UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

Ricostruzione cosmografica della dinamica dell'universo

Relatori:
Prof. Salvatore Capozziello
Dr. Rocco D'Agostino

Salvatore Capozziello

Candidato:
Michele Zerenga
Matr. $N85000970$

Anno Accademico 2021/2022

Indice

Introduzione

Per oltre un secolo, la teoria più adatta alla descrizione della gravitazione è stata la relatività generale di Einstein. Questa teoria, che trova ragione dal riscontro con le osservazioni sul sistema solare, è alla base della costruzione dei modelli cosmologici. Tale teoria si basa su determinati principi chiave, tramite i quali, Einstein, giunse all'importante conclusione sulla relazione che intercorre tra la gravità e la curvatura dello spazio-tempo. Le equazioni di campo della relatività generale vengono costruite basandosi sul concetto di covarianza generale, su leggi di conservazione ed imponendo che in limite di campi deboli, esse vengano ricondotte alla gravitazione Newtoniana. Come già detto, la relatività generale getta le basi per quello che è il modello standard della cosmologia, dando prova di fornire soluzioni esatte per modelli d'universo omogeneo ed isotropo in accordo alla metrica Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker. Tramite la costruzione di questi modelli, si cerca di descrivere l'evoluzione del cosmo dai suoi primi istanti di vita all'attuale universo osservato e di poter prevedere possibili scenari futuri. Sebbene sia una teoria di grande successo, emergono due sostanziali problematiche relative al riscontro con i dati ottenuti dalle osservazioni. Uno, riguarda la presenza di una massa che non è in grado di interagire elettromagneticamente con la materia ordinaria [1]. La presenza di una materia rilevabile solo tramite i suoi effetti gravitazionali non emerge solo come conseguenza dei risultati della cosmologia: è in accordo anche con le curve di rotazione delle galassie osservate ed a fenomeni di lensing gravitazionale. Per rispondere a questa richiesta, nasce la necessità di formulare teorie modificate della gravità, che siano in grado di giustificarne l'esistenza tramite piccole modifiche delle leggi di Keplero. Il secondo problema, è invece legato alla scoperta di Hubble di un moto di recessione tra galassie [2]: l'universo appare in una fase di espansione accelerata e ciò è confermato dallo studio sulle Supernovae di tipo Ia [3]. Le osservazioni condotte finora prevedono che la materia oscura e l'energia oscura, responsabile dell'accelerazione, siano le componenti che dominano la dinamica dell'universo. L'aggiunta di queste due nuove componenti da vita al modello ΛCDM (Λ-Cold-Dark-Matter, detto anche "Modello di concordanza") che assume l'esistenza di una costante cosmologica, Λ appunto, che sia rappresentativa dell'energia oscura [4, 5]. Tale costante ha una equazione di stato pari a -1, in modo da giustificare gli effetti di repulsione gravitazionale. A completare il modello, vi è l'assunzione che l'universo sia, attualmente, spazialmente piatto, come confermato dalle migliori interpolazioni di dati. Altri modelli per l'energia oscura sono stati proposti, non in forma di costante cosmologica, e prevedono l'esistenza di un campo scalare, con propria energia cinetica e potenziale, responsabile degli effetti di repulsione; un esempio è il modello di "Quintessenza" [6, 7]. Per cercare di fornire una descrizione adatta nell'ambito di alte energie, relative a studi sulla gravità quantistica, sono nate le teorie estese della gravità. Sebbene queste teorie differiscano sostanzialmente dalla relatività generale su scale cosmologiche, è necessario che queste si riconducano ad essa come conferma della sua validità nell'ambito del sistema solare. Abbiamo, quindi, due tipologie di approccio per testare le deviazioni dal modello di concordanza: uno prevede la parametrizzazione fenomenologica, che non richiede l'assunzione di uno specifico modello del fluido cosmico; altro modo è invece quello di assumere una classe di modelli di gravità modificata da cui, poi, derivare le osservabili. Nel testo saranno utilizzate la segnatura $(+,-,-,-)$ e le unità tali che $c = \hbar = 1$. Inoltre, $\kappa = 8\pi G = M_P^{-2}$, dove G è la costante di Newton ed M_P la massa ridotta di Planck.

Capitolo 1

Il principio cosmologico e la metrica FLRW

1.1 La relatività generale

Come accennato nell'introduzione, la relatività generale si basa su alcuni principi fondamentali. Il principio di covarianza generale richiede che le leggi della fisica debbano essere indipendenti dalla scelta di un particolare sistema di coordinate. Pertanto, il linguaggio corretto è rappresentato dal formalismo tensoriale, ad esempio, o da una qualunque altra formulazione di sistemi di coordinate indipendenti. Una buona teoria della gravità deve essere localmente consistente con la relatività speciale e deve inglobare il principio di equivalenza, la costanza della velocità della luce nel vuoto ed essere Lorentz-invariante. Cruciale è il ruolo del principio di equivalenza, tramite il quale Einstein sviluppò importanti considerazioni sul ruolo privilegiato della gravità rispetto le altre interazioni. Il principio di caduta libera, combinato a quello di equivalenza permisero ad Einstein di interpretare la gravità come la responsabile della curvatura dello spazio-tempo. Il principio di equivalenza ha varie formulazioni: nella forma *debole* suggerisce l'equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale. Questo principio permette di affermare che non è possibile distinguere, per un osservatore solidale ad una massa in moto, un effetto di accelerazione dovuto ad una qualche causa esterna da una prodotta da una massa che esercita un campo gravitazionale. La formulazione debole è soddisfatta se esiste una metrica per la quale tutte le specie di materia sono universalmente accoppiate e le particelle di test cadono lungo geodetiche di questa metrica. Esiste, poi, la formulazione di Einstein: richiede la validità della formualazione debole e che nei sistemi di riferimento in caduta libera le leggi della fisica si riconducano a quelle delle relatività speciale (assumendo l'assenza di altre forze gravitazionali). Test localmente non gravitazionali forniscono, quindi, risultati che sono indipendenti dal dove e dal quando vengono condotti. Esiste, infine, la formulazione *forte* che estende il principio in forma debole a tutti gli oggetti massivi gravitanti, indipendentemente dalla composizione dell'oggetto e dalla loro energia di legame gravitazionale. Anche oggetti compatti, come i buchi neri, cadono lungo geodetiche della metrica e la formulazione di Einstein è estesa anche alle altre interazioni. Teorie metriche della gravità soddisfano, quindi, le seguenti proprietà: devono ammettere un tensore metrico simmetrico; particelle di test devono cadere lungo geodetiche di questa metrica; in riferimenti locali, le leggi non gravitazionali sono quelle della relatività speciale. Da queste tre, si vede come le teorie metriche debbano rispettare il principio di equivalenza e viceversa. La natura geometrica della relatività generale mostra come questa si discosti dalla formulazione Newtoniana della gravità sebbene debba essere ricondotta ad essa in regime di campi deboli. Le equazioni di campo devono essere riconducibili, localmente, a quella classica di Poisson. Questo implica che nel membro sinistro delle equazioni di campo vi debbano essere derivate della metrica al massimo del secondo ordine e che debba essere dello stesso rango del tensore energia-impulso. Il tensore al membro sinistro, come il tensore energia-impulso al membro destro, devono rispettare leggi di conservazione. Il tensore proposto da Einstein, e che porta il suo nome, fu costruito servendosi dell'identità di Bianchi, giungendo alle seguenti equazioni di campo

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{1.1}$$

Questa forma delle equazioni di campo è costruita ponendo c=1 e considerando la presenza della costante cosmologica. Il tensore di Einstein ha la seguente forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \tag{1.2}$$

dove $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci, R è lo scalare di curvatura di Ricci e $g_{\mu\nu}$ il tensore metrico. La sorgente, il contenuto dello spazio-tempo, è rappresentato dal tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$ che nella sua formulazione più generale ha la seguente forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + u_\mu q_\nu + \pi_{\mu\nu}. \tag{1.3}$$

u^μ rappresenta la quadrivelocità, normalizzata ad 1, ρ e p rappresentano densità di energia e pressione del fluido, q^μ è il flusso di energia e $\pi_{\mu\nu}$ è il tensore di stress. Nella cosmologia standard, il fluido cosmico è assunto essere un fluido perfetto, per i quali sono nulli flusso di energia ed il tensore di stress. L'assunzione di fluido perfetto permette, inoltre, di mediare la densità di energia e la pressione del fluido che dipenderanno, adesso, solo dal tempo. Tali assunzioni permettono una naturale connessione tra il fluido cosmico che permea l'universo ed il cosiddetto *principio cosmologico*.

1.2 Il principio cosmologico e la metrica FLRW

La maggioranza dei modelli cosmologici si basa sul principio cosmologico. Tale principio stabilisce che l'universo, su scale cosmiche, appaia omogeneo ovunque ed isotropo rispetto ogni suo punto [8]. Ovviamente, tale principio non è applicabile all'universo in dettaglio, ma per celle di diametro da circa 10^8 a 10^9 anni luce, grandi abbastanza da contenere cluster di galassie. L'isotropia, invece, ci suggerisce una simmetria sferica dell'universo, per come ci appare. Nel 1929 Edwin Hubble scoprì l'esistenza di un moto di recessione tra le galassie tramite il fenomeno del redshift, ossia lo spostamento verso il rosso della radiazione elettromagnetica emessa da una sorgente. Determinò, quindi, una legge sulla velocità di recessione tra galassie, detta legge di Hubble

$$v = H_0 d, \tag{1.4}$$

dove H è una costante ed il pedice 0 indica il suo valore al tempo attuale, v è la velocità e d la distanza tra le due galassie. Tale legge è in accordo con il principio cosmologico in quanto quest'ultimo ci permette di esprire la distanza come prodotto di una costante per un fattore che varia con l'evoluzione dell'universo

$$d_{1,2} = a(t) r_{1,2}, \tag{1.5}$$

dove $a(t)$ è detto *fattore di scala*. In questo modo, la velocità di recessione può essere ricavata derivando questa relazione rispetto al tempo:

$$v_{1,2} = \dot{d}_{1,2} = \dot{a}(t) r_{1,2} = d_{1,2}\frac{\dot{a}}{a}. \tag{1.6}$$

Da quest'ultima si ottiene che il parametro di Hubble è dato dal rapporto tra la variazione nel tempo del fattore di scala con il fattore di scala stesso.

Data la richiesta di omogeneità ed isotropia del principio cosmologico, la metrica più adatta per la descrizione della dinamica cosmologica è la Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker [9], metrica invariante per traslazioni e rotazioni:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)\Big[\frac{1}{1-kr^2}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2\Big], \tag{1.7}$$

dove $a(t)$ è il fattore di scala e k è una costante che può assumere i valori $-1, 0, 1$; a seconda del valore assunto da k avremo, rispettivamente, un universo spazialmente aperto, piatto o chiuso. Per un universo chiuso, il fattore di scala può essere considerato come il raggio dell'universo, mentre per un universo piatto ed aperto, tale interpretazione non è possibile.

Capitolo 2

La dinamica cosmologica

Per determinare la dinamica di un modello cosmologico basato sul principio di equivalenza bisogna dare forma al fattore di scala $a(t)$, risolvendo le equazioni di Einstein con la metrica FLRW. Passiamo quindi ad analizzare quello che prende il nome di "Modello standard", modello in cui si assumono validi i seguenti punti:

- Interazione gravitazionale descritta dalla relatività generