

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Magistrale in Fisica

IL PIANO FONDAMENTALE DELLE GALASSIE
IN
TEORIE ESTESE DELLA GRAVITAZIONE

Relatori:

Prof. Salvatore Capozziello

Dr.ssa Micol Benetti

Candidato:

Davoud Ahmadi

Matr. N94000554

Anno Accademico 2020/2021

Indice

Introduzione	2
1 Il problema della materia oscura in astrofisica	5
1.1 Richiami di fisica newtoniana	5
1.2 Cenni storici	6
1.3 La materia oscura nelle galassie	7
1.4 La materia oscura negli ammassi	10
1.5 Materia oscura e cosmologia	11
1.6 Ricerca di materia oscura in astrofisica	14
2 Ipotesi sulla natura della materia oscura	17
2.1 Materia oscura negli aloni galattici: i MACHOs	18
2.2 Materia oscura non barionica	19
2.3 Rilevazione di materia oscura	20
3 Le teorie $f(R)$ della gravitazione	25
3.1 Le teorie $f(R)$	26
3.2 il caso $(R) \propto R^n$	29
3.3 La soluzione per un sistema a simmetria sferica	32
4 Il piano fondamentale nelle teorie estese	34
4.1 Il piano fondamentale delle galassie ellittiche	34
4.2 Velocità circolare e parametri del piano fondamentale	36
4.3 Ricostruzione del piano fondamentale in teorie estese	37
4.4 Conclusioni	44

Introduzione

La Relatività Generale presenta notevoli successi nella spiegazione di fenomeni difficilmente descrivibili sulla base della gravitazione newtoniana, come il redshift gravitazionale, la deflessione della luce ad opera di corpi massivi, l'emissione di onde gravitazionali, confermata dai più recenti esperimenti VIRGO e LIGO e la precessione del perielio di Mercurio [1]. Quest'ultima per essere giustificata classicamente necessiterebbe dell'introduzione di una componente quadrupolare del campo gravitazionale solare o dell'esistenza di un ulteriore pianeta interno, situato tra Mercurio e il sole. Tuttavia i test classici della Relatività Generale sono stati effettuati in regime di campo debole ed alle scale del sistema solare (decimi di parsec), questo, unito ad alcune problematiche che verranno presentate di seguito ha fatto emergere la necessità di estendere e generalizzare la teoria. In primo luogo, la teoria di Einstein mal si presta (a differenza di altre teorie di campo come l'Elettromagnetismo) ad essere quantizzata. Una quantizzazione dei gradi di libertà del campo gravitazionale si tradurrebbe infatti in una descrizione quantistica dello spazio-tempo, che non trova analogie in alcuna teoria di campo formulata in precedenza. Questo problema non consente l'unificazione della gravitazione con le altre interazioni fondamentali, impedendo la descrizione di tutte le forze fondamentali in termini di aspetti diversi di una medesima simmetria, la cui realizzazione si configura come uno degli obiettivi più ambiziosi della fisica contemporanea [1, 2]. D'altro canto, in ambito cosmologico ed astrofisico, prendendo in esame la struttura a grandi scale dell'universo (centinaia di Mpc, alle quali si dovrebbero evidenziare l'omogeneità e l'isotropia sulle quali si fonda la cosmologia contemporanea) si evidenziano importanti problematiche. Il modello Λ CDM, che assume un contributo di costante cosmologica (a cui si attribuisce l'espansione dell'universo) e di materia oscura fredda (che gioca un ruolo chiave nella formazione delle strutture e ne impedisce la disgregazione sotto l'azione dei moti particolari delle singole componenti), rende conto in modo soddisfacente di alcune fondamentali caratteristiche dell'universo osservabile, come l'abbondanza degli elementi leggeri ed il moto di recessione delle galassie. Tuttavia

permangono discrepanze con le osservazioni che per essere spiegate potrebbero richiedere l'estensione e la generalizzazione della teoria einsteiniana della gravitazione. Dal punto di vista teorico, il Modello Cosmologico Standard non risulta in grado di spiegare compiutamente alcune caratteristiche dell'universo osservabile, tra cui l'omogeneità e la piattezza spaziale dello stesso [1]. Per rendere conto di queste ultime si è introdotto il paradigma inflazionario, secondo il quale l'universo primordiale avrebbe subito una fase di espansione accelerata, probabilmente dovuta all'azione di un campo scalare, il cosiddetto inflatone. Tuttavia, ad oggi, non si dispone di una teoria standard dell'inflazione, che pur risultando un'ipotesi largamente accettata non può essere descritta compiutamente [1]. Inoltre materia ed energia oscura, il cui contributo al bilancio energetico totale dell'universo risulta preponderante rispetto a quello fornito dalla materia barionica ordinaria, non sono ancora state identificate con oggetti fisici rilevati mediante osservazioni, rischiando di rappresentare "ingredienti" introdotti ad hoc per spiegare le osservazioni. In questo contesto si inseriscono le teorie estese della gravitazione, dalle teorie scalar-tensoriali (derivanti originariamente dall'esigenza di recuperare il principio di Mach, secondo cui i fenomeni inerziali deriverebbero dal moto rispetto alla distribuzione di materia presente nell'universo), che presuppongono l'accoppiamento della gravitazione con uno o più campi scalari, fino alle teorie $f(R)$ [1]. Queste ultime generalizzano la teoria di Einstein, introducendo nella Lagrangiana del campo gravitazionale termini di ordine superiore nello scalare di Ricci, che possono derivare da correzioni di natura quantistica [1]. In questo lavoro di tesi ci si concentrerà in particolare sulle seconde e sulla loro capacità di spiegare la dinamica galattica senza ipotizzare l'esistenza della materia oscura.

Nel primo capitolo si presenteranno le conoscenze attuali sulla materia oscura, la cui esistenza deve essere postulata al fine di spiegare la formazione e la dinamica di strutture quali galassie e cluster, che non potrebbero preservare la propria integrità sulla base delle forze gravitazionali generate dalla sola materia barionica visibile. Successivamente, nel secondo capitolo, si esamineranno le entità fisiche candidate a contribuire a questo nuovo tipo di materia: si analizzeranno dapprima le proprietà degli oggetti compatti dell'alone, che dovrebbero fornire un contributo seppur minimo alla massa mancante, successivamente si descriveranno sommariamente le principali particelle candidate a contribuire alla materia oscura accennando sinteticamente alle teorie oltre il modello standard. Nel terzo capitolo, dopo una discussione generale sulle teorie $f(R)$, verrà analizzata la teoria particolare sulla base della quale si interpreterà la dinamica delle galassie ellittiche (rappresentata dal piano fondamentale) senza ricorrere all'ipotesi della materia oscura. Nel quarto capitolo, infine, si procederà alla ricostruzione del piano fondamentale delle

galassie ellittiche nell'ambito delle teorie estese ed alla luce dei dati osservativi ottenuti da un campione di dette galassie, questa operazione permetterà anche di imporre dei vincoli sui parametri della teoria utilizzata.

Capitolo 1

Il problema della materia oscura in astrofisica

Da un'attenta analisi di sistemi quali galassie, gruppi o ammassi risulta evidente che la dinamica dei medesimi non può essere spiegata unicamente nei termini della materia osservata. La formazione di questi aggregati e la loro esistenza come sistemi gravitazionalmente legati non può essere giustificata dall'attrazione gravitazionale esercitata dalla sola materia visibile [3]. Questa discrepanza tra la massa stimata dinamicamente e quella rilevabile tramite la radiazione emessa ha dato origine al problema della materia oscura, la cui piena comprensione e soluzione costituiscono una delle più grandi sfide della fisica contemporanea.

In questo capitolo si descriverà il problema della massa mancante: dopo aver richiamato alcuni concetti di fisica newtoniana di cui si farà uso in seguito si procederà ad analizzare l'importanza della materia oscura a livello galattico e cosmologico, descrivendo le principali tecniche di ricerca della stessa.

1.1 Richiami di fisica newtoniana

In fisica newtoniana due corpi puntiformi A e B di massa m_A e m_B e distanti r si attraggono con una forza il cui modulo è dato dalla relazione:

$$F = G_N \frac{m_A m_B}{r^2}, \quad (1.1)$$

in cui G_N indica la costante di gravitazione universale. Nonostante la formulazione della Relatività Generale ne abbia evidenziato i limiti, la legge di gravitazione universale newtoniana, insieme alle leggi di Keplero da essa derivabili resta comunque un utile strumento di analisi di sistemi astrofisici non relativistici (connotati da campi deboli e stazionari e basse velocità).

Enunceremo ora le tre leggi di Keplero richiamando brevemente le ipotesi a partire dalle quali esse possono essere derivate dalla legge di Newton ed evidenziandone i limiti di validità.

La prima legge di Keplero afferma che le orbite descritte dai pianeti attorno al sole sono ellissi delle quali il sole occupa uno dei due fuochi.

La seconda legge di Keplero stabilisce che un raggio vettore congiungente il sole ad un pianeta orbitante intorno ad esso descrive aree uguali in tempi uguali. In termini più moderni questa legge si traduce nella conservazione del momento angolare orbitale, definito come $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$, in cui figurano la massa del pianeta orbitante intorno al sole, la sua velocità ed il vettore che ne indica la posizione (rispetto al sole), matematicamente si ha:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0. \quad (1.2)$$

La terza legge di Keplero afferma che il quadrato del periodo rivoluzione di un pianeta attorno al sole è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita:

$$T^2 = ka^3. \quad (1.3)$$

Enunciando le leggi di Keplero nella loro formulazione storica si è fatto riferimento alle orbite dei pianeti attorno al sole, va però ricordato che le leggi di Keplero valgono per un qualunque sistema isolato a due corpi interagenti gravitazionalmente, purchè vengano rispettati i seguenti requisiti:

- La massa di un corpo deve essere molto minore rispetto a quella dell'altro (le leggi di Keplero sono infatti derivate identificando uno dei due corpi con il centro di massa del sistema e l'altro con la massa ridotta).
- I due corpi devono essere efficacemente modellizzabili da punti materiali.
- I campi gravitazionali non devono essere troppo intensi (per i potenziali coinvolti deve valere la relazione $\frac{U}{c^2} \ll 1$), altrimenti non è più possibile trascurare gli effetti relativistici.

1.2 Cenni storici

Assumendo la validità della legge della gravitazione newtoniana a scale galattiche, negli anni trenta del secolo scorso J.H. Oort stimò le velocità di alcune stelle orbitanti in prossimità del piano della Via Lattea, osservandone il redshift [4]. Partendo da dette stime l'astronomo olandese dimostrò che

considerando unicamente gli effetti gravitazionali della materia visibile non era possibile spiegare come mai le stelle considerate non sfuggissero all'attrazione della nostra galassia. Va notato che la discrepanza in questione era significativa, dal momento che per spiegare le osservazioni la nostra galassia avrebbe dovuto avere una massa almeno due volte maggiore di quella derivante dalla somma di tutte le sue componenti luminose osservate. Il problema però non riguardava solo la scala galattica, nel 1933 F. Zwicky esaminando i moti delle galassie costituenti il Coma Cluster notò che essi erano così rapidi che avrebbero dovuto portare alla disgregazione del cluster considerato, in mancanza di effetti gravitazionali ulteriori rispetto a quelli spiegabili nei termini della massa visibile [3]. Fu dimostrato quindi che il problema della massa mancante si presentava anche a scale molto differenti tra loro. Successivamente, negli anni sessanta, quando fu possibile tracciare il profilo radiale delle velocità tangenziali delle stelle della Via Lattea, emerse che allontanandosi sufficientemente dal centro galattico tutte le stelle esibivano la medesima velocità di rotazione. Oltre un certo raggio quindi la velocità di rotazione di queste stelle risultava indipendentemente dalla loro distanza dal centro, ennesima osservazione non spiegabile nei termini della sola materia visibile. Nonostante queste osservazioni solo a partire dagli anni settanta la questione fu esplorata in modo approfondito e cominciarono le prime sistematiche speculazioni sull'esistenza e sulla natura della materia oscura [5, 6].

1.3 La materia oscura nelle galassie

Analizzeremo ora il problema della massa mancante a livello galattico, dopo aver richiamato alcune proprietà salienti delle galassie e la loro classificazione più comune.

E' possibile definire una galassia come un vasto insieme di stelle, gas e polveri (questi ultimi costituenti il cosiddetto mezzo interstellare) uniti dalla forza gravitazionale. Le galassie possono contenere da poche decine di milioni a mille miliardi di stelle e, nella porzione di universo attualmente accessibile all'osservazione, se ne contano più di cento miliardi. Si è soliti catalogare le galassie in base alla morfologia delle stesse, uno degli schemi di classificazione maggiormente in uso è la cosiddetta Sequenza di Hubble (elaborata da Edwin Powell Hubble tra il 1926 ed il 1936) [7, 8], essa consente di distinguere:

- Galassie ellittiche, dotate di forma ellissoidale e connotate da una distribuzione stellare piuttosto uniforme, queste galassie sono descritte da un numero intero, variabile da 0 (corrispondente ad una forma praticamente sferica) a 7 (associato a profili molto allungati), che ne descrive

l'ellitticità. Sono inoltre caratterizzate da un'esigua presenza di materia interstellare, cui è associato un tasso ridotto di formazione di nuove stelle, risultando pertanto popolate da stelle piuttosto vecchie.

- Galassie lenticolari, a loro volta divisibili in tre sottoclassi in base alla presenza più o meno marcata di "barre". Dotate di struttura discoideale con un bulge sferico al centro queste galassie possiedono (come le galassie ellittiche) ridotte quantità di materia interstellare, caratteristica cui, come visto in precedenza, è associato uno scarso tasso di formazione stellare.
- Galassie a spirale, contraddistinte da un bulge centrale (simile ad una galassia ellittica e contenente le stelle più vecchie e, talvolta, un buco nero) dal quale si dipartono dei bracci (popolati da stelle giovani e nubi di gas) configurantisi in strutture spiraleggianti in base alla morfologia del cui avvolgimento è possibile introdurre un'ulteriore classificazione. Tali galassie spiccano inoltre per l'entità del momento angolare posseduto, circa cinque volte maggiore di quello delle galassie ellittiche.
- Galassie a spirale barrata, le più abbondanti nell'universo osservabile, che si distinguono dalle precedenti per la presenza di una barra attraversante il bulge, dalla quale hanno origine i caratteristici bracci.
- Galassie irregolari, la cui forma non è riconducibile ad alcuna delle tipologie indicate in precedenza, caratterizzate dall'abbondanza di stelle giovani e materia interstellare. Queste galassie possiedono una morfologia non regolare, spiegabile nei termini di una grande varietà di fenomeni, tra cui è possibile annoverare la fusione tra galassie o l'effetto gravitazionale di una galassia vicina.

Come accennato in precedenza, il problema della massa mancante emerge anche osservando il profilo radiale delle velocità tangenziali della nostra galassia e, più in generale, delle galassie a spirale. In queste galassie gran parte della massa è localizzata nel bulge centrale e le stelle percorrono orbite approssimativamente circolari attorno al centro galattico, con velocità che possono essere stimate avvalendosi delle leggi di Keplero, in base alle quali il profilo radiale di velocità delle stelle situate oltre il disco ottico dovrebbe avere un andamento proporzionale all'inverso della radice quadrata della coordinata radiale. Le osservazioni (anche quelle spinte fino a raggi molto grandi, sfruttando la riga a 21 cm dell'idrogeno) mostrano però che superato il raggio del disco ottico il profilo di velocità resta praticamente costante. Un'ipotesi in grado di spiegare le osservazioni è quella relativa all'esistenza di un alone

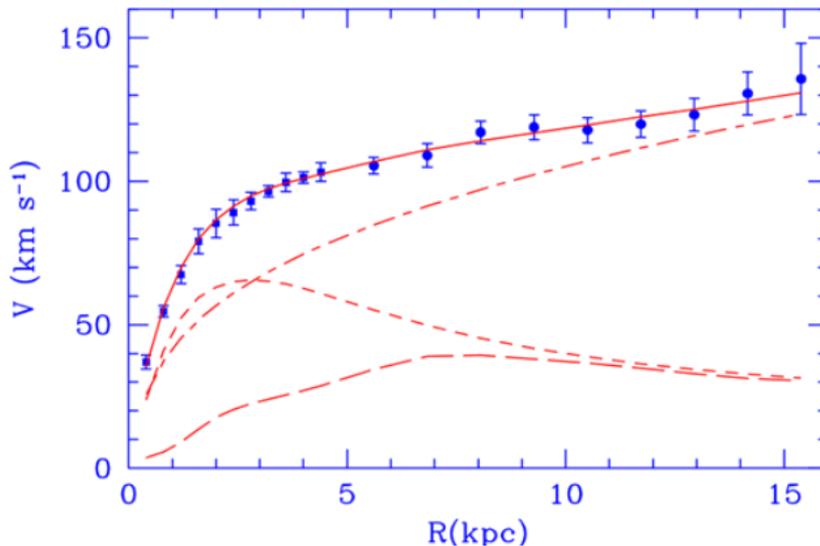


Figura 1.1: Curva di rotazione (velocità di rotazione in funzione del raggio) della galassia M33. I punti blu sono ottenuti da misure della cinematica stellare e dalla riga a 21 cm dell'idrogeno, mentre la linea continua rossa è il miglior modello che rappresenta i dati. La linea rossa tratteggiata a linee corte è il disco stellare atteso, mentre quella con le linee lunghe è il contributo del gas. L'alone di materia oscura è rappresentato dalla linea rossa con punti e linee, e vediamo che diventa dominante al crescere del raggio (2000) [11].

sferico di materia oscura, avente profilo densità $\rho(r) \propto \frac{1}{r^2}$ e profilo di massa $M(r) \propto r$, Tale alone è stato modellizzato nel tempo da diversi profili teorici, tra cui si annoverano l'alone sferico isoterma, il profilo di Navarro Frenk e White, il profilo di Einasto, il profilo di Moore ed un profilo più generale, descritto per la prima volta da Bertone in grado di ricostruire i precedenti variando i suoi parametri liberi [9, 10]. Anche nelle galassie ellittiche è possibile ravvisare la presenza di materia oscura, che può essere organizzata in aloni come nelle galassie a spirale. Nel caso delle galassie ellittiche però la quantità di materia oscura è fortemente dipendente dalla particolare galassia considerata, in alcuni casi non c'è alcuna evidenza di materia oscura almeno fino ad una distanza galattocentrica di circa 2 volte il raggio ottico, in altri casi la regione ottica può contenere una quantità di materia oscura sostanzialmente uguale a quella di materia luminosa. Un esempio di galassia ellittica è la M87 (Virgo A) la cui massa totale è 200 volte maggiore di quella stimata dagli oggetti luminosi entro una distanza di circa 600.000 anni luce. Questi dati sono ritenuti un'evidenza dell'esistenza della materia oscura in quantità circa 10 volte maggiore rispetto alla materia luminosa. Grandi quantità

di materia oscura potrebbero essere presenti anche nelle galassie nane, che presentano valori molto alti del rapporto massa-luminosità.

1.4 La materia oscura negli ammassi

Gli ammassi sono sistemi legati e virializzati comprendenti da alcune decine a migliaia di galassie, in moto nel comune potenziale gravitazionale, oltre a grandi quantità di gas intergalattico (che può eccedere di un fattore due la massa della componente galattica) [12, 13]. Come detto in precedenza, una delle prime osservazioni che evidenziò il problema della massa mancante aveva come oggetto un ammasso di galassie, nel 1933 l'astronomo Fritz Zwicky pubblicò le prime evidenze osservative relative alla presenza di una componente non otticamente rilevabile della materia. Il suo obiettivo era stimare la massa dell'oggetto più grande che fosse riuscito ad individuare, un ammasso di galassie distante circa 350 milioni di anni luce dalla terra: l'ammasso Coma o Chioma di Berenice [3]. Esso consta di oltre 1000 galassie in moto con velocità relative molto elevate, Zwicky concentrandosi su 8 di queste galassie scoprì che i loro moti erano molto più veloci di quanto atteso: le galassie nell'ammasso Coma possedevano infatti velocità superiori a 3 milioni di Km/h. Tali velocità sono state calcolate analizzando l'effetto Doppler, osservando gli spostamenti delle righe spettrali verso il rosso. Stimando la massa totale del sistema grazie alla luce emessa dalle oltre mille galassie appartenenti all'ammasso si evidenziò che le singole galassie si muovevano a velocità superiori alla presumibile velocità di fuga dall'ammasso. In altre parole l'ammasso Coma sembrava non essere stabile e avrebbe dovuto vedere le sue galassie componenti evaporare nello spazio. La stabilità non risultava dunque comprensibile, ma poteva essere spiegata se la massa complessiva fosse stata maggiore di quella stimata, ossia se la massa del materiale luminoso fosse risultata solo una frazione (circa 50 volte minore) della massa totale dell'ammasso, infatti in queste condizioni la velocità di fuga dal sistema sarebbe aumentata e conseguentemente l'ammasso stesso avrebbe potuto essere dinamicamente stabile. E' possibile ricavare dei vincoli sulla distribuzione di materia oscura all'interno di un ammasso scrivendone le equazioni di Jeans [14] (dato che si considerano sempre sistemi all'equilibrio dinamico), partendo dai parametri cinematici stimati dalle osservazioni. Negli studi condotti sull'argomento da Łokas e Mamon è emerso che la massa barionica composta da galassie e gas può contribuire solo fino al 15% alla massa totale [15]. Mediante osservazioni di lensing gravitazionale è possibile stimare la distribuzione di massa degli aloni di materia oscura attorno ad un ammasso, ed in particolare dedurre la non sfericità [15]. Si denota inoltre

una sostanziale differenza nella distribuzione di materia oscura nelle galassie e negli ammassi, mentre nelle prime la densità di materia oscura sembra aumentare all'aumentare del raggio, nei secondi si osserva la tendenza opposta. Osservazioni di *strong lensing* mostrano che la materia oscura risulta fortemente concentrata nelle regioni centrali con $10^{10} - 10^{11}$ masse solari in un raggio di 0.2-0.3 Mpc.

1.5 Materia oscura e cosmologia

Come noto dalla cosmologia, la geometria dello spazio è determinata dalla quantità di materia e di energia in esso contenuta. La cosmologia moderna è fondata sulla Relatività Generale, assumendo che l'universo sia omogeneo, isotropo (ovvero assumendo il principio cosmologico [1]) ed in espansione è possibile derivare le equazioni di Friedmann dalle equazioni di Einstein con un termine di costante cosmologica (originariamente introdotta per avere soluzioni corrispondenti ad universi statici):

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R - \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\alpha\beta}, \quad (1.4)$$

in cui figurano il tensore metrico $g_{\alpha\beta}$, il tensore di Ricci $R_{\alpha\beta}$, lo scalare di Ricci R ed il tensore energia-impulso della materia $T_{\alpha\beta}$. Le assunzioni considerate si traducono nella metrica di Friedmann-Robertson-Walker, che avrà la forma seguente:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{a^2(t)}{(1 + \frac{kr^2}{4})^2} [dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (1.5)$$

in cui il termine $a(t)$ rappresenta il fattore di scala che regola l'espansione dell'universo, mentre il parametro k può assumere i valori 0, 1 e -1, corrispondenti rispettivamente ad un universo piatto, chiuso o aperto. Le equazioni di Friedmann ottenute dalle equazioni di Einstein sulla base di queste assunzioni sono:

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G_N \rho + \Lambda c^2}{3} \quad (1.6)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (1.7)$$

in cui compaiono la densità e la pressione della materia presente nell'universo, rispettivamente ρ e p . Se si considera la materia come un fluido perfetto, a queste equazioni se ne può aggiungere una terza ricavata dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{\partial(a^3 \epsilon)}{\partial t} + p \frac{\partial a^3}{\partial t} = 0, \quad (1.8)$$

in cui t indica come di consueto la variabile temporale ed ϵ rappresenta la densità di energia dell'universo. A questo punto è possibile definire il parametro di Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$, dato dal rapporto tra la derivata temporale del fattore di scala ed il fattore di scala stesso, il cui valore al tempo presente, H_0 , compare nella legge di Hubble [16]:

$$v = H_0 d, \quad (1.9)$$

che lega la velocità di recessione di una galassia, v , alla sua distanza dall'osservatore, d . Quindi, per quanto detto, conoscendo la distribuzione della materia ed il suo moto è possibile determinare la struttura dell'Universo. La risoluzione delle equazioni cosmologiche permette di discriminare tra un universo in espansione piatto, chiuso o aperto. Ciò che consente di distinguere tra questi tre scenari è, come detto, la curvatura spaziale: di valore nullo per l'universo piatto, positiva per quello chiuso e negativa per l'aperto. Nel caso di universo chiuso la materia si dimostra sufficiente ad arrestare l'espansione e ad incurvare lo spazio in maniera tale da avere un'estensione spaziale finita, invece negli altri due casi l'universo risulta spazialmente infinito e l'espansione non si arresterà, anche se nel caso di universo piatto si avrà un progressivo rallentamento. In altri termini se l'energia totale è positiva ogni galassia si sottrarrà all'attrazione gravitazionale di ogni altra galassia e l'universo continuerà ad espandersi indefinitamente, altrimenti il moto finirà con l'arrestarsi e invertirsi in un collasso verso l'interno. Per determinare la geometria dell'universo bisogna quindi conoscere l'energia cinetica media, stimabile tramite la costante di Hubble, che determina con che velocità si muovono le galassie ad una data distanza e l'energia potenziale gravitazionale media, legata all'attrazione gravitazionale che tende a rallentare l'espansione, dipendente dalla massa totale dell'universo. Per una data costante di Hubble, i termini di energia cinetica e potenziale possono bilanciarsi dando un'energia totale nulla ed un universo piatto; il valore della densità di massa che rende questo possibile viene chiamata densità critica, che nel caso di costante cosmologica nulla può scriversi come $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G_N}$. Una densità maggiore di quella critica porta ad un universo chiuso, una densità minore ad universo aperto. Definendo la costante Ω come il rapporto tra la densità effettiva della massa totale dell'universo e la densità critica che darebbe origine ad un universo piatto si hanno tre possibilità:

- $\Omega < 1$, universo aperto, a bassa densità;
- $\Omega > 1$, universo chiuso di alta densità;
- $\Omega = 1$, universo piatto o euclideo con densità critica.

Mentre le osservazioni astrofisiche consentono di localizzare la materia oscura e di stimarne il contributo nelle strutture astronomiche, lo studio dell'universo su scale cosmologiche permette di valutare il contributo della materia oscura al parametro di densità cosmica Ω , e quindi aiuta a fornire indicazioni sulla natura fisica della materia oscura. Da studi riguardanti l'evoluzione stellare nelle galassie e dalla distribuzione di luminosità nei vari tipi di galassie si stima il contributo della materia luminosa, ovvero dovuto a materia barionica : $\Omega_b \sim 0.005$. Mentre la materia oscura contenuta nelle galassie e negli ammassi fornisce $\Omega_{dm} \sim 0.2-0.3$ [1]. Sappiamo che le stelle sintetizzano la quasi totalità degli elementi chimici e la totalità degli elementi più pesanti mediante le reazioni di fusione nucleare verificantisi al loro interno, gli elementi leggeri (H, He e Li) sono invece di origine primordiale risalenti alle prime fasi di vita dell'universo. Le abbondanze predette dal modello cosmologico del Big Bang di questi elementi sono in accordo con quelle osservate solo se il contributo dei barioni al parametro di densità cosmica è 0.04-0.05. Dallo studio della radiazione cosmica di fondo (CMB), ovvero la radiazione elettromagnetica residua prodotta dal Big Bang che permea l'universo, e che offre informazioni sulla natura dell'universo circa 300.000 anni dopo l'esplosione si ottiene $\Omega_b \sim 0.045$ e $\Omega \sim 1$. Ciò rivela che l'universo risulta piatto ed i contributi analizzati sino ad ora portano solo a circa il 30% di Ω . Per arrivare quindi ad un $\Omega \sim 1$, dobbiamo considerare la componente di maggior rilevanza: l'energia oscura, il cui effetto produce una pressione negativa in grado di spiegare i dati relativi ad un'accelerazione dell'espansione dell'universo. In conclusione, l'attuale modello cosmologico (Λ CDM), che contempla l'esistenza di energia oscura e materia oscura, oltre alla materia barionica ordinaria prevede per la composizione della massa dell'universo le seguenti percentuali, come risulta dai dati dell'esperimento Planck [17] :

- 68.3% energia oscura;
- 26.8% materia oscura fredda;
- 4.9% materia barionica.

L'aggettivo "fredda" riferita alla materia oscura non dà indicazioni sulla sua temperatura, ma sulla velocità delle particelle costituenti. Dalle simulazioni ad N corpi sappiamo che per spiegare la formazione delle strutture (galassie ed ammassi) queste particelle dovevano essere in moto a velocità non relativistiche quando iniziarono a formarsi i primi aggregati dell'universo, e proprio la velocità relativamente bassa consentì loro di "clusterizzare". In un universo in cui la materia è in gran parte composta da CDM il meccanismo fondamentale di formazione delle strutture origina da piccoli aggregati

di materia che poi si fondono l'uno con l'altro, in un processo gerarchico che crea strutture via via più grandi (schema bottom-up) [18]. Sono state prese in considerazione anche alternative in cui la materia oscura risulti calda; in questo caso le particelle avrebbero velocità relativistiche e solo in un'epoca avanzata della storia cosmica rallenterebbero fino a formare aggregati [19].

1.6 Ricerca di materia oscura in astrofisica

Nonostante la materia oscura non emetta radiazione (non solo in banda ottica ma in tutto lo spettro elettromagnetico) può essere rivelata in maniera indiretta attraverso i suoi effetti gravitazionali. Le tecniche utilizzate al momento della prime scoperte sono tutt'oggi valide: l'analisi della dinamica galattica ed interna agli ammassi ed il lensing gravitazionale, i cui effetti sono dovuti alla curvatura dello spazio-tempo. I fondamenti geometrici dell'effetto di lente gravitazionale sono molto simili a quelli riscontrati in ottica geometrica nel caso delle lenti di vetro.

Affinchè si abbia *lensing* gravitazionale è necessario che, prima di raggiungere l'osservatore a terra, la radiazione emessa da una sorgente luminosa transiti in prossimità di un corpo (o più in generale di una distribuzione di massa) con un campo gravitazionale abbastanza intenso da modificarne la traiettoria, solitamente gli effetti di lensing si riconducono a tre categorie distinte. Si parla di *strong lensing* quando il fronte d'onda proveniente dalla sorgente subisce una deformazione considerevole per effetto del campo gravitazionale della lente. Il fronte d'onda viene curvato poichè la radiazione che transita vicino ad una distribuzione di massa viene rallentata, risentendo dell'indice di rifrazione del campo gravitazionale generato dalla lente. L'effetto dipende ovviamente dalla particolare lente considerata, nonché dal suo allineamento con la sorgente e l'osservatore. Un esempio di questo tipo di lensing è dato dal cosiddetto anello di Einstein [20], fenomeno verificantesi quando si ha una massa interposta esattamente sulla congiungente oggetto lontano-osservatore e che dà luogo alla formazione di un anello luminoso continuo di raggio proporzionale alla massa dell'oggetto che agisce da lente gravitazionale, con conseguente amplificazione della luminosità della sorgente. Anche quando la distribuzione della massa della lente è più complessa, come nel caso di una galassia o di un ammasso, la conoscenza delle immagini e delle distanze permette di ricostruire la distribuzione della massa della lente $M(r)$. Una discrepanza rispetto alla quantità di materia luminosa presente nella stessa regione è il segnale dell'esistenza di materia oscura.

Nel caso di galassie al di là di un ammasso, le loro immagini risultano deformate in forma di archi o ellissi. Nel caso del weak lensing la materia che



Figura 1.2: Strong Lensing prodotto dall'ammasso Abell 2218, si osservano sia la formazione di archi, sia la produzione di immagini multiple della stessa galassia

interviene come lente è caratterizzata da bassa densità e pertanto dà origine unicamente a piccole amplificazioni e deformazioni delle sorgenti in esame. Le deformazioni sono così piccole che per avere un segnale apprezzabile risulta necessario analizzare le informazioni provenienti da molte galassie di fondo ed operare un'analisi statistica; l'insieme delle deformazioni subite dalle sorgenti lontane, anche se piccole (0.1% -1%), viene chiamato shear cosmico. Lo studio della disomogeneità della materia oscura diffusa nell'universo avviene per mezzo del weak lensing: la disomogeneità causa piccole deformazioni delle immagini delle galassie. Le galassie sono allineate in modo casuale, quindi nel caso in cui vengano evidenziate regioni con galassie schiacciate maggiormente rispetto alla media ed orientate in maniera statisticamente significativa verso una qualche direzione, si può ipotizzare che il fenomeno di allineamento sia apparente e generato dall'effetto gravitazionale di una distribuzione di massa, quindi di una lente. Il weak lensing ha evidenziato, nel caso di un campione di galassie ellittiche, la presenza di materia oscura organizzata in aloni che si estendono fino ad una distanza di 400 kpc. Si parla invece di microlensing, quando l'effetto di lensing considerato non produce deformazione, bensì una variazione nel tempo dell'intensità di luce ricevuta dalla sorgente. Da studi di *microlensing* è possibile stimare la massa dei cosiddetti MACHOs (MASSive Compact Halo Objects, composti da materia barionica ordinaria e caratterizzati da grande compattezza e scarsa luminosità, proprietà che li rendono candidati ideali a contribuire almeno in

parte alla materia oscura presente nelle galassie): se un oggetto compatto attraversa la nostra linea visuale in direzione di una stella o di una galassia, produce un ingrandimento momentaneo della sorgente [21]. In questo caso si assiste alla formazione di un anello di Einstein con un raggio troppo piccolo per poter essere distinto, e ciò si traduce in un aumento di luminosità sino ad un fattore 100 dell'oggetto di fondo. Solitamente si procede monitorando un elevato numero di stelle, nel caso dei MACHOs 10 milioni di stelle nella grande nube di Magellano e nella piccola nube di Magellano (due galassie satelliti della Via lattea). L'intensità luminosa di queste stelle di background può variare in modo caratteristico per tempi che vanno dai giorni ai mesi, a seconda della massa e della velocità trasversa dell'oggetto che ne attraversa la linea di vista .

E' possibile concepire i MACHOs come una lenti di ingrandimento che si muovono nello spazio, quando si sovrappongono esattamente ad una stella, la stessa viene ingrandita e appare più brillante. Dato che la capacità di ingrandimento è maggiore al centro della lente, la stella, viene ingrandita leggermente in una prima fase, successivamente la sua luminosità aumenta man mano che la lente si sovrappone sempre più e raggiunge il valore più elevato quando l'astro è nel punto di massimo avvicinamento al centro della lente. Quest'ultima poi prosegue il suo transito e la stella appare sempre più fioca fino a tornare alla luminosità iniziale. Dalle suddette osservazioni si ottiene una stima della massa dei MACHOs compresa tra $1/10$ e $1/2$ della massa solare, questi oggetti sono pertanto in grado di contribuire solo in minima parte a spiegare il problema della materia oscura.

La distribuzione di materia oscura all'interno di una galassia può essere ricavata dall'analisi del comportamento di un insieme di oggetti luminosi aventi il ruolo di traccianti del campo gravitazionale. Traccianti ideali sono le stelle nei dischi delle galassie a spirale, esse si muovono infatti su traiettorie approssimativamente circolari e la loro velocità in funzione della distanza galattocentrica descrive una curva di rotazione. Nelle galassie ellittiche, le stelle possiedono un moto disordinato e pertanto il tracciante ideale è dato dal gas ionizzato, che può con buona approssimazione essere considerato in equilibrio idrostatico, condizione che si realizza quando la pressione termica bilancia perfettamente la forza gravitazionale. Questo gas, che emette principalmente in banda X si estende ben oltre la regione ottica della galassia. Dall'analisi del moto dei traccianti è possibile ricostruire il potenziale generato dalla galassia e formulare ipotesi sulla distribuzione di materia che lo ha generato [7].

Capitolo 2

Ipotesi sulla natura della materia oscura

Negli anni si sono avvicinate svariate ipotesi per spiegare il problema della massa mancante, a ciascuna delle quali sono associate una o più entità fisiche che dovrebbero contribuire all'ammontare di materia oscura presente nell'universo. È importante operare preliminarmente alcune distinzioni: si può infatti avere materia oscura barionica o non barionica, calda o fredda. La materia oscura barionica è a tutti gli effetti materia ordinaria, organizzata però in aggregati come MACHOs, nane brune, stelle di bosoni o buchi neri, che non emettono radiazione elettromagnetica o la cui radiazione emessa non è rilevabile con gli strumenti attualmente a disposizione; la materia oscura non barionica, al contrario, sarebbe costituita da ipotetiche particelle indicate nel loro complesso dall'acronimo WIMP (Weakly Interacting Massive Particles) e dotate di grande massa unitaria. Queste particelle sarebbero inoltre connotate da un'interazione molto debole con la materia barionica ordinaria (si ipotizza siano soggette solo alla forza gravitazionale ed alla forza nucleare debole), motivo per cui la loro rivelazione risulterebbe particolarmente difficile. Bisogna inoltre distinguere tra materia oscura fredda, composta da particelle che si propagano a velocità molto inferiori a quella della luce e materia oscura calda, costituita invece da particelle relativistiche. Il modello cosmologico standard prevede, sulla base di stime della densità di deuterio, che almeno il 90% della materia oscura sia di natura non barionica [22]. In questo capitolo si discuterà lo stato attuale delle nostre conoscenze sulla materia oscura.

2.1 Materia oscura negli aloni galattici: i MACHOs

Con l'acronimo MACHOs si indica un insieme di oggetti astronomici che popolano gli aloni delle galassie. L'espressione fu coniata negli anni '90, ed è tutt'oggi utilizzata per indicare una classe eterogenea di oggetti (tali oggetti possono essere compatti in senso stretto, come nane bianche, stelle dei neutroni e buchi neri, oppure dotati di minor densità, come pianeti e nane brune, che sono comunque caratterizzati da un rapporto massa/luminosità elevato) che dovrebbe comporre almeno in parte l'alone di materia oscura che circonda le galassie. L'ipotesi che gli aloni di materia oscura siano costituiti da oggetti astronomici convenzionali risale agli anni '70, e fu avanzata per spiegare la forma inattesa delle curve di rotazione delle galassie a spirale, dalla cui stima risultava che le masse di queste galassie dovevano essere almeno tre volte superiori alla massa data dalla somma di tutte le componenti galattiche visibili. Fu inoltre chiaro che la massa mancante doveva essere concentrata in un alone approssimativamente sferico che circonda la parte visibile della galassia estendendosi molto oltre la stessa. La rilevanza del contributo dei MACHOs al bilancio totale della materia oscura venne messa seriamente in discussione negli anni '80 quando furono formulate le prime teorie cosmologiche richiedenti l'esistenza di materia non barionica. Tuttavia l'ipotesi dell'esistenza di questi oggetti non fu del tutto accantonata, dal momento che dette teorie non escludevano l'esistenza di una componente, seppur esigua, di materia oscura barionica che potrebbe comporre gli aloni delle galassie, mentre gli spazi tra queste ultime sarebbero popolati da materia non barionica. Negli anni '90 fu finalmente possibile mettere in atto le prime verifiche sperimentali dell'esistenza dei MACHOs, ciò avvenne tramite il monitoraggio sistematico della luminosità di alcuni milioni di stelle nelle Nubi di Magellano, con lo scopo di individuare variazioni di luminosità associate ad eventi di lensing dovuti al transito di MACHOs dell'alone della nostra galassia in prossimità della linea di vista. L'esperimento (denominato appunto MACHO) ebbe successo, riuscendo a rilevare alcuni eventi significativi, con tutta probabilità ascrivibili al passaggio di un oggetto compatto, tuttavia il numero di eventi osservati risultò molto inferiore a quello atteso nel caso in cui l'alone fosse costituito in massima parte da MACHOs [21]. In conclusione, nonostante l'esistenza dei MACHOs sia stata accertata, il loro contributo all'ammontare totale di materia oscura risulta così esiguo da non influenzare significativamente né la dinamica galattica, né a maggior ragione fenomeni di scala cosmologica.

2.2 Materia oscura non barionica

Nonostante ad oggi non si abbiano evidenze dell'esistenza di materia oscura di natura non barionica, alcune delle caratteristiche fondamentali che i costituenti elementari di questa materia esotica dovrebbero possedere sono già note:

- neutralità, altrimenti risulterebbero soggetto all'interazione elettromagnetica;
- assenza di carica di colore, altrimenti darebbero luogo ad aggregati anomali di tipo nucleare;
- stabilità su scale temporali cosmologiche, altrimenti sarebbero già decaduti;
- interazione molto debole con la materia barionica.

Nell'ambito del modello standard i neutrini sono dei buoni candidati a spiegare, in parte, l'abbondanza di materia oscura nel nostro universo, data la loro piccola massa (il cui valore non è stato ancora misurato, ma che si sa non essere nullo grazie al fenomeno delle oscillazioni) e l'estrema debolezza con cui interagiscono con altre particelle [23]. Come accennato in precedenza, dato il loro carattere relativistico, i neutrini possono spiegare solo una piccola parte della materia oscura presente nell'universo, dal momento che ci si aspetta che essa sia in massima parte costituita da materia oscura fredda. L'ipotesi attualmente più quotata sulla natura delle particelle costituenti la materia oscura fredda è quella delle WIMP (weakly interacting massive particles), particelle non previste dal modello standard, massive e caratterizzate dall'estrema debolezza con cui interagiscono con la materia barionica. Queste particelle si sarebbero formate nell'universo primordiale, per poi disaccoppiarsi dalla materia barionica gettando le basi per la formazione delle strutture. Una promettente estensione del modello standard è data dalle teorie di supersimmetria, secondo le quali per ogni particella standard ne esiste un'altra con spin differente di $\frac{1}{2}$ rispetto al suo "partner" supersimmetrico. Cardine delle teorie supersimmetriche è la conservazione di una quantità nota come R-parità, definita dalla seguente relazione [23]:

$$R = (-1)^{3(B-L)+2S}, \quad (2.1)$$

in cui B indica il numero barionico, L il numero leptonic ed S rappresenta lo spin delle particelle. R vale 1 per le particelle standard e -1 per quelle supersimmetriche, ciò implica che tali particelle possono essere prodotte ed

annichilate solo in coppia; imponendo la conservazione della R -parità si ottiene per i decadimenti di queste nuove ipotetiche particelle una regola di selezione che vieta loro di trasformarsi in particelle standard, garantendo la stabilità della loro abbondanza.

Un'ulteriore ipotesi per la spiegazione del problema della massa mancante sarebbe l'esistenza di dimensioni extra [23]. L'ipotesi dell'esistenza di dimensioni spaziali extra fu introdotta per la prima volta da Kaluza e Klein, con l'intento di unificare gravitazione ed elettromagnetismo. Nei cosiddetti modelli UED (universal extra dimensions) si assume che i campi si propaghino in dimensioni extra. L'osservatore in quattro dimensioni osserva per ogni particella del modello standard una torre di stadi di Kaluza-Klein e le particelle a noi note costituiscono il livello zero di tale torre. La conservazione dell'impulso in queste dimensioni aggiuntive si traduce nella conservazione del numero di Kaluza-Klein. Tutte le particelle standard hanno numero di Kaluza-Klein pari a zero, mentre il successivo set di stati più massivi possiede numero di Kaluza-Klein unitario. Questi stati eccitati dovrebbero manifestarsi come particelle con masse dell'ordine dei TeV. La conservazione dell'impulso in dimensioni ulteriori dà inoltre luogo ad una simmetria, la parità KK , che può garantire la stabilità delle particelle KK più leggere, svolgendo lo stesso ruolo della R -parità nel caso della supersimmetria [23]. Va notato che a differenza del caso della super simmetria, nelle teorie comprendenti dimensioni extra le particelle introdotte possiedono il medesimo spin dei loro partner del modello standard. Ciò dovrebbe rendere possibile la rivelazione di queste particelle anche ad energie minori, come quelle che si riescono a raggiungere nell'LHC.

2.3 Rilevazione di materia oscura

Ci si aspetta che le particelle che costituiscono la materia oscura, dopo essersi raffreddate ed aver perso il loro carattere relativistico, abbiano dato luogo con la materia standard ad aggregati quali le galassie, andando a costituire nello specifico un alone di forma sferica attorno alla materia ordinaria [23]. Come precedentemente evidenziato le curve di rotazione di un gran numero di galassie a spirale suggeriscono l'esistenza di aloni di materia oscura, estendendosi ben oltre il disco visibile. Nonostante misurare la curva di rotazione della nostra galassia presenti difficoltà maggiori, è stato confermato che anche la via lattea deve essere provvista di un alone di materia oscura, pertanto, se l'ipotesi relativa all'esistenza delle WIMP è corretta, anche la terra deve essere attraversata da un enorme flusso di queste particelle [23]. Nonostante la sezione d'urto d'interazione di queste particelle con la materia ordinaria

sia molto esigua, esse possono comunque essere rilevate tramite l'energia derivante dal rinculo dei nuclei atomici durante le rare interazioni [23]. Al fine di rilevare le particelle WIMP è possibile adottare anche tecniche indirette, aventi come scopo l'osservazione di raggi gamma, antimateria e neutrini prodotti dall'annichilazione di queste particelle [23]. La ricerca di particelle WIMP può avvenire anche tramite gli acceleratori di particelle, nei quali potrebbero verificarsi eventi di produzione di materia oscura. Pur non essendo direttamente rilevabili, detti eventi dovrebbero essere accompagnati da meccanismi anomali di formazione di particelle standard, interpretando i quali dovrebbe essere possibile ricostruire l'evento iniziale [23]. La massa di una particella WIMP varia tipicamente da alcune decine di GeV a pochi TeV: con queste assunzioni il segnale che si ottiene in termini di energia di rinculo dei nuclei del rivelatore è dell'ordine delle decine di keV. Date le piccole sezioni d'urto di interazione tra materia barionica ed oscura ci si aspetta tipicamente l'osservazione di un evento al giorno per kg di materia del rivelatore. Ci si confronta pertanto con segnali così bassi da poter essere facilmente sovrastati dal rumore di fondo, rappresentato principalmente dalla radiazione cosmica e dalla radioattività ambientale. I rivelatori di particelle adoperati per la ricerca di materia oscura si basano su tre meccanismi di funzionamento essenziali, che possono essere combinati all'interno dello stesso dispositivo [23]:

- ionizzazione derivante da interazioni particellari;
- scintillazione luminosa a seguito di eccitazione elettronica;
- segnale termico derivante da vibrazioni reticolari.

Un gran numero di esperimenti è stato ed è tutt'ora condotto sfruttando queste tecniche di rivelazione. Oltre ai metodi essi condividono anche gli accorgimenti operati al fine di sopprimere il più possibile il rumore di *background*, che rischierebbe di sovrastare il segnale cercato. Tra i principali esperimenti basati su tecniche di rivelazione diretta si possono citare:

- CRESST I (Cryogenic Rare Event Search using Superconducting Thermometers, effettuato nei laboratori del Gran Sasso), basato su un bolometro costituito da cristalli di zaffiro ed operante a temperatura inferiore a 10 mK [24].
- CoGeNT (Coherent Germanium Neutrino Technology, ospitato nel Sudan Underground Mine State Park), in cui si adopera un rivelatore dato da un singolo cristallo di germanio raffreddato con azoto liquido, che dovrebbe essere in grado di rivelare anche eventi derivanti da interazioni con WIMP di massa relativamente bassa [25].

- CDMS (Cryogenic Dark Matter Search, ospitato alla Stanford University), basato sulla combinazione di rivelatori al silicio ed al germanio [26].
- EDELWEISS ed EDELWEISS II (Expérience pour DEtecter Les WIMPs En Site Souterrain, effettuati nel Modane Underground Laboratory, in Francia), basati rispettivamente su un rivelatore al germanio ed un array di 10 rivelatori [27].
- PICASSO (Projet d'Identification de CAndidats Supersymétriques Sombres, effettuato allo Snolab, in Canada), che sfrutta liquidi super riscaldati [28].
- DAMA (DARk MATter, ospitato al Gran Sasso), il cui rivelatore è costituito da 10 kg di ioduro di sodio e nel quale la lettura del segnale avviene tramite un fotomoltiplicatore [29].

Si suppone che dopo il raffreddamento i processi di annichilazione delle particelle di materia oscura siano fortemente soppressi, non causando variazioni apprezzabili della densità di materia oscura. Tuttavia questi processi si verificano e sono in linea di principio osservabili, ci si aspetta quindi di poter rilevare decadimenti di particelle di materia oscura che abbiano come prodotto particelle standard. La possibilità di osservare questi eventi è alla base dei metodi indiretti. Alcuni degli esperimenti basati su detti metodi hanno avuto esiti piuttosto incoraggianti, riassumiamo brevemente di seguito i principali:

- L'esperimento PAMELA (Payload for Anti-Matter Matter Exploration and Light-Nuclei Astrophysics, effettuato in orbita) ha misurato la componente positronica nel flusso di raggi cosmici in un range energetico dai 10 ai 100 GeV, confermando un eccesso positronico già evidenziato da esperimenti precedenti [30].
- L'esperimento ATIC (Advanced Thin Ionization Calorimeter, ospitato in un pallone aerostatico) ha caratterizzato lo spettro $e^+ + e^-$ in un range che va da 3 GeV a 2.5 TeV mostrando un incremento del flusso da 100 a 600 GeV seguito da un brusco crollo ad 800 GeV [31].
- L'esperimento FERMI (che si avvale di un telescopio spaziale), che ha avuto come oggetto la rivelazione di raggi cosmici nel range energetico 3 GeV-2.5 TeV, ha confermato i risultati ottenuti in precedenza da ATIC [32].

- L'esperimento HESS (High Energy Stereoscopic System, ospitato in Namibia) sembra invece non confermare i risultati dei due sopraccitati esperimenti, anche se normalizzandone i dati si potrebbe avere un accordo entro le incertezze sperimentali [33].

I risultati di questi esperimenti non possono essere attualmente interpretati in modo univoco, lasciando aperti più scenari relativi alle fonti di emissione dei segnali rilevati, come l'annichilazione e il decadimento di particelle di materia oscura o l'emissione da parte di pulsar o di altri oggetti astronomici noti. L'interpretazione dei risultati di FERMI, PAMELA ed HESS in termini di eventi correlati a reazioni di decadimento ed annichilazione coinvolgenti materia, pur risultando promettente, è complicata dall'asimmetria tra la componente adronica e leptonica emergente dai dati di PAMELA.

Alla verifica dell'esistenza delle particelle di materia oscura potrebbero contribuire anche gli acceleratori di particelle, nei quali potrebbero, in linea di principio, avere luogo processi non osservabili a livello astrofisico. La ricerca di particelle supersimmetriche è tutt'ora in corso tramite l'LHC, un acceleratore di particelle nel quale si realizzano reazioni di collisione protone-protone con un'energia del centro di massa fino a 14 Tev, a cui sono affiancati due rivelatori: ATLAS e CMS [34, 35], in grado di rilevare con precisione fotoni, elettroni, muoni e adroni. Gli esperimenti condotti tramite l'LHC hanno escluso l'esistenza di particelle supersimmetriche dotate di masse inferiori come ordine di grandezza ai Gev, ed anche nella porzione finora esplorata del regime dei Tev non si è riscontrata evidenza alcuna di violazione del modello standard. In conclusione è possibile affermare che, pur risultando talvolta promettenti, gli esperimenti finora effettuati non sono stati in grado di fornire prova certa dell'esistenza di materia oscura. L'ipotesi della materia oscura presenta difficoltà anche dal punto di vista teorico, dato che essa sembrerebbe comportarsi in modo diverso in base alle scale ed ai sistemi considerati, mostrando una dinamica differente a seconda che si articoli in galassie (con differenze emergenti anche in base al tipo di galassia considerata) o in sistemi di dimensioni maggiori come i clusters, rendendo lecito l'interrogativo sull'opportunità di prendere in esame diversi tipi di materia oscura, il cui contributo può risultare più o meno rilevante a seconda della scala e dei sistemi presi in esame. Da questi ed altri problemi, che potrebbero configurarsi come contraddizioni non risolubili nei modelli di materia oscura di cui disponiamo scaturisce la possibilità di considerare scenari alternativi, contemplanti modifiche alla relatività generale (consistenti sovente nell'introduzione di una qualche dipendenza dalla scala) che consentano di spiegare la dinamica delle strutture osservata, senza introdurre ingredienti materiali diversi dalla materia standard.

In questo capitolo si sono riassunte le conoscenze attuali sulla materia oscura, sia da un punto di vista macroscopico che microscopico, analizzando dapprima le caratteristiche fondamentali degli oggetti compatti e, successivamente, descrivendo le proprietà di alcune particelle non previste dal modello standard che, se ne venisse verificata sperimentalmente l'esistenza, contribuirebbero alla massa mancante. Infine si sono analizzati i risultati dei principali esperimenti effettuati con lo scopo di rivelare queste particelle che, seppur promettenti in taluni casi, non hanno fornito prove definitive a supporto dell'esistenza di particelle non previste dal modello standard. Proprio per questo motivo è possibile esplorare anche scenari alternativi che non prevedono l'esistenza di materia oscura, ma basati su modifiche della Relatività Generale mediante l'introduzione di uno o più campi scalari o di termini di ordine superiore negli invarianti di curvatura. Queste teorie estese della gravitazione saranno discusse nel capitolo successivo.

Capitolo 3

Le teorie $f(R)$ della gravitazione

Come evidenziato in precedenza, pur esibendo grande accuratezza alle scale del sistema solare, la Relatività Generale presenta criticità nella descrizione della dinamica di strutture quali galassie e ammassi. Per spiegare l'esistenza di questi aggregati risulta infatti necessario ipotizzare la presenza di quantità significative (preponderanti rispetto alla materia barionica ordinaria) di materia oscura, non direttamente rilevabile in quanto incapace di emettere radiazione luminosa. Ciò nonostante gli esperimenti volti a rivelare le particelle di cui dovrebbe essere costituita la materia oscura non hanno dato esito positivo, per cui a livello fondamentale l'esistenza di questa materia esotica è ben lontana dall'essere provata. Anche per questo motivo sono nate negli ultimi decenni svariate teorie che estendono la Relatività Generale, recuperandola come caso particolare. Tali teorie risultano potenzialmente capaci di spiegare la dinamica e la formazione di galassie ed ammassi solo sulla base della materia osservabile, senza ricorrere all'ipotesi della materia oscura. L'idea di una modifica della gravità come alternativa all'ipotesi della materia oscura fu introdotta da Milgrom con la formulazione della teoria MOND (MOdified Newtonian Dynamics) [36, 37]. A ciò va aggiunto che anche a scale cosmologiche molte caratteristiche dell'universo osservabile non possono essere descritte in modo soddisfacente dalla teoria einsteiniana. Inoltre quest'ultima, in virtù del suo carattere intrinseco di teoria di campo classica, non si presta ad essere quantizzata, rivelandosi pertanto inadeguata alla descrizione dell'universo primordiale [1]. Da queste difficoltà di natura teorica e di rilevamento deriva la necessità estendere la Relatività Generale. Si definiscono teorie estese della gravitazione tutte le teorie in cui la lagrangiana del campo gravitazionale è modificata rispetto alla lagrangiana di Hilbert-Einstein. Questa modifica può avvenire essenzialmente in due modi: mediante l'aggiunta di termini di ordine superiore negli invarianti di curvatura o prendendo in considerazione contributi derivanti da campi scala-

ri (nel qual caso si parla di teorie scalar-tensoriali). Un motivo per prendere in esame il contributo di eventuali campi scalari è dato dalla possibilità di recuperare il principio di Mach, in base al quale il sistema inerziale locale risulterebbe determinato dal moto medio degli oggetti astronomici lontani. In quest'ottica risulta necessario assumere un accoppiamento gravitazionale variabile in base alla scala considerata, e pertanto dipendente da un campo scalare [1]. Uno dei requisiti fondamentali delle teorie estese deve essere la capacità di riprodurre le predizioni della Relatività Generale nel limite delle basse energie, nel quale si riscontra un ottimo accordo tra la teoria einsteiniana e gli esperimenti. Si noti a questo proposito che molte teorie estese non sono in grado di replicare esattamente i risultati della Relatività Generale nel limite newtoniano ma li estendono e generalizzano, avendo come soluzioni potenziali che presentano correzioni alla Yukawa del tipo:

$$U(r) = -\frac{G_N M}{r} \left(1 + \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{-\frac{r}{r_k}} \right), \quad (3.1)$$

che introducono termini dipendenti da scale caratteristiche (determinate dalle lunghezze di scala r_k) e, potenzialmente (in base al segno delle costanti α_k) repulsivi [1, 38, 39]. Nella seguente discussione delle teorie estese della gravitazione non si tratteranno le teorie scalar-tensoriali, concentrandosi sulle cosiddette teorie $f(R)$, in cui la lagrangiana del campo gravitazionale è rappresentata da una funzione generica dello scalare di Ricci. Dopo aver analizzato il caso generale, derivando le equazioni di campo per una generica funzione $f(R)$ si prenderà in esame la classe specifica di teorie: $f(R) \propto R^n$. La lagrangiana associata a queste teorie è data da una potenza generica dello scalare di Ricci differenziandosi della Relatività Generale in cui si ha una dipendenza lineare). In seguito, nell'ambito di questa classe di modelli, si ricostruirà il piano fondamentale delle galassie ellittiche senza ricorrere all'ipotesi della materia oscura. Si prenderà preliminarmente in considerazione il caso più semplice, derivando il potenziale generato da una massa puntiforme, successivamente verrà mostrata la soluzione per la situazione più generale di un sistema autogravitante a simmetria sferica.

3.1 Le teorie $f(R)$

Si prenderanno ora in esame le cosiddette teorie $f(R)$, in cui la lagrangiana può essere una funzione arbitraria dello scalare di Ricci. Si deriveranno le equazioni del moto nel caso più generale, senza specificare la forma di f , ed evidenziando le differenze rispetto alla teoria einsteiniana. Come per la

Relatività Generale è possibile ottenere le equazioni del moto da un principio variazionale, esse infatti minimizzeranno l'integrale della lagrangiana del sistema, in accordo col principio di Hamilton [1]. Assumendo la densità di lagrangiana $\mathcal{L} = f(R)$, [1], si può imporre il principio variazionale

$$\delta\mathcal{A} = \delta \int \sqrt{-g}f(R)d^4x = 0. \quad (3.2)$$

Tale variazione sarà calcolata nel sistema inerziale locale:

$$\begin{aligned} \delta \int \sqrt{-g}f(R)d^4x &= \int (\delta\sqrt{-g}f(R) + \sqrt{-g}\delta f(R))d^4x = \\ &= \int \sqrt{-g}[f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R)]\delta g^{\mu\nu}d^4x + \int \sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x, \end{aligned} \quad (3.3)$$

in cui l'apice indica la derivata rispetto ad R . Definendo le connessioni affini come:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(\partial_{\mu}g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}), \quad (3.4)$$

e tenendo presente le relazioni incrociate tra queste e lo scalare di Ricci si ottiene:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\partial_{\sigma}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) - g^{\mu\sigma}\partial_{\sigma}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu}) = \partial_{\sigma}W^{\sigma}, \quad (3.5)$$

in cui si è posto

$$W^{\sigma} = g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu}. \quad (3.6)$$

La 3.5 può essere usate nel secondo integrale della variazione dando:

$$\int \sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = \int \sqrt{-g}f'(R)\partial_{\sigma}W^{\sigma}d^4x \quad (3.7)$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\int \sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = \int \partial_{\sigma}[\sqrt{-g}f'(R)W^{\sigma}]d^4x - \int \partial_{\sigma}[\sqrt{-g}f'(R)]W^{\sigma}d^4x. \quad (3.8)$$

Ipotizzando che i campi si annullino all'infinito il primo di questi integrali è nullo per il teorema della divergenza, quindi abbiamo:

$$\int \sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = - \int \partial_{\sigma}[\sqrt{-g}f'(R)]W^{\sigma}d^4x. \quad (3.9)$$

Utilizzando la definizione delle connessioni affini di prima specie in 3.4 e ricordando che nel sistema di riferimento considerato $\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}g_{\mu\nu} = 0$, si può scrivere:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \delta\left[\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(\partial_{\mu}g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu})\right] = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}[\partial_{\mu}(\delta g_{\alpha\nu}) + \partial_{\nu}(\delta g_{\mu\alpha}) - \partial_{\alpha}(\delta g_{\mu\nu})]. \quad (3.10)$$

Sommando su due indici della si 3.10 ottiene:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} = \frac{1}{2}g^{\nu\alpha}\partial_{\mu}(\delta g_{\nu\alpha}). \quad (3.11)$$

Dalle 3.10 e 3.11 si ha:

$$g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}[-\partial_{\mu}(g_{\alpha\nu}\delta g^{\alpha\sigma}) - \partial_{\nu}(g_{\mu\alpha}\delta g^{\sigma\alpha}) - g^{\sigma\alpha}\partial_{\alpha}(\delta g_{\mu\nu})] = \frac{1}{2}\partial^{\sigma}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) - \partial^{\mu}(g_{\alpha\mu}\delta g^{\nu\alpha}), \quad (3.12)$$

$$g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} = -\frac{1}{2}\partial^{\sigma}(g_{\nu\alpha}\delta g^{\nu\alpha}). \quad (3.13)$$

Da cui si ottiene:

$$W^{\sigma} = \partial^{\sigma}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) - \partial^{\mu}(g_{\mu\nu}\delta g^{\sigma\nu}). \quad (3.14)$$

Utilizzando questa relazione possiamo riscrivere l'integrale all'ultimo membro della 3.3 come:

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = \\ & = - \int \partial_{\sigma}[\sqrt{-g}f'(R)][\partial^{\mu}(g_{\mu\nu}\delta g^{\sigma\nu}) - \partial^{\sigma}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) - \partial^{\mu}(g_{\mu\nu}\delta g^{\sigma\nu})]d^4x. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Integrando per parti ed eliminando i termini che si annullano in virtù del teorema della divergenza [1] si ha:

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = \int g_{\mu\nu}\partial^{\sigma}\partial_{\sigma}[\sqrt{-g}f'(R)]\delta g^{\mu\nu}d^4x + \\ & - \int g_{\mu\nu}\partial^{\mu}\partial_{\sigma}[\sqrt{-g}f'(R)]\delta g^{\sigma\nu}d^4x. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Sostituendo questa relazione si ottiene per la variazione la seguente espressione:

$$\begin{aligned} & \delta \int \sqrt{-g}f(R)d^4x = \int \sqrt{-g}[f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R)]\delta g^{\mu\nu}d^4x + \\ & + \int [g_{\mu\nu}\partial^{\sigma}\partial_{\sigma}(\sqrt{-g}f'(R)) - g_{\mu\nu}\partial^{\mu}\partial_{\sigma}(\sqrt{-g}f'(R))]\delta g^{\mu\nu}d^4x. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Imponendo che tale variazione si annulli, così da minimizzare l'azione in 3.2 si ha:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) = \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}f'(R) - g_{\mu\nu}\square f'(R), \quad (3.18)$$

in cui compaiono le derivate covarianti, indicate dall'operatore ∇ [1], e l'operatore di D'alembert ivi definito come $\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$. Le equazioni ottenute in questo modo sono del quarto ordine nelle derivate della metrica, esprimendole nei termini del tensore di Einstein si ottiene:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f'(R)g_{\mu\nu}R + \frac{1}{2}f'(R)g_{\mu\nu}R - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = f'(R)_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\square f'(R), \quad (3.19)$$

da cui

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{f'(R)}\left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(f(R) - f'(R)R) + f'(R)_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\square f'(R)\right]. \quad (3.20)$$

Queste sono le equazioni di campo nel vuoto per una generica teoria $f(R)$. Per selezionare una particolare teoria è necessario specificare la forma di f , nel nostro caso si prenderà in esame una *power law*. La 3.20 risulta particolarmente interessante dal momento che consente un'interpretazione materiale dei termini di ordine superiore, che si configurano come sorgenti delle equazioni di campo. Il membro di destra può essere quindi concepito nei termini di un contributo di curvatura al tensore energia-impulso che, anche in assenza di sorgenti di natura materiale risulta non nullo. [1].

3.2 il caso $(R) \propto R^n$

Come accennato, per selezionare una teoria sulla base della quale formulare previsioni da confrontare con i dati osservativi bisogna riscrivere la 3.20, attribuendo ad f una forma specifica. Nel caso in esame, per ricostruire il piano fondamentale, si opererà nell'ambito di una teoria di ordine superiore per la quale risulti $f(R) = f_0R^n$ (con f_0 costante dimensionale ed n numero reale). Questa teoria consente di studiare in modo agevole piccole deviazioni dalla Relatività Generale, è infatti possibile scrivere:

$$f(R) \propto R^{1+\epsilon}, \quad (3.21)$$

assumendo piccole deviazioni dalla teoria di Einstein ($|\epsilon| \ll 1$) ed operando uno sviluppo in serie di Taylor al primo ordine si ottiene

$$R^{1+\epsilon} \sim R + \epsilon R \log R + O(\epsilon^2), \quad (3.22)$$

in cui il parametro ϵ regola la correzione rispetto alla Relatività Generale, che è pienamente recuperata nel limite in cui quest'ultimo tende a zero. Questo modello, che costituisce una delle più immediate generalizzazioni della

teoria della gravitazione einsteiniana, è stato impiegato con successo nella descrizione del piano fondamentale delle galassie [38, 40, 41] e delle curve di rotazione delle galassie a spirale [42–44], nonchè nell’analisi di problematiche cosmologiche [45, 46].

Si consideri l’azione:

$$A = \int \sqrt{-g}[f(R) + \mathcal{L}_M]d^4x, \quad (3.23)$$

in cui $f(R)$ rappresenta come di consueto una generica funzione dello scalare di Ricci, mentre \mathcal{L}_M indica la lagrangiana materiale. Le equazioni del moto saranno ottenute aggiungendo il termine di materia alla 3.20:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{f'(R)} \left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(f(R) - f'(R)R) + f'(R)_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\square f'(R) \right] + \frac{T_{\mu\nu}^{(m)}}{f'(R)}, \quad (3.24)$$

in cui i termini $f'(R)_{;\mu;\nu}$ e $\square f'(R)$ sono del quarto ordine nelle derivate della metrica. Nel nostro caso si sceglie di considerare $f(R) = f_0R^n$, con f_0 costante dimensionale. Considerando il campo generato nel vuoto da una massa puntiforme la metrica assume la seguente forma:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (3.25)$$

in cui $A(r)$ e $B(r)$ rappresentano le componenti incognite della metrica, mentre $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$. Combinando la componente 00 delle equazioni di campo nel vuoto con la traccia delle medesime si ottiene:

$$f'(R)\left(3\frac{R_{00}}{g_{00}} - R\right) + \frac{1}{2}f(R) - 3\frac{f'(R)_{;00}}{g_{00}} = 0. \quad (3.26)$$

Scegliendo per $f(R)$ la forma f_0R^n per la componente 00 delle equazioni di campo si ottiene si ha:

$$R_{00}(r) = \frac{2n-1}{6n}A(r)R(r) - \frac{n-1}{2B(r)}\frac{dA(r)}{dr}\frac{d\ln R(r)}{dr}, \quad (3.27)$$

mentre la traccia diventa:

$$\square R^{n-1}(r) = \frac{2-n}{3n}R^n(r) \quad (3.28)$$

Ovviamente per $n = 1$ la Relatività Generale, e con essa la soluzione di Schwarzschild [1], viene recuperata. Cercando una soluzione nel limite di campo debole e delle basse velocità, ed esprimendo R_{00} ed R in funzione della metrica si ottiene un sistema di equazioni differenziali per $A(r)$ e $B(r)$.

Tenendo conto della forma assunta dalla metrica nel limite newtoniano per $A(r)$ e $B(r)$ è possibile operare la scelta la seguente:

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = 1 + \frac{2\phi(r)}{c^2}, \quad (3.29)$$

in cui $\phi(r)$ indica il potenziale generato da una sorgente puntiforme a distanza r . Per il potenziale invece si ottiene la forma:

$$\phi(r) = -\frac{Gm}{2r} \left[1 + \left(\frac{r}{r_c} \right)^\beta \right], \quad (3.30)$$

in cui r_c rappresenta un raggio di scala, dipendente dalle proprietà fisiche del sistema considerato e responsabile della deviazione dalla relatività generale a scale galattiche, mentre β costituisce un parametro adimensionale universale, in quanto dipendente dalla teoria scelta ma non dal sistema in esame, legato ad n dalla relazione:

$$\beta = \frac{12n^2 - 7n - 1 - \sqrt{36n^4 + 12n^3 - 83n^2 + 50n + 1}}{6n^2 - 4n + 2}. \quad (3.31)$$

Questo potenziale devia da quello newtoniano a causa della presenza di un termine aggiuntivo. Per $n = 1$ si ha $\beta = 0$, ed il potenziale newtoniano è recuperato. Il parametro r_c è una costante di integrazione, che può essere identificata con un ulteriore raggio gravitazionale (che si aggiunge al raggio di Schwarzschild), data la sua dipendenza da una simmetria della Lagrangiana che si evidenzia nei modelli con $f(R) \propto R^n$ [42]. E' necessario imporre alcuni vincoli di natura fisica ai parametri di questo potenziale modificato, innanzitutto ci si aspetta che il potenziale si annulli al divergere di r ovvero che

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0, \quad (3.32)$$

da cui $\beta - 1 < 0$. Imponendo il recupero del potenziale newtoniano nel sistema solare si giunge alla condizione: $\beta - 1 > -1$, che evita la crescita del potenziale alle scale del sistema solare, alle quali si dovrebbe avere $r \ll r_c$. Mettendo insieme questi vincoli si ottiene: $0 < \beta < 1$, che in termini di n si può scrivere come $n \geq 1$. Vincoli più stringenti sui parametri del potenziale saranno imposti in seguito, quando si ricostruirà il piano fondamentale delle galassie ellittiche.

3.3 La soluzione per un sistema a simmetria sferica

La soluzione ottenuta per una massa puntiforme può essere generalizzata al caso di un sistema esteso dotato di simmetria sferica, l'analisi di un tale sistema nell'ambito del modello considerato è più complessa rispetto al caso newtoniano. Per un potenziale newtoniano, infatti, il teorema di Gauss [1] garantisce l'equivalenza tra il campo gravitazionale generato da un sistema a simmetria sferica ad una certa distanza r dal suo centro, e quello prodotto da un corpo puntiforme avente massa pari a quella del sistema contenuta nel raggio r , e situato nel suo centro geometrico [47], indicando con ρ la densità del sistema in esame si ha:

$$\phi_N(r) = -GM \int \frac{\rho(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = -\frac{4\pi G}{r} \int_0^{+\infty} \rho(r')r'^2 dr' = -\frac{GM(r)}{r}, \quad (3.33)$$

in cui, assumendo che il centro del sistema considerato coincida con quello delle coordinate, si è usato il teorema di Gauss per portare $|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1}$ fuori dal segno dell'integrale e per limitare l'integrazione ad r , dato che i punti con $r' > r$ danno contributo nullo.

Dal momento che il teorema di Gauss per il campo gravitazionale deriva dalla proporzionalità all'inverso del quadrato della distanza caratterizzante la forza di Newton [48], questo fondamentale risultato perde di validità nel modello in esame. Si procederà quindi dividendo il potenziale 3.30 in due contributi, uno dei quali coincide (a meno di un fattore moltiplicativo pari ad $\frac{1}{2}$) con il potenziale newtoniano, ed a cui si può pertanto applicare il teorema di Gauss, ottenendo il risultato classico. Per quanto detto si avrà:

$$\phi(r) = \frac{\phi_N(r) + \phi_c(r)}{2}, \quad (3.34)$$

con

$$\phi_c(r) = -G \int_0^{+\infty} \rho(r')r'^2 dr' \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} \psi_c d\phi', \quad (3.35)$$

in cui ψ_c rappresenta la parte non newtoniana del potenziale 3.30, ed avrà quindi la seguente forma:

$$\psi_c(r) = -\frac{Gm}{r_c} \left(\frac{r}{r_c}\right)^{\beta-1}. \quad (3.36)$$

Sostuiamo $|\vec{x} - \vec{x}'|$ con $(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta')^{\frac{1}{2}}$, consideriamo ψ_c usando 3.36 e 3.35 ed integriamo sulle variabili angolari θ' e ϕ' . Otteniamo infine [40, 47]:

$$\phi_c(r) = -\frac{\pi Gr_c^2}{3}[I_1(r) + I_2(r)], \quad (3.37)$$

in cui I_1 e I_2 sono funzioni ipergeometriche con la seguente forma [40]:

$$I_1 = 3\pi \int_0^{+\infty} (\xi^2 + \xi'^2)^{\frac{\beta-1}{2}} \rho(\xi') \xi'^2 d\xi' \times {}_2F_1 \left[\left\{ \frac{1-\beta}{4}, \frac{3-\beta}{4} \right\}, \{2\}, \left\{ \frac{4\xi^2 \xi'^2}{(\xi^2 + \xi'^2)^2} \right\} \right] \quad (3.38)$$

$$I_2 = 4(1-\beta)\xi \int_0^{+\infty} (\xi^2 + \xi'^2)^{\frac{\beta-3}{2}} \rho(\xi') \xi'^2 d\xi' \times {}_3F_2 \left[\left\{ 1, \frac{3-\beta}{4}, \frac{5-\beta}{4} \right\}, \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right\}, \left\{ \frac{4\xi^2 \xi'^2}{(\xi^2 + \xi'^2)^2} \right\} \right]. \quad (3.39)$$

In particolare I_1 ed I_2 si usano la seguente notazione relativa alle funzioni ipergeometriche:

$${}_pF_q[\{a_1 \dots a_p\}, \{b_1 \dots b_q\}, x] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n x^n}{n!}, \quad (3.40)$$

in cui i coefficienti della serie sono determinati come segue:

$$c_0 = 1, \quad \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_p)}{(n+b_1)(n+b_2)\dots(n+b_q)}. \quad (3.41)$$

Analizzate le proprietà formali della teoria $f(R) \propto R^n$ è possibile farne uso per fornire una spiegazione alternativa della dinamica galattica che non necessiti di materia oscura. Teorie alternative della gravitazione sono state già impiegate con successo per rendere conto della forma delle curve di rotazione delle galassie a spirale [42–44]. Nel nostro caso l'obiettivo sarà la ricostruzione del piano fondamentale delle galassie ellittiche (relazione in grado di sintetizzare le proprietà globali di questi oggetti) a partire dal potenziale newtoniano modificato ottenuto. La presentazione e la discussione dei risultati di questa operazione costituiranno l'argomento del prossimo capitolo.

Capitolo 4

Il piano fondamentale nelle teorie estese

In questo capitolo si analizzerà la dinamica delle galassie ellittiche sulla base delle teorie $f(R)$. In particolare verrà analizzata la relazione empirica che lega le proprietà delle galassie ellittiche, il cosiddetto piano fondamentale, e lo ricostruiremo partendo dal potenziale newtoniano modificato (senza ricorrere alla materia oscura) che si ottiene nel limite di campo debole e basse velocità di teorie di ordine superiore del tipo $f(R) \propto R^n$. Questa classe di teorie è caratterizzata da una simmetria della lagrangiana, che implica in virtù del teorema di Noether [1] l'esistenza di una quantità conservata durante il moto. Da questa legge di conservazione è possibile derivare un ulteriore raggio di scala, che si aggiunge al raggio di Schwarzschild, dipendente dalle caratteristiche del sistema considerato [41]. Dopo aver descritto sinteticamente le caratteristiche del piano fondamentale, si metteranno in relazione i parametri che lo caratterizzano con quelli del potenziale 3.30. Infine si opererà la ricostruzione del piano fondamentale, che porrà dei vincoli ai parametri che caratterizzano il potenziale newtoniano modificato. Immediata e fondamentale conseguenza di questo approccio è la possibilità di affrontare il problema della dinamica galattica senza ricorrere alla materia oscura, ma assumendo una modifica della gravità, che si presenterebbe come un'interazione dipendente dalla scala [41].

4.1 Il piano fondamentale delle galassie ellittiche

Il piano fondamentale delle galassie ellittiche rappresenta uno degli strumenti più importanti per l'analisi di questi oggetti, nonché un importante banco di

prova per qualunque teoria estesa della gravitazione candidata a descrivere la dinamica galattica, consentendo di discriminare tra diverse teorie e di imporre vincoli ai parametri che caratterizzano le stesse. Questa relazione lega le proprietà morfologiche, cinematiche e fotometriche delle ellittiche, rappresentate da tre parametri [40]:

- r_e , il raggio efficace, ovvero il raggio della circonferenza che include metà della luminosità osservata della galassia. Questo parametro descrive la morfologia della galassia considerata, dal momento che un sistema galattico non possiede una frontiera definibile in modo univoco ed immediato;
- I_e , la brillantezza superficiale media all'interno di r_e , che rende conto delle proprietà fotometriche della galassia in esame;
- v , che rappresenta la velocità di dispersione centrale, essa descrive la cinematica del sistema. Le galassie ellittiche sono infatti caratterizzate da rotazione scarsa o assente ed a differenza delle galassie a spirale (cosiddetti sistemi "freddi"), la cui cinematica può essere efficacemente descritta da una curva di velocità $v(r)$, presentano una distribuzione di velocità. La dispersione associata a questa distribuzione può essere legata ad una temperatura caratteristica (sistemi "caldi").

Considerando i logaritmi di questi parametri il piano fondamentale può essere scritto come:

$$\log(r_e) = a \log(v) + b \log(I_e) + c. \quad (4.1)$$

Nello spazio definito da questi tre parametri, quindi, le galassie ellittiche non si dispongono casualmente, ma lungo un piano. I valori dei coefficienti a , b e c possono essere stimati a partire dal teorema del viriale, da cui si ottiene $a = 2$ e $b = -1$. Osservativamente (da misure fotometriche e spettroscopiche) si ottiene invece $a = 1.40$ e $b = -0.85$ [49, 50], il piano teorico e quello effettivo risultano dunque inclinati di circa 15° l'uno rispetto all'altro. La non perfetta coincidenza dei due piani è in massima parte dovuta alla non omogeneità dei sistemi galattici ed all'effetto delle popolazioni stellari. Va inoltre ricordato che per derivare i coefficienti del piano fondamentale mediante il teorema del viriale si assume per semplicità un rapporto massa/luminosità costante [41]. Il piano fondamentale costituisce uno strumento privilegiato nello studio delle galassie ellittiche, nonché un importante banco di prova per qualunque teoria estesa della gravitazione candidata a descrivere la dinamica galattica, consentendo di discriminare tra diverse teorie e di imporre vincoli ai parametri che caratterizzano le stesse.

4.2 Velocità circolare e parametri del piano fondamentale

Prima di procedere con la ricostruzione del piano fondamentale nell'ambito delle teorie $f(R)$, è necessario trovare le relazioni che legano i parametri del potenziale newtoniano corretto alle grandezze che definiscono il piano fondamentale stesso, e motivarle da un punto di vista fisico.

Per quanto riguarda il raggio di metà luce r_e , la relazione più immediata ipotizzabile con il potenziale 3.30, in cui compare r_c è data da una proporzionalità tra i due raggi di scala:

$$r_c \propto r_e, \quad (4.2)$$

quest'assunzione trova il suo fondamento nel fatto che, mentre r_c rappresenta un raggio gravitazionale teorico, r_e può essere interpretato come un raggio gravitazionale osservativo, determinato mediante fotometria. Appare quindi ragionevole ipotizzare la proporzionalità (se non addirittura l'uguaglianza) di questi due parametri. Questa ipotesi verrà testata successivamente.

Per quanto riguarda invece I_e , la può 4.1 essere riscritta esponenzialmente, in modo da rimuovere i logaritmi come:

$$r_e \propto I_e^b v^a, \quad (4.3)$$

dove ipotizzando la proporzionalità tra r_e ed r_c , possiamo derivare il legame tra quest'ultimo ed I_e .

L'ultimo parametro del piano fondamentale da interpretare alla luce delle teorie estese è dato dalla velocità di dispersione centrale, essa può essere identificata con la velocità circolare associata al potenziale modificato ad $r = r_e$, dal momento che per le galassie ellittiche risulta: $v = v_c(r_e)$ [41]. A questo punto sono necessarie alcune considerazioni sulle velocità circolari nel potenziale newtoniano modificato 3.30. Come noto, la velocità circolare in un potenziale gravitazionale dotato di simmetria sferica è data da:

$$v_c^2(r) = r \frac{d\phi}{dr}, \quad (4.4)$$

che nel caso in esame fornisce:

$$v_c^2(r) = \frac{Gm}{2r} \left[1 + (1 - \beta) \left(\frac{r}{r_c} \right)^\beta \right], \quad (4.5)$$

che può essere letta come la somma di due termini, il primo dei quali equivale alla metà del contributo newtoniano, mentre il secondo costituisce la correzione apportata dalle teorie $f(R)$. Per $\beta = 0$ i due termini si eguagliano e

sommati restituiscono il risultato newtoniano. Per quanto detto la 4.5 può risciversi come:

$$v_c^2(r) = \frac{v_{c,N}^2(r)}{2} + r \frac{d\phi_c}{dr}, \quad (4.6)$$

in cui $v_{c,N}$ rappresenta la velocità circolare newtoniana. Questa relazione vale anche per il potenziale generato da un sistema autogravitante dotato di simmetria sferica, descritto dalla 3.37. A questo punto è interessante notare che, assumendo $r_c \propto r_e$, si ha:

$$\xi(r_e) = \frac{r_c}{r_e} = \text{cost}, \quad (4.7)$$

di conseguenza $I_1(r_e)$ ed $I_2(r_e)$ non dipendono da r , per cui

$$\frac{d\phi_c(r_e)}{dr} = 0, \quad (4.8)$$

e quindi $v = \frac{v_{c,N}(r_e)}{\sqrt{2}}$. Si ottiene dunque che il modello R^n fornisce per la velocità di dispersione centrale la stessa forma del caso newtoniano. A valle di queste considerazioni di natura teorica è possibile procedere alla ricostruzione del piano fondamentale nell'ambito delle teorie $f(R)$ a partire dai dati osservativi, che sarà discussa nel successivo paragrafo [41].

4.3 Ricostruzione del piano fondamentale in teorie estese

A questo punto è possibile ricostruire il piano fondamentale nell'ambito delle teorie estese. Si utilizzeranno i dati relativi ad un campione di un centinaio di galassie ellittiche esaminato da Bender, Burstein e Faber in [49]. In particolare siamo interessati al raggio efficace, alla brillantezza superficiale ed alla dispersione di velocità delle tabelle corrispondenti. Il piano fondamentale sarà ottenuto tramite una regressione del tipo $z = ax + by + c$, in cui z rappresenta il logaritmo decimale del raggio efficace, y il logaritmo della brillantezza superficiale media all'interno del raggio efficace. Entrambe le grandezze saranno vincolate dai dati. La x , invece, rappresenta il logaritmo decimale della velocità di dispersione centrale, che verrà calcolata teoricamente nell'ambito del modello $f(R) \propto R^n$, considerando che essa coincide con la velocità circolare calcolata in corrispondenza di r_e .

Si partirà dalla relazione 4.5, testando diversi valori di β e del rapporto $\frac{r_e}{r_c}$, in corrispondenza di ogni coppia di valori scelti verranno calcolate le velocità di dispersione, per ogni set di velocità così ottenute verrà effettuata un'interpolazione. Prima di procedere al calcolo della velocità di dispersione centrale è

necessario stimare la massa della galassia, che compare in 4.5, per fare ciò si utilizzerà il teorema del viriale [7] trattando le galassie ellittiche come sistemi sferici con distribuzione di materia descritta dal profilo di Hernquist [51]. Per il teorema del viriale si ha:

$$2 \langle T \rangle + \langle U \rangle = 0 \quad (4.9)$$

L'energia cinetica si può scrivere come:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2, \quad (4.10)$$

dal momento che è impossibile conoscere la velocità di tutte le stelle della galassia si può usare come velocità media la dispersione di velocità (determinata osservativamente ed indicata con σ). Assumendo inoltre una distribuzione isotropa di velocità si ottiene:

$$\langle v^2 \rangle = 3\sigma^2, \quad (4.11)$$

da cui

$$T = \frac{3}{2} m \sigma^2. \quad (4.12)$$

A questo punto è necessario procedere al calcolo dell'energia potenziale del sistema, dal profilo di Hernquist si ha:

$$\rho(r) = \frac{ma}{2\pi r(r+a)^3}, \quad M(r) = \frac{mr^2}{(r+a)^2}, \quad (4.13)$$

con $r_e = (1 + \sqrt{2})a$. Ricordando la definizione di energia potenziale gravitazionale di un sistema si può scrivere:

$$dU = -\frac{GM(r)}{r} dm. \quad (4.14)$$

Tenendo presente che in coordinate sferiche l'elemento infinitesimo di massa può scriversi come $dm = 4\pi r^2 \rho(r) dr$ e sostituendo i profili di massa e densità si ottiene:

$$dU = -2Gm^2 a \frac{r^2}{(r+a)^5} dr,$$

da cui

$$U = -2Gm^2 a \int_0^{+\infty} \frac{r^2}{(r+a)^5} dr, \quad (4.15)$$

che restituisce:

$$U = -\frac{Gm^2}{6a}. \quad (4.16)$$

A questo punto si può stimare la massa a partire dal teorema del viriale, ottenendo:

$$m = \frac{18a}{G}\sigma^2. \quad (4.17)$$

E' ora possibile procedere alla ricostruzione del piano fondamentale. Per stimare la coppia di parametri β ed $\frac{r_c}{r_e}$ verrà eseguita una regressione (la cui bontà sarà valutata tramite un test del χ^2) per diversi valori degli stessi. In particolare verranno testati valori di $\frac{r_c}{r_e}$ su quattro ordini di grandezza, nel range $10^{-3} - 1$, e per ognuno di essi si prenderanno in esame i seguenti valori di β : 0.2, 0.4, 0.6 e 0.8. Le incertezze sui parametri del piano fondamentale saranno date dalle componenti della diagonale della matrice di covarianza. La trattazione statistica ed il calcolo dei parametri utili alla stima dell'velocità di dispersione teorica saranno operate tramite uno *script* in python. Il programma stimerà la massa di ogni galassia tramite la 4.17, usando il dato sulla dispersione di velocità. Successivamente verrà stimata la velocità circolare tramite la 4.5 e si opererà infine la regressione da cui si otterranno i coefficienti del piano fondamentale, con le relative incertezze. I risultati ottenuti sono in accordo con quanto mostrato in [41]. Riportiamo in Tab.4.1 i valori più significativi.

$(\beta, r_c/r_e)$	a	b	c	χ^2
(0.2, 1)	0.86 ± 0.01	-0.28 ± 0.01	-1.10 ± 0.05	0.009
(0.4, 1)	0.88 ± 0.01	-0.28 ± 0.01	-1.10 ± 0.05	0.010
(0.6, 1)	0.91 ± 0.01	-0.29 ± 0.013	-1.11 ± 0.049	0.011
(0.8, 1)	0.98 ± 0.02	-0.30 ± 0.01	-1.14 ± 0.05	0.013
(0.2, 0.5)	0.90 ± 0.02	-0.27 ± 0.01	-1.07 ± 0.05	0.013
(0.4, 0.5)	0.92 ± 0.02	-0.27 ± 0.02	-1.08 ± 0.05	0.014
(0.6, 0.5)	0.94 ± 0.02	-0.28 ± 0.02	-1.09 ± 0.06	0.015
(0.8, 0.5)	1.00 ± 0.02	-0.30 ± 0.02	-1.12 ± 0.06	0.017
(0.2, 0.1)	1.25 ± 0.03	-0.42 ± 0.02	-1.25 ± 0.08	0.025
(0.4, 0.1)	1.22 ± 0.03	-0.40 ± 0.02	-1.22 ± 0.08	0.025
(0.6, 0.1)	1.20 ± 0.03	-0.40 ± 0.02	-1.20 ± 0.08	0.025
(0.8, 0.1)	1.24 ± 0.03	-0.42 ± 0.02	-1.43 ± 0.08	0.025
(0.2, 0.05)	1.45 ± 0.03	-0.53 ± 0.02	-1.41 ± 0.08	0.026
(0.4, 0.05)	1.41 ± 0.03	-0.51 ± 0.02	-1.38 ± 0.08	0.026
(0.6, 0.05)	1.38 ± 0.03	-0.49 ± 0.02	-1.35 ± 0.08	0.026
(0.8, 0.05)	1.39 ± 0.03	-0.50 ± 0.02	-1.36 ± 0.08	0.026
(0.2, 0.01)	1.62 ± 0.04	-0.64 ± 0.02	-1.50 ± 0.09	0.027
(0.4, 0.01)	1.61 ± 0.04	-0.63 ± 0.02	-1.51 ± 0.09	0.027
(0.6, 0.01)	1.61 ± 0.04	-0.63 ± 0.02	-1.51 ± 0.09	0.027

(0.8, 0.01)	1.60 ± 0.04	-0.62 ± 0.02	-1.50 ± 0.09	0.027
(0.2, 0.005)	1.62 ± 0.04	-0.64 ± 0.02	-1.50 ± 0.09	0.028
(0.4, 0.005)	1.62 ± 0.04	-0.64 ± 0.02	-1.50 ± 0.09	0.028
(0.6, 0.005)	1.62 ± 0.04	-0.64 ± 0.02	-1.50 ± 0.09	0.028
(0.8, 0.005)	1.62 ± 0.04	-0.64 ± 0.02	-1.50 ± 0.09	0.027
(0.2, 0.001)	1.62 ± 0.04	-0.64 ± 0.02	-1.50 ± 0.09	0.028
(0.4, 0.001)	1.62 ± 0.04	-0.64 ± 0.02	-1.50 ± 0.09	0.028
(0.6, 0.001)	1.62 ± 0.04	-0.64 ± 0.02	-1.50 ± 0.09	0.028
(0.8, 0.001)	1.62 ± 0.04	-0.64 ± 0.02	-1.50 ± 0.09	0.028
(0.2, 0.09)	1.28 ± 0.03	-0.44 ± 0.02	-1.27 ± 0.08	0.025
(0.4, 0.09)	1.25 ± 0.03	-0.42 ± 0.02	-1.24 ± 0.08	0.025
(0.6, 0.09)	1.23 ± 0.03	-0.41 ± 0.02	-1.23 ± 0.08	0.025
(0.8, 0.09)	1.26 ± 0.03	-0.43 ± 0.02	-1.25 ± 0.08	0.025
(0.2, 0.08)	1.32 ± 0.03	-0.46 ± 0.02	-1.30 ± 0.08	0.025
(0.4, 0.08)	1.28 ± 0.03	-0.44 ± 0.02	-1.27 ± 0.08	0.025
(0.6, 0.08)	1.26 ± 0.03	-0.43 ± 0.02	-1.25 ± 0.08	0.026
(0.8, 0.08)	1.29 ± 0.03	-0.44 ± 0.02	-1.27 ± 0.08	0.026
(0.2, 0.07)	1.36 ± 0.03	-0.48 ± 0.02	-1.34 ± 0.08	0.026
(0.4, 0.07)	1.32 ± 0.03	-0.46 ± 0.03	-1.30 ± 0.08	0.026
(0.6, 0.07)	1.30 ± 0.03	-0.45 ± 0.02	-1.28 ± 0.08	0.026
(0.8, 0.07)	1.32 ± 0.03	-0.46 ± 0.02	-1.30 ± 0.08	0.026
(0.2, 0.06)	1.40 ± 0.03	-0.50 ± 0.02	-1.37 ± 0.08	0.026
(0.4, 0.06)	1.36 ± 0.03	-0.48 ± 0.02	-1.34 ± 0.08	0.026
(0.6, 0.06)	1.34 ± 0.03	-0.47 ± 0.02	-1.31 ± 0.08	0.026
(0.8, 0.06)	1.35 ± 0.03	-0.48 ± 0.02	-1.33 ± 0.08	0.026
(0.2, 0.05)	1.45 ± 0.03	-0.53 ± 0.02	-1.41 ± 0.08	0.026
(0.4, 0.05)	1.41 ± 0.03	-0.51 ± 0.02	-1.38 ± 0.08	0.026
(0.6, 0.05)	1.38 ± 0.03	-0.49 ± 0.02	-1.35 ± 0.08	0.026
(0.8, 0.05)	1.39 ± 0.03	-0.50 ± 0.02	-1.36 ± 0.08	0.026
(0.2, 0.04)	1.50 ± 0.03	-0.56 ± 0.02	-1.45 ± 0.09	0.026
(0.4, 0.04)	1.47 ± 0.03	-0.54 ± 0.02	-1.42 ± 0.08	0.026
(0.6, 0.04)	1.44 ± 0.03	-0.52 ± 0.02	-1.39 ± 0.08	0.026
(0.8, 0.04)	1.44 ± 0.03	-0.52 ± 0.02	-1.40 ± 0.08	0.026
(0.2, 0.03)	1.55 ± 0.04	-0.59 ± 0.02	-1.48 ± 0.086	0.026
(0.4, 0.03)	1.52 ± 0.04	-0.57 ± 0.02	-1.46 ± 0.09	0.026
(0.6, 0.03)	1.50 ± 0.04	-0.56 ± 0.02	-1.44 ± 0.09	0.026
(0.8, 0.03)	1.49 ± 0.04	-0.55 ± 0.01	-1.43 ± 0.09	0.026
(0.2, 0.02)	1.59 ± 0.04	-0.62 ± 0.02	-1.50 ± 0.09	0.027

(0.4, 0.02)	1.58 ± 0.04	-0.61 ± 0.02	-1.49 ± 0.09	0.026
(0.6, 0.02)	1.56 ± 0.04	-0.59 ± 0.02	-1.48 ± 0.09	0.026
(0.8, 0.02)	1.55 ± 0.04	-0.59 ± 0.02	-1.48 ± 0.09	0.026
(0.2, 0.01)	1.62 ± 0.04	-0.64 ± 0.02	-1.50 ± 0.09	0.027
(0.4, 0.01)	1.61 ± 0.04	-0.63 ± 0.02	-1.50 ± 0.09	0.027
(0.6, 0.01)	1.60 ± 0.04	-0.63 ± 0.02	-1.51 ± 0.09	0.027
(0.8, 0.01)	1.60 ± 0.04	-0.62 ± 0.02	-1.50 ± 0.09	0.027

Tabella 4.1: Tabella di valori dei parametri della regressione lineare per la ricostruzione del piano fondamentale delle galassie al variare dei valori β e r_c/r_e . Nell'ultima colonna sono riportati i rispettivi valori dell'analisi del χ^2 .

Per tutte le coppie di parametri $(\beta, r_c/r_e)$ esaminate si ottengono buoni valori del χ^2 (dell'ordine di 10^{-2}). Tuttavia bisogna considerare che il *fit* è operato su due quantità ottenute osservativamente, raggio efficace e brillantezza superficiale, ed una derivata teoricamente, la velocità di dispersione che introduce la dipendenza da β ed r_c/r_e . Più che del χ^2 (che avrebbe rappresentato l'indice di maggior importanza nel caso di punti puramente sperimentali) è necessario dunque tenere conto dell'accordo dei coefficienti del piano ottenuto con le osservazioni per selezionare le coppie $(\beta, r_c/r_e)$ di maggior interesse. Il miglior accordo dei parametri a , b e c con i valori usualmente accettati in letteratura, $a = 1.40$ e $b = -0.85$ [7], si riscontra in corrispondenza di $\beta = 0.8$ e $r_c/r_e = 0.05$. Allo stesso tempo, vale la pena sottolineare che piano fondamentale è riprodotto in modo soddisfacente per i valori di β testati in tutto il range $r_c/r_e \sim 10^{-3} - 10^{-2}$, ciò pone un importante vincolo sull'ordine di grandezza della costante di proporzionalità che lega le due lunghezze. L'assunto 4.2, su cui abbiamo fondato la nostra analisi, basato sull'idea che r_e rappresenti un raggio gravitazionale osservativo, e debba pertanto essere strettamente legato ad r_c che è invece un raggio gravitazionale teorico, risulta dunque compatibile con i dati. E' interessante notare che $\beta \sim 0.8$, oltre a fornire ottimi risultati nel caso in esame, consente di ricostruire il diagramma di Hubble senza ricorrere all'energia oscura, a partire dalle equazioni di Friedmann modificate in un modello R^n . I vincoli sul parametro β derivanti da quest'analisi non sono molto stringenti, ma il *best fit* è ottenuto in corrispondenza di $\beta = 0.817$ [47]. Il range di valori di β $0.5 - 0.8$ consente inoltre di rendere conto delle curve di rotazione di alcune galassie a spirale sulla base della sola materia barionica, riproducendo in modo consistente le predizioni delle teorie MOND [45, 46]. Sono di seguito mostrati i grafici relativi alla ricostruzione del piano fondamentale in corrispondenza di alcuni valori significativi di β ed r_c/r_e . Nel primo grafico abbiamo una panoramica

dei risultati ottenuti al variare di r_c/r_e su tutti gli ordini di grandezza esaminati. La minor dispersione dei punti attorno alla curva teorica per $r_c = r_e$ indica che i due parametri, la cui proporzionalità è stata ipotizzata, possono addirittura coincidere. L'uguaglianza di questi parametri rappresenterebbe un importante successo della teoria esaminata, che consentirebbe di derivare in modo rigoroso un parametro fenomenologico definito da osservazioni fotometriche. Nel secondo invece abbiamo il piano fondamentale ricostruito per tutti i valori testati nel range $r_c/r_e \sim 10^{-2}$. In entrambi i grafici si è scelto per β il valore 0.8 che, oltre a fornire buoni risultati nel caso di specie, si è, come detto, rivelato significativo in altri studi sulle teorie R^n .

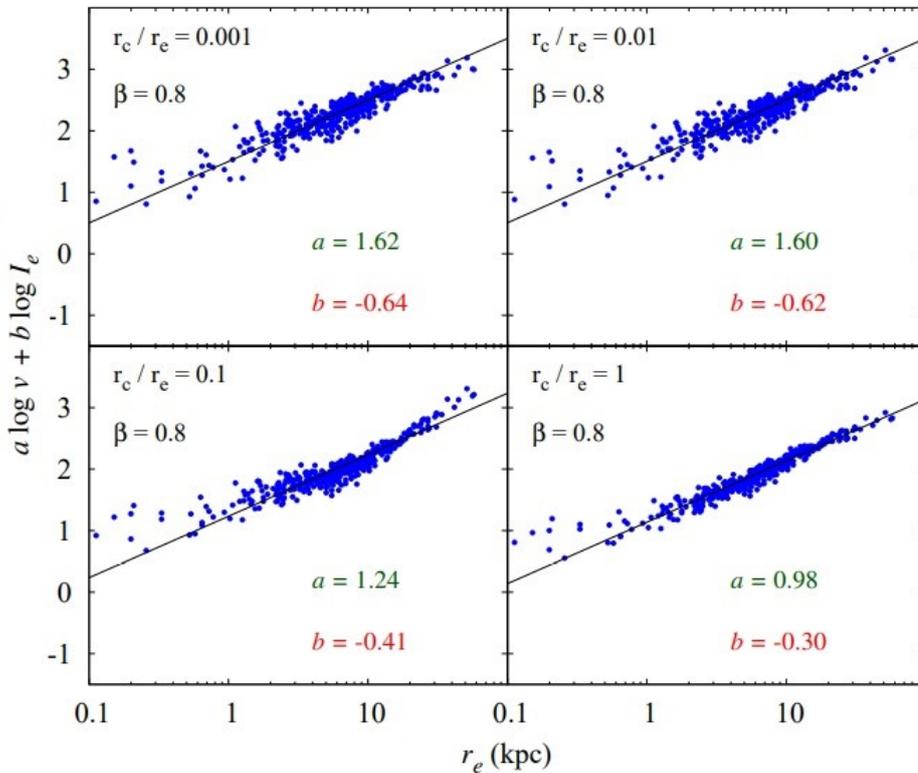


Figura 4.1: Il piano fondamentale ricostruito (linea continua nera) sulla base del raggio efficace e della brillantezza superficiale media ottenuti dai dati, e della velocità circolare teorica calcolata in un modello R^n con $\beta = 0.8$ ed $r_c/r_e = 0.001, 0.01, 0.1, 1$. I punti osservativi sono evidenziati in blu.

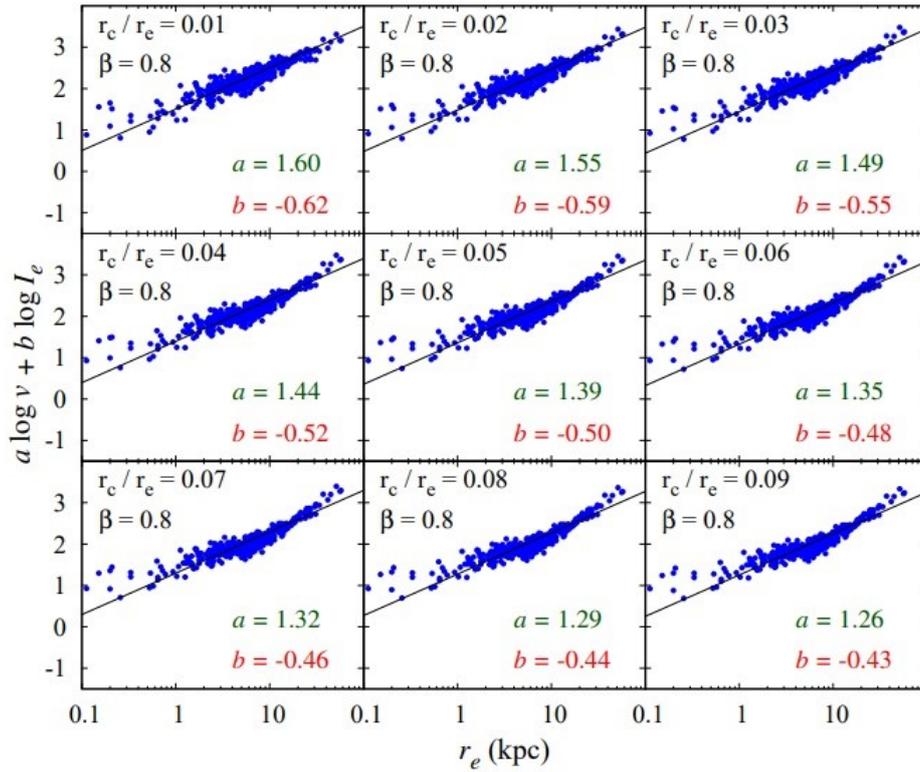


Figura 4.2: Il piano fondamentale ricostruito (linea continua nera) sulla base del raggio efficace e della brillantezza superficiale media ottenuti dai dati, e della velocità circolare teorica calcolata in un modello R^n con $\beta = 0.8$ ed $r_c/r_e = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09$. I punti osservativi sono evidenziati in blu.

4.4 Conclusioni

Il problema della materia oscura rappresenta una delle questioni di maggior rilevanza della fisica contemporanea. Se alle scale d'interesse astrofisico è necessario infatti ipotizzare l'esistenza di questa materia esotica per spiegare la formazione e la dinamica di galassie ed ammassi, a livello fondamentale nessun esperimento ha fornito prove conclusive dell'esistenza di materia non barionica. Da questa situazione è emersa la necessità di esplorare scenari teorici alternativi, come la modifica e l'estensione della Relatività Generale. L'obiettivo di questo lavoro di tesi consiste nella ricostruzione del piano fondamentale delle galassie ellittiche nell'ambito delle teorie estese della gravitazione per testare se, senza ricorrere all'ipotesi della materia oscura, sia possibile spiegare le caratteristiche osservate modificando la Relatività Generale. Il piano fondamentale sintetizza infatti le proprietà globali delle galassie ellittiche, costituendo lo strumento privilegiato nello studio di questi oggetti, nonché un importante banco di prova per tutte le teorie della gravitazione candidate a spiegare la dinamica galattica. Nel nostro caso si è considerata una teoria del tipo $f(R) \propto R^n$, in cui R rappresenta lo scalare di Ricci, mentre n è numero reale. Questa classe di modelli rappresenta la più immediata generalizzazione della teoria di Einstein, ed è caratterizzata da una simmetria della lagrangiana dalla quale è possibile ricavare un ulteriore raggio gravitazionale, i cui effetti diventerebbero significativi a scale galattiche. L'idea di fondo è che la gravitazione possa essere un'interazione dipendente dalla scala, e che l'estrapolazione dei risultati della Relatività Generale, validi per il sistema solare, possa non essere adeguata a scale galattiche e cosmologiche. Dopo aver analizzato nel dettaglio le caratteristiche del modello d'interesse, ricavando le soluzioni per il campo generato da una massa puntiforme e da un sistema a simmetria sferica nel vuoto, si è proceduto alla ricostruzione del piano fondamentale. Si è ipotizzata la proporzionalità tra il raggio di scala emerso nel limite newtoniano della teoria scelta ed il raggio efficace. Questo parametro, ricavato osservativamente tramite fotometria può essere considerato a sua volta un raggio gravitazionale, poichè include metà della materia luminosa della galassia in esame. Dopo aver stimato la massa delle galassie, trattate come sistemi sferici descritti dal profilo di Hernquist, si è proceduto alla stima della dispersione centrale di velocità, che per questi oggetti coincide con la velocità circolare in corrispondenza di r_e . Questa velocità calcolata teoricamente (che dipende da β e dal rapporto r_c/r_e) è stata usata insieme ai dati osservativi relativi alla brillantezza superficiale media ed al raggio efficace per ricostruire il piano fondamentale tramite una regressione lineare, per diversi valori della coppia di parametri $(\beta, r_c/r_e)$. I coefficienti del piano ricavati in questo modo sono in ottimo accordo con le

osservazioni nel range $r_c/r_e \sim 10^{-3} - 10^{-2}$ per tutti i valori di β considerati. Il miglior accordo con i valori dei parametri del piano fondamentale comunemente accettati si ottiene in corrispondenza di $\beta = 0.8$ ed $r_c/r_e = 0.05$, che rappresenta la stima migliore della costante di proporzionalità che lega i due raggi, entrambi concepiti come raggi gravitazionali, uno teorico e l'altro di natura osservativa. L'ipotesi che i due parametri coincidano resta comunque interessante e necessita di ulteriori approfondimenti, dal momento che il χ^2 calcolato in quest'ipotesi esibisce un valore minore di quello ottenuto testando altri valori dei parametri d'interesse. Le teorie con $f(R) \propto R^n$, che costituiscono la più semplice generalizzazione della teoria einsteiniana, sono in grado di rendere conto delle curve di rotazione delle galassie a spirale [46], del diagramma di Hubble [45] e, come mostrato, del piano fondamentale delle galassie ellittiche, senza ricorrere a materia ed energia oscura. In assenza di prove conclusive dell'esistenza di materia oscura le teorie estese della gravitazione rappresentano dunque una valida alternativa, che dovrà essere oggetto di studi ed approfondimenti ulteriori.

Bibliografia

- [1] S. Capozziello and M. Funaro. Introduzione alla relatività generale. 2005.
- [2] Giampiero Esposito. An Introduction to quantum gravity. 8 2011.
- [3] J. Ehlers. Editorial note to: F. Zwicky The redshift of extragalactic nebulae. *Gen. Rel. Grav.*, 41(1): 203–206, 2008.
- [4] J. H. Oort. Structure of the Galaxy. *IAU Symp.*, 20: 1–9, 1964.
- [5] S. D. M. White and M. J. Rees. Core condensation in heavy halos: A Two stage theory for galaxy formation and clusters. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 183: 341–358, 1978.
- [6] G. Steigman, C. L. Sarazin, H. Quintana, and J. Faulkner. Dynamical interactions and astrophysical effects of stable heavy neutrinos. *Astron. J.*, 83: 1050–1061, 1978.
- [7] J. Binney and S. Tremaine. Galactic Dynamics: Second Edition. 2008.
- [8] E. P. Hubble. Extragalactic nebulae. *Astrophys. J.*, 64: 321–369, 1926.
- [9] H. Urmaz and J. Einasto. Galactic models with massive corona I. Method. *Astron. Astrophys.*, 223: 89–94, 1989.
- [10] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White. The Structure of cold dark matter halos. *Astrophys. J.*, 462: 563–575, 1996.
- [11] E. Lopez Fune, P. Salucci, and E. Corbelli. Radial dependence of the dark matter distribution in M33. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 468(1): 147–153, 2017.
- [12] N. A. Bahcall. Clusters and superclusters of galaxies. In *13th Jerusalem Winter School in Theoretical Physics: Formation of Structure in the Universe*, 12 1995.

- [13] A. Biviano. From Messier to Abell: 200 years of science with galaxy clusters, 2000.
- [14] M. Falco, G. A. Mamon, R. Wojtak, S. H. Hansen, and S. Gottlöber. Dynamical signatures of infall around galaxy clusters: a generalized Jeans equation. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 436: 2639, 2013.
- [15] E. L. Lokas and G. A. Mamon. Dark matter distribution in the Coma cluster from galaxy kinematics: Breaking the mass - anisotropy degeneracy. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 343: 401, 2003.
- [16] E. P. Hubble and M. L. Humason. The Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae. *Astrophys. J.*, 74: 43–80, 1931.
- [17] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 641: A6, 2020. [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)].
- [18] M. Vogelsberger, J. Zavala, F. Cyr-Racine, C. Pfrommer, T. Bringmann, and K. Sigurdson. ETHOS – an effective theory of structure formation: dark matter physics as a possible explanation of the small-scale CDM problems. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 460(2): 1399–1416, 2016.
- [19] H. Velten, T. R. P. Caramês, J. C. Fabris, L. Casarini, and R. C. Batista. Structure formation in a Λ viscous CDM universe. *Phys. Rev. D*, 90(12): 123526, 2014.
- [20] C. S. Kochanek, C. R. Keeton, and B. A. McLeod. The importance of Einstein rings. *Astrophys. J.*, 547:50, 2001.
- [21] C. Alcock et al. The MACHO project: Microlensing results from 5.7 years of LMC observations. *Astrophys. J.*, 542: 281–307, 2000.
- [22] D. Tytler, D. Kirkman, J. M. O’Meara, N. Suzuki, A. Orin, D. Lubin, P. Paschos, T. Jena, W. Lin, and M. L. Norman. Cosmological parameters σ_8 , the baryon density ω_b , and the UV background intensity from a calibrated measurement of HI Lyman-alpha absorption at $z = 1.9$. *Astrophys. J.*, 617: 1–28, 2004.
- [23] S. Capozziello, L. Consiglio, M. De Laurentis, G. De Rosa, and C. Di Donato. The missing matter problem: from the dark matter search to alternative hypotheses. 10 2011.

- [24] H. Kluck et al. Search for low-mass Dark Matter with the CRESST Experiment. In *13th Patras Workshop on Axions, WIMPs and WISPs*, pages 130–133, 2018.
- [25] C. E. Aalseth et al. CoGeNT: A Search for Low-Mass Dark Matter using p-type Point Contact Germanium Detectors. *Phys. Rev. D*, 88: 012002, 2013.
- [26] M. F. Albakry et al. Ionization yield measurement in a germanium CDMSlite detector using photo-neutron sources. 2 2022.
- [27] Q. Arnaud et al. First germanium-based constraints on sub-MeV Dark Matter with the EDELWEISS experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 125(14): 141301, 2020.
- [28] S. Archambault et al. Constraints on Low-Mass WIMP Interactions on ^{19}F from PICASSO. *Phys. Lett. B*, 711: 153–161, 2012.
- [29] R. Bernabei et al. Status and perspectives of DAMA/LIBRA. In *13th Patras Workshop on Axions, WIMPs and WISPs*, pages 117–121, 2018.
- [30] V. V. Mikhailov et al. Cosmic Ray Electron and Positron Spectrum with the PAMELA Experiment. *PoS, ICRC2019*: 108, 2021.
- [31] A. D. Panov et al. Relative abundances of cosmic ray nuclei B-C-N-O in the energy region from 10 GeV/n to 300 GeV/n. Results from ATIC-2 (the science flight of ATIC). In *30th International Cosmic Ray Conference*, volume 2, pages 3–6, 7 2007.
- [32] A. Goldstein et al. An Ordinary Short Gamma-Ray Burst with Extraordinary Implications: Fermi-GBM Detection of GRB 170817A. *Astrophys. J. Lett.*, 848(2): L14, 2017.
- [33] H. Abdalla et al. Search for dark matter annihilation signals from unidentified Fermi-LAT objects with H.E.S.S. *Astrophys. J.*, 918: 17, 2021.
- [34] N. McCubbin. ATLAS: Construction of a giant. *Frontiers*, 18: 19–21, 2004.
- [35] D. Acosta and T. Camporesi. CMS starts underground. *CERN Cour.*, 48N2: 27–29, 2008.

- [36] M. Milgrom. A Modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *Astrophys. J.*, 270: 365–370, 1983.
- [37] M. Milgrom. MOND theory. *Can. J. Phys.*, 93(2): 107–118, 2015.
- [38] S. Capozziello, V. Borca Jovanović, D. Borca, and P. Jovanović. Constraining theories of gravity by fundamental plane of elliptical galaxies. 4 2020.
- [39] S. Capozziello, A. Stabile, and A. Troisi. The Newtonian Limit of $f(R)$ gravity. *Phys. Rev. D*, 76: 104019, 2007.
- [40] V. Borca Jovanović, P. Jovanović, D. Borca, and S. Capozziello. Fundamental plane of elliptical galaxies in $f(R)$ gravity: the role of luminosity. *Atoms*, 7(1): 4, 2018.
- [41] V. Borca Jovanović, S. Capozziello, P. Jovanović, and D. Borca. Recovering the fundamental plane of galaxies by $f(R)$ gravity. *Phys. Dark Univ.*, 14: 73–83, 2016.
- [42] S. Capozziello, P. Jovanović, V. Borca Jovanović, and D. Borca. Addressing the missing matter problem in galaxies through a new fundamental gravitational radius. *JCAP*, 06: 044, 2017.
- [43] C. Frigerio Martins and P. Salucci. Analysis of Rotation Curves in the framework of R^{**n} gravity. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 381: 1103–1108, 2007.
- [44] P. Salucci, C. Frigerio Martins, and Ekaterina Karukes. R^n gravity is kicking and alive: the cases of Orion and NGC 3198. *Int. J. Mod. Phys. D*, 23(12): 1442005, 2014.
- [45] S. Carloni, P. K. S. Dunsby, S. Capozziello, and A. Troisi. Cosmological dynamics of R^{**n} gravity. *Class. Quant. Grav.*, 22: 4839–4868, 2005.
- [46] S. Capozziello, V. F. Cardone, and A. Troisi. Dark energy and dark matter as curvature effects. *JCAP*, 08: 001, 2006.
- [47] S. Capozziello, V. F. Cardone, and A. Troisi. Low surface brightness galaxies rotation curves in the low energy limit of r^{**n} gravity: no need for dark matter? *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 375: 1423–1440, 2007.
- [48] S. Capozziello and M. De Laurentis. The dark matter problem from $f(R)$ gravity viewpoint. *Annalen Phys.*, 524: 545–578, 2012.

- [49] R. Bender, D. Burstein, and S. M. Faber. Dynamically hot galaxies. 1. Structural properties. *Astrophys. J.*, 399: 462, 1992.
- [50] R. Bender, D. Burstein, and S. M. Faber. Dynamically hot galaxies. 2. Global stellar populations. *Astrophys. J.*, 411: 153–169, 1993.
- [51] L. Hernquist. An Analytical Model for Spherical Galaxies and Bulges. *Astrophys. J.*, 356: 359, 1990.