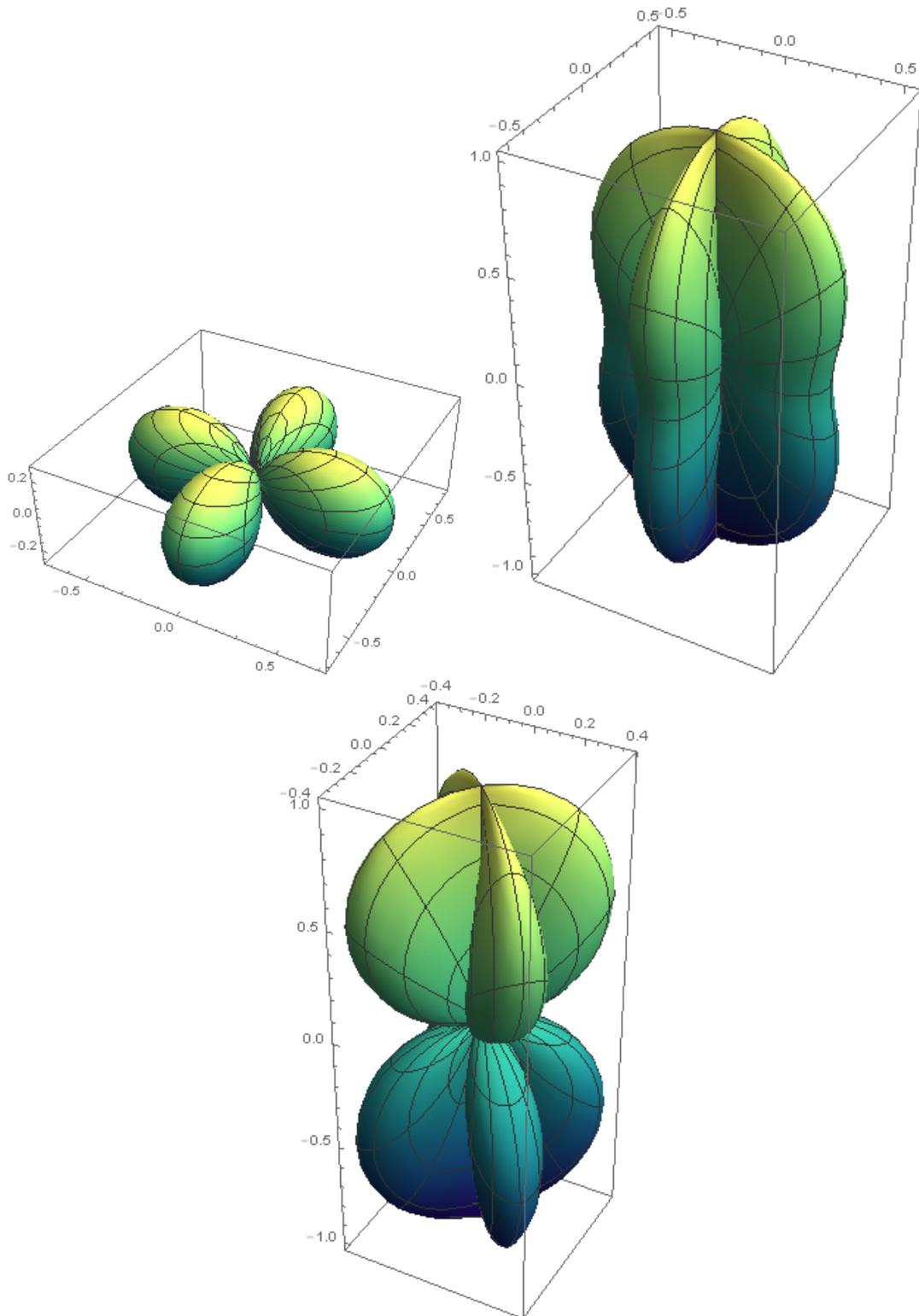


Figura 4.4: In figura è rappresentato il pattern angolare della risposta dell'interferometro. Il grafico in alto a sinistra rappresenta la risposta della polarizzazione scalare, a destra della polarizzazione  $h_+$  e in basso quello della polarizzazione  $h_\times$ . La *colormap* permette di identificare l'ampiezza del segnale: la parte tendente al verde-giallo identifica la regione dove il segnale è massimo (per  $z$  positivi), la parte tendente al blu identifica gli angoli che rendono massimo il segnale in valore assoluto (per  $z$  negativi).

sua natura e sulle eventuali sorgenti gravitazionali che in via ipotetica potrebbero darvi origine. Potrebbe essere di natura astrofisica e quindi essere generato dalla sovrapposizione di onde gravitazionali emesse da sistemi binari coalescenti sparsi per tutto l'Universo. Oppure potrebbe avere un'origine cosmologica ed essere legato ad una certa varietà di processi nell'universo primordiale come le transizioni di fase o l'inflazione, durante cui possono essere prodotti gravitoni cosmologici. In quanto segue ci concentreremo sulla produzione di onde gravitazionali durante l'epoca inflazionaria. In questa fase dell'evoluzione dell'universo, la meccanica quantistica gioca un ruolo fondamentale. Infatti, ad ogni campo quantistico sono associate fluttuazioni di vuoto che durante l'inflazione vengono amplificate o smorzate generando delle perturbazioni identificabili come onde gravitazionali. Tali onde prodotte durante l'inflazione hanno una lunghezza d'onda comparabile con le sue dimensioni dell'universo nel suo stato attuale e quindi molto al di sotto del range di frequenze degli interferometri terrestri [66].

Consideriamo l'elemento di linea di una metrica Friedmann-Lemaitre-Roberson-Walker , nell'Einstein frame, dove viene introdotto il tempo conforme  $\eta$

$$ds^2 = a^2(\eta) [-d\eta^2 + d\vec{x}^2 + h_{\mu\nu}(\eta, \vec{x})dx^\mu dx^\nu] . \quad (4.89)$$

Se consideriamo la transizione da un universo de Sitter a uno dominato dalla radiazione, avvenuta a un certo istante  $t$ , il fattore di scala delle suddette fasi vale  $a(t) \propto e^{H_{ds}t}$  e  $a(t) \propto \sqrt{t}$  rispettivamente. Definiamo il tempo conforme a cui avviene la transizione (tra la fase di inflazione e quella in cui l'universo è dominato da radiazione) come  $\eta_1$  e il tempo conforme presente  $\eta_0$ . Le perturbazioni della metrica che possiamo identificare come onde gravitazionali (scalar-tensoriali) primordiali possono essere scritte in termini del tempo conforme come

$$h_{\mu\nu}(\eta, \vec{x}) = e_{\mu\nu}^{(A)}(\hat{k})X(\eta) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \quad (4.90)$$

dove l'apice  $A$  indica la generica polarizzazione che vogliamo considerare; inoltre, notiamo che

$e_{\mu\nu}^{(A)}$  è l'unica parte dell'equazione (4.90) che dipende dalla polarizzazione. La componente dell'onda gravitazionale proiettata sul tensore di polarizzazione  $e_{\mu\nu}^{(A)}$  è quindi:

$$\Phi(\eta, \vec{k}, \vec{x}) = X(\eta) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (4.91)$$

Per stimare l'ampiezza delle perturbazioni dobbiamo calcolare  $X(\eta)$ ; definiamo, quindi, una nuova funzione  $Y(\eta) = a(\eta)X(\eta)$ . Scrivendo l'equazione di Klein-Gordon nella metrica Friedmann-Lemaitre-Roberson-Walker definita dall'equazione (4.89), otteniamo<sup>4</sup>

$$Y'' + \left( |\vec{k}|^2 - \frac{a''}{a} \right) Y = 0. \quad (4.92)$$

La cui soluzione può essere espressa in termini delle funzioni di Henkel per entrambe le epoche (inflazione e dominata dalla radiazione)

per  $\eta < \eta_1$

$$X(\eta) = \frac{a(\eta_1)}{a(\eta)} [1 + iH_{ds}\omega^{-1}] \exp(-ik(\eta - \eta_1)); \quad (4.93)$$

per  $\eta > \eta_1$

$$X(\eta) = \frac{a(\eta_1)}{a(\eta)} [\alpha \exp(-ik(\eta - \eta_1)) + \beta \exp(ik(\eta - \eta_1))]; \quad (4.94)$$

dove  $\omega = ck/a$  è la frequenza angolare dell'onda, dipendente dal tempo; i coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$  sono indipendenti dal tempo, sono chiamati *coefficienti di Bogoliubov* e sono definiti come [39, 67]

$$\alpha = 1 + i \frac{\sqrt{H_{ds}H_0}}{\omega} - \frac{H_{ds}H_0}{2\omega^2}, \quad \beta = \frac{H_{ds}H_0}{2\omega^2}. \quad (4.95)$$

---

<sup>4</sup>L'apice "r" indica la derivata rispetto al tempo conforme.

Durante l'inflazione ogni perturbazione classica o macroscopica viene smorzata dall'espansione, cioè il minimo livello di fluttuazione che sopravvive è dovuto al principio di indeterminazione. La soluzione definita nell'equazione (4.93) corrisponde a uno stato di vuoto di tipo de Sitter, il quale, se l'inflazione dura abbastanza, non dovrebbe differire molto dallo stato attuale dell'Universo. Durante la fase dominata da radiazione vengono generate particelle e antiparticelle, in questa fase possiamo calcolare la densità di energia delle onde gravitazionali primordiali utilizzando i coefficienti di Bogoliubov (4.95). Infatti, essi sono legati al numero di particelle e antiparticelle che vengono create durante la fase dominata da radiazione seguita dall'inflazione; il numero di particelle generate ad una certa frequenza  $\omega$  risulta

$$N_\omega = |\beta_\omega|^2 = \left( \frac{H_{ds} H_0}{2\omega^2} \right)^2, \quad (4.96)$$

la densità di energia dei gravitoni così prodotti, nell'intervallo di frequenza  $(\omega, \omega + d\omega)$  è

$$d\rho_{gw}^A = h\omega \left( \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 c^3} \right) N_\omega = \frac{\hbar H_{ds}^2 H_0^2}{8\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\hbar H_{ds}^2 H_0^2}{8\pi^2 c^3} \frac{df}{f} \quad (4.97)$$

dove la frequenza  $f$  è la frequenza relativa al *tempo co-mobile* e non a tempo conforme. Per specificare in che modo la densità di energia dei cosmologici (4.97) dipende dalla densità di energia attuale e da quella della fase in cui abbiamo un universo de Sitter, ricordiamo che

$$H_0^2 = \frac{8\pi G \rho_c}{3c^2}, \quad H_{ds}^2 = \frac{8\pi G \rho_{ds}}{3c^2} \quad (4.98)$$

lo spettro della densità di energia è allora

$$\Omega_{gw}^A(f) = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{gw}}{d \ln f} = \frac{f}{\rho_c} \frac{d\rho_{gw}}{df} = \frac{8}{9} \frac{\rho_{ds}}{\rho_{\text{Planck}}} \quad (4.99)$$

dove abbiamo definito la densità di Planck  $\rho_{\text{Planck}} = c^7/\hbar G^2$ . Dall'equazione (4.99) sembrerebbe che lo spettro della densità di energia sia lo stesso per tutte le frequenze, ciò accade perché non

abbiamo incluso la fase in cui l'universo è dominato dalla materia. Includendo tale fase, dobbiamo considerare anche il redshift dell'equivalenza tra radiazione e materia, e cioè [67]:

$$\Omega_{gw}^A(f) = \frac{8}{9} \frac{\rho_{ds}}{\rho_{\text{Planck}}} (1 + z_{\text{eq}})^{-1} \quad (4.100)$$

tale equazione è valida solo per quelle onde gravitazionali che al tempo dell'equivalenza hanno una frequenza maggiore del parametro di Hubble

$$f > (1 + z_{\text{eq}})^{1/2} H_0; \quad (4.101)$$

per quelle onde gravitazionali che hanno una frequenza minore di  $H_0$ , la densità di energia non è ben definita, dato che la loro lunghezza d'onda è maggiore del raggio di Hubble dell'Universo<sup>5</sup>. Per la più bassa frequenza ammessa, otteniamo [39, 67]

$$\Omega_{gw}(f) \propto f^{-2}. \quad (4.102)$$

Per quanto riguarda, invece, la massima frequenza  $f_{max}$ , questa dipende dalla durata della transizione alla fase dominata da radiazione; infatti, se definiamo un tempo di scala  $\Delta\tau$  della transizione tra la fine dell'inflazione e l'inizio della fase dominata da radiazione, la massima frequenza ammessa è circa

$$f_{max} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)\Delta\tau}; \quad (4.103)$$

se assumiamo il caso ideale di una transizione istantanea, la frequenza massima è molto alta e lo spettro di energia (4.102) va a zero; invece, nel caso più realistico di un  $\Delta\tau$  finito, i due cut-off  $f_{min}$  che  $f_{max}$  garantiscono che lo spettro della densità di energia dei gravitoni cosmologici è finito.

---

<sup>5</sup>Il raggio di Hubble è considerato un orizzonte cosmologico, se una particella viene emessa al di fuori di esso non potrà raggiungere un eventuale osservatore e risulta inosservabile.

## Capitolo 5

# Conclusioni e prospettive

Le teorie  $f(R)$  costituiscono una classe di teorie estese della gravitazione, ormai ben nota in letteratura, che riesce a sopperire ad alcune inconsistenze della Relatività Generale in ambito cosmologico (energia oscura e modelli inflazionari), astrofisico (materia oscura) e in presenza di campi gravitazionali particolarmente intensi. In questo lavoro di tesi abbiamo affrontato il tema delle teorie estese, e del perché tali teorie si rendono necessarie, seguendo un percorso inizialmente storico, ricalcando la successione e l'evoluzione delle teorie della gravità a partire da Galileo fino all'incirca ai giorni nostri, riportando quelle scoperte che hanno assunto un ruolo fondamentale nel discriminare teorie concorrenti (come la precessione di Mercurio) e che hanno permesso la diffusione della teoria di Einstein. Nonostante l'eccezionale numero di conferme, con l'avanzamento tecnologico degli ultimi decenni, si è riusciti a mettere in difficoltà la Relatività Generale proprio come è successo alle teorie che l'hanno preceduta. L'attuale panorama delle teorie estese della gravitazione è molto vasto e sono molte le alternative candidate a succedere alla Relatività Generale. Per citarne solo alcune: teorie scalar-tensoriali (includendo quelle di Brans-Dicke [68]), teorie  $f(R)$ ,  $f(R, T)$ , teorie del quarto ordine con in aggiunta un campo scalare  $f(R, \phi)$ , teorie che includono ulteriori invarianti geometrici come le  $f(R, P, Q)$ , teorie MOND (*MODified Newtonian Dynamics*) [69],

teorie bi-metriche e così via<sup>1</sup>. Questo lavoro di tesi è focalizzato sulle teorie  $f(R)$  in particolare sul modello a legge di potenza  $R^{1+\epsilon}$ . Nel capitolo 2 abbiamo dimostrato come tali teorie sono equivalenti a una certa classe di teorie scalar-tensoriali, evidenziando a partire dalle equazioni di campo che esse presentano un grado di libertà aggiuntivo rispetto alla relatività: un campo scalare  $\phi$ . A tale campo è associata una massa, il cui valore dipende sia dal particolare modello  $f(R)$  scelto (e quindi dai parametri interni del modello) che dal valore dello scalare di curvatura  $R$ . La nostra attenzione si è volta verso le Onde Gravitazionali, la cui scoperta sperimentale nel 2014 ha probabilmente costituito uno degli avvenimenti più significativi degli ultimi anni per l'Astronomia, la Cosmologia e per la fisica in generale, aggiungendosi ai successi della Relatività Generale, come ricalcato nel capitolo 3. Nel capitolo 4 abbiamo dimostrato come le teorie  $f(R)$  prevedano anch'esse la produzione di onde gravitazionali. In termini di polarizzazioni, al fianco delle due  $h_+$  e  $h_\times$  della relatività (modi tensoriali), emerge anche una polarizzazione aggiuntiva  $h_f$  (modo scalare) che a seconda della scelta della gauge è una polarizzazione longitudinale o di *breathing*. Le polarizzazioni che emergono dalla relatività sono associate a un gravitone con massa nulla e spin-2 che ha stessa velocità della luce. Il modo scalare, invece, ha proprietà differenti. In approssimazione di onda piana, abbiamo dimostrato che la velocità  $v$  di tale gravitone massivo è in genere minore di  $c$  e dipende non solo dalla massa (e quindi dal modello  $f(R)$  scelto), ma anche dalla frequenza dell'onda. Nella sezione 4.3 abbiamo considerato la presenza di sorgenti di campo per studiare la produzione di onde gravitazionali nella *far zone*, nell'approssimazione che la velocità  $v$ , la massa e la frequenza dell'onda siano costanti. Nella sezione 4.4 abbiamo analizzato l'emissione di radiazione legata al modo scalare sviluppandola in multipoli, ottenendo il risultato più importante di questo lavoro: la formula di quadrupolo per il modo scalare. Essa risulta in una forma del tutto analoga a quella delle polarizzazioni tensoriali della Relatività Generale con una dipendenza della derivata temporale seconda della traccia del tensore dei momenti secondi di massa del sistema e dal parametro  $\epsilon$  del modello  $f(R)$  considerato. Evidenziamo come la radiazione associata al modo

---

<sup>1</sup>Dove  $T$  è la traccia del tensore energia impulso,  $P$  e  $Q$  sono invarianti di curvatura definiti come  $P = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$  e  $Q = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ .

scalare risulti in ritardo rispetto a quella tensoriale, proprio a causa della massa non nulla e non viene prodotta per frequenze al di sotto della frequenza di cut-off  $\omega_c = mc$ . La massa del gravitone massivo assume quindi un ruolo fondamentale nella propagazione del modo scalare. Essa dipende dal particolare modello  $f(R)$  e nel caso della legge di potenza che abbiamo considerato dipende dal parametro  $\epsilon$ . Possiamo quindi affermare che il modo scalare può essere modulato tramite il parametro  $\epsilon$ . Una misura di precisione di tale parametro potrebbe quindi rappresentare una prova a favore delle teorie  $f(R)$ . Inoltre, la misura della polarizzazione longitudinale rappresenta un vero e proprio *experimentum crucis* per le teorie estese della gravitazione.

Riguardo i possibili sviluppi futuri di questo lavoro, essi sono molteplici. La presenza del modo scalare può essere cercata in alcuni sistemi astrofisici analizzando i dati delle pulsar [70] (ad esempio quella di Hulse-Taylor) e ricostruendo la perdita di energia legata all'emissione del modo scalare in funzione dei parametri del modello. L'analisi teorica da noi riportata, può essere estesa oltre il limite Post-Minkowskiano permettendo l'estensione dei risultati ottenuti a regimi in cui il campo gravitazionale è particolarmente intenso, come nel caso dei sistemi binari coalescenti rivelati dalla rete degli interferometri terrestri. Sarebbe possibile quindi costruire template di forme d'onda simulate del segnale gravitazionale proveniente dal merging di sistemi binari formati da coppie di buchi neri, coppie di stelle di neutroni e coppie buco nero - stella di neutroni. Con l'applicazione della moderna statistica Bayesiana tali simulazioni potrebbero essere testate direttamente sui dati delle ultime run di LIGO-VIRGO. Il modo scalare potrebbe avere, inoltre, un ruolo nel contesto del *fondo stocastico di onde gravitazionali* [66]. Esso può essere generato da molti meccanismi, come, ad esempio, la sovrapposizione di onde gravitazionali provenienti da diverse sorgenti gravitazionali, emesse durante diverse epoche cosmologiche oppure dalla radiazione gravitazionale prodotta durante le fasi dell'universo primordiale dall'amplificazione delle perturbazioni cosmologiche avvenuta durante l'inflazione cosmica [71]. Come indicatore della presenza del modo scalare nell'universo primordiale, possiamo utilizzare la densità di energia adimensionale  $\Omega_{gw}$ ; possiamo supporre che essa sia la somma dei contributi legati alle polarizzazioni ammesse in una data teoria

della gravità [39]. Per le teorie  $f(R)$  possiamo quindi scrivere:

$$\Omega_{gw}^{tot} = \Omega_{gw}^+ + \Omega_{gw}^\times + \Omega_{gw}^s. \quad (5.1)$$

Tale scomposizione ci permette di visualizzare il contributo di ogni polarizzazione. In quanto segue stimeremo grossolanamente la densità di energia supponendo che

$$\Omega_{gw}^+ = \Omega_{gw}^\times, \quad (5.2)$$

e considereremo soltanto principi base della teoria quantistica dei campi e della cosmologia, otterremo quindi un risultato che non dipenderà strettamente dal modello  $f(R)$  utilizzato. Le fluttuazioni dell'energia di punto zero, in linea di principio generate da ogni campo, possono essere amplificate o sopresse nell'Universo primordiale producendo onde gravitazionali; il meccanismo che produce tali onde primordiali è connesso direttamente al paradigma inflazionario, ben supportato dalle teorie  $f(R)$ .

Dato che lo spettro ha un andamento  $\propto f^{-2}$  alle basse frequenze (come mostrato nel Capitolo 4) possiamo stimare sia il contributo delle polarizzazioni presenti in Relatività Generale e quindi di natura tensoriale [39, 72]

$$\Omega_{gw}^{GR}(f)h_{100}^2 < 2 \times 10^{-6}, \quad (5.3)$$

sia quello del modo scalare

$$\Omega_{gw}^s(f)h_{100}^2 < 2.3 \times 10^{-12}. \quad (5.4)$$

Basandoci su queste stime, possiamo concludere che i futuri dati dell'interferometro spaziale LISA potranno rilevare la presenza della polarizzazione scalare.

# Bibliografia

- [1] A. Einstein. "The Foundation of the General Theory of Relativity". *Annalen Phys.*, 49(7):769–822, 1916.
- [2] A. Einstein. "Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity". *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. )*, 1917:142–152, 1917.
- [3] H. Mo, F. C. van den Bosch, and S. White. "*Galaxy Formation and Evolution*". 2010.
- [4] F. Zwicky. "Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln". *Helvetica Physica Acta*, 6:110–127, January 1933.
- [5] D. (Ph) Rowe, R. Nemiroff, and J. Bonnell. "The Coma cluster of galaxies". <https://apod.nasa.gov/apod/ap100502.html>, 2010.
- [6] A. A. Starobinsky. "A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity". *Phys. Lett. B*, 91:99–102, 1980.
- [7] A. H. Guth. "The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems". *Phys. Rev. D*, 23:347–356, 1981.
- [8] S. Tsujikawa. Introductory review of cosmic inflation. In *2nd Tah Poe School on Cosmology: Modern Cosmology*, 4 2003.
- [9] S. Capozziello and M. De Laurentis. "Extended Theories of Gravity". *Phys. Rept.*, 509:167–321, 2011.
- [10] B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, M.R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R.X. Adhikari, and et al. "observation of gravitational waves from a binary black hole merger". *Physical Review Letters*, 116(6), Feb 2016.
- [11] B. P. Abbott et al. "Effects of waveform model systematics on the interpretation of GW150914". *Class. Quant. Grav.*, 34(10):104002, 2017.

- [12] R. Abbott et al. "Tests of General Relativity with Binary Black Holes from the second LIGO-Virgo Gravitational-Wave Transient Catalog". 10 2020.
- [13] B. P. Abbott et al. "GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2". *Phys. Rev. Lett.*, 118(22):221101, 2017. [Erratum: *Phys.Rev.Lett.* 121, 129901 (2018)].
- [14] A. Einstein and N. Rosen. "On Gravitational waves". *J. Franklin Inst.*, 223:43–54, 1937.
- [15] R. A. Hulse and J. H. Taylor. "Discovery of a pulsar in a binary system". *apjl*, 195:L51–L53, January 1975.
- [16] B. P. Abbott et al. "Properties of the Binary Black Hole Merger GW150914". *Phys. Rev. Lett.*, 116(24):241102, 2016.
- [17] S. Nojiri and S. D. Odintsov. "Modified  $f(R)$  gravity unifying  $R^m$  inflation with Lambda CDM epoch". *Phys. Rev. D*, 77:026007, 2008.
- [18] T. P. Sotiriou and V. Faraoni. "f(R) Theories Of Gravity". *Rev. Mod. Phys.*, 82:451–497, 2010.
- [19] I. Newton. "*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*". England, 1687.
- [20] U. J. Le Verrier. "Theorie du mouvement de Mercure". *Annales de l'Observatoire de Paris*, 5:1, January 1859.
- [21] A. Einstein. "On the electrodynamics of moving bodies". *Annalen Phys.*, 17:891–921, 1905.
- [22] M. Meneghetti. "Introduction to Gravitational Lensing". [https://www.ita.uni-heidelberg.de/~jmerten/misc/meneghetti\\_lensing.pdf](https://www.ita.uni-heidelberg.de/~jmerten/misc/meneghetti_lensing.pdf).
- [23] S. Capozziello and M. Funaro. "*Introduzione alla relatività generale: con applicazioni all'astrofisica relativistica e alla cosmologia*". Liguori, 2006.
- [24] S. Focardi, I. G. Massa, A. Uguzzoni, and M. Villa. "*Fisica Generale - Meccanica e Termodinamica*". Ambrosiana.
- [25] H.J. Schmidt. "Fourth order gravity: Equations, history, and applications to cosmology". *eConf*, C0602061:12, 2006.
- [26] K. S. Stelle. "Classical Gravity with Higher Derivatives". *Gen. Rel. Grav.*, 9:353–371, 1978.
- [27] R. Tripp. "Using distant type IA supernovae to measure the cosmological expansion parameters". 1997.
- [28] S. Capozziello, S. Carloni, and A. Troisi. "Quintessence without scalar fields". *Recent Res. Dev. Astron. Astrophys.*, 1:625, 2003.

- [29] S. Capozziello and M. Francaviglia. "Extended Theories of Gravity and their Cosmological and Astrophysical Applications". *Gen. Rel. Grav.*, 40:357–420, 2008.
- [30] S. Capozziello, C. Corda, and M. De Laurentis. "Massive gravitational waves from  $f(R)$  theories of gravity: Potential detection with LISA". *Phys. Lett. B*, 669:255–259, 2008.
- [31] S. Capozziello, M. De Laurentis, S. Nojiri, and S. D. Odintsov. "Evolution of gravitons in accelerating cosmologies: The case of extended gravity". *Phys. Rev. D*, 95(8):083524, 2017.
- [32] V. Faraoni. "Scalar field mass in generalized gravity". *Class. Quant. Grav.*, 26:145014, 2009.
- [33] C. P. L. Berry and J. R. Gair. "Linearized  $f(R)$  Gravity: Gravitational Radiation and Solar System Tests". *Phys. Rev. D*, 83:104022, 2011. [Erratum: *Phys.Rev.D* 85, 089906 (2012)].
- [34] M. De Laurentis and I. De Martino. "Testing  $f(R)$ -theories using the first time derivative of the orbital period of the binary pulsars". *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 431:741–748, 2014.
- [35] M. De Laurentis, I. De Martino, and R. Lazkoz. "Analysis of the Yukawa gravitational potential in  $f(R)$  gravity II: relativistic periastron advance". *Phys. Rev. D*, 97(10):104068, 2018.
- [36] S. Nojiri and S. D. Odintsov. "Modified gravity with negative and positive powers of the curvature: Unification of the inflation and of the cosmic acceleration". *Phys. Rev. D*, 68:123512, 2003.
- [37] S. Nojiri and S. D. Odintsov. "The dark universe future and singularities: the account of thermal and quantum effects". *Phys. Dark Univ.*, 30:100695, 2020.
- [38] S. Capozziello, S. Nojiri, and S. D. Odintsov. "Thermal effects and scalar modes in the cosmological propagation of gravitational waves". *Phys. Dark Univ.*, 33:100867, 2021.
- [39] C. Bogdanos, S. Capozziello, M. De Laurentis, and S. Nesseris. "Massive, massless and ghost modes of gravitational waves from higher-order gravity". *Astropart. Phys.*, 34:236–244, 2010.
- [40] S. Nojiri and S. D. Odintsov. "Cosmological Bound from the Neutron Star Merger GW170817 in scalar-tensor and  $f(R)$  gravity theories". *Phys. Lett. B*, 779:425–429, 2018.
- [41] S. Capozziello and S. Tsujikawa. "solar system and equivalence principle constraints on  $f(r)$  gravity by chameleon approach". *Phys. Rev. D*, 77:107501, 2008.
- [42] T. Nakamura, T. Katuragawa, T. Ikeda, and S. Capozziello. "Chameleon mechanism on gravitational wave in  $f(R)$  gravity". *PoS*, KMI2019:034, 2019.
- [43] A. V. Astashenok, S. Capozziello, S. D. Odintsov, and V. K. Oikonomou. "Extended Gravity Description for the GW190814 Supermassive Neutron Star". *Phys. Lett. B*, 811:135910, 2020.

- [44] S. Capozziello, M. De Laurentis, R. Farinelli, and S. D. Odintsov. Mass-radius relation for neutron stars in  $f(R)$  gravity. *Phys. Rev. D*, 93(2):023501, 2016.
- [45] S. Capozziello, M. De Laurentis, and M. Francaviglia. "Higher-order gravity and the cosmological background of gravitational waves". *Astropart. Phys.*, 29:125–129, 2008.
- [46] C. Corda. "Gravitational wave astronomy: the definitive test for the 'Einstein frame versus Jordan frame' controversy". *Astropart. Phys.*, 34:412–419, 2011.
- [47] M. Maggiore. "*Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments*". Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, 2007.
- [48] H. Takeda, S. Morisaki, and A. Nishizawa. "Scalar-tensor mixed polarization search of gravitational waves". 5 2021.
- [49] M. Isi and A. J. Weinstein. "Probing gravitational wave polarizations with signals from compact binary coalescences". 10 2017.
- [50] K. Lechner. "*Elettrodinamica classica*". Springer, 2014.
- [51] <https://ligo.org>.
- [52] C. M. Will. "The Confrontation between General Relativity and Experiment". *Living Rev. Rel.*, 17:4, 2014.
- [53] <https://www.virgo-gw.eu/>.
- [54] R. Abbott et al. "Observation of Gravitational Waves from Two Neutron Star–Black Hole Coalescences". *Astrophys. J. Lett.*, 915(1):L5, 2021.
- [55] <https://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/en/>.
- [56] <https://lisa.nasa.gov/>.
- [57] S. Capozziello, M. De Laurentis, M. Paoletta, and G. Ricciardi. "Effective field theory from modified gravity with massive modes". *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 12(01):1550004, 2015.
- [58] S. Kalita and B. Mukhopadhyay. "Gravitational wave in  $f(R)$  gravity: possible signature of sub- and super-Chandrasekhar limiting mass white dwarfs". *Astrophys. J.*, 909(1):65, 2021.
- [59] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. "*Gravitation*". W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [60] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. "*An Introduction to quantum field theory*". Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.

- [61] M. De Laurentis and S. Capozziello. "Quadrupolar gravitational radiation as a test-bed for  $f(R)$ -gravity". *Astropart. Phys.*, 35:257–265, 2011.
- [62] M. Maggiore. "*Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments*". Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, 2007.
- [63] C. Corda. "The future of gravitational theories in the era of the gravitational wave astronomy". *Int. J. Mod. Phys. D*, 27(05):1850060, 2018.
- [64] S. Goyal, K. Haris, A. K. Mehta, and P. Ajith. "Testing the nature of gravitational-wave polarizations using strongly lensed signals". *Phys. Rev. D*, 103(2):024038, 2021.
- [65] A. Nishizawa, A. Taruya, K. Hayama, S. Kawamura, and M. Sakagami. "Probing nontensorial polarizations of stochastic gravitational-wave backgrounds with ground-based laser interferometers". *Phys. Rev. D*, 79:082002, Apr 2009.
- [66] N. Christensen. "Stochastic Gravitational Wave Backgrounds". *Rept. Prog. Phys.*, 82(1):016903, 2019.
- [67] B. Allen. "The Stochastic gravity wave background: Sources and detection". In *Les Houches School of Physics: Astrophysical Sources of Gravitational Radiation*, 4 1996.
- [68] C. Brans and R. H. Dicke. "Mach's principle and a relativistic theory of gravitation". *Phys. Rev.*, 124:925–935, 1961.
- [69] R. P. Woodard. "Avoiding dark energy with  $1/r$  modifications of gravity". *Lect. Notes Phys.*, 720:403–433, 2007.
- [70] L. S. Finn and P. J. Sutton. "Bounding the mass of the graviton using binary pulsar observations". *Phys. Rev. D*, 65:044022, 2002.
- [71] A. Buonanno. "Gravitational waves". In *Les Houches Summer School - Session 86: Particle Physics and Cosmology: The Fabric of Spacetime*, 9 2007.
- [72] M. Maggiore. "Gravitational wave experiments and early universe cosmology". *Phys. Rept.*, 331:283–367, 2000.

# Ringraziamenti

Un sentito grazie a tutte le persone che mi hanno permesso di arrivare fin qui e di portare a termine questo lavoro di tesi.

La prima persona che sento di voler ringraziare è il mio relatore, il professor Salvatore Capozziello, per aver fatto nascere in me l'interesse per la Cosmologia e per le teorie della gravità. Grazie per la pazienza dimostrata e per avermi fatto da guida.

Ringrazio il dottor Daniele Vernieri per gli indispensabili consigli e per le conoscenze che mi ha trasmesso durante questi ultimi mesi di collaborazione.

Un sentito ringraziamento a mio padre Marcello e mia madre Mena per aver supportato i miei studi nonostante le difficoltà. Ringrazio mio fratello Andrea per essere stato sempre al mio fianco senza mai assecondare le mie scelte sbagliate, rincuorandomi nei momenti di sconforto. Ringrazio mia nonna Palma per essere la mia seconda mamma e per il costante ottimismo che ha dimostrato verso il futuro. Un grazie a Lucky, la mia cagnolina, che è rimasta sveglia con me durante le lunghe nottate di studio.

Ringrazio i miei amici, quelli ormai lontani e quelli vicini, per aver compreso i disagi di questo periodo senza troppi giudizi. Grazie per i momenti di spensieratezza.

E infine, voglio ringraziare la mia ragazza Merilisa, per l'infinita pazienza dimostrata negli ultimi mesi nell'ascoltare di cuore i miei insistenti e noiosi lamenti. Grazie per la forza che mi hai trasmesso. Grazie per esserci sempre stata.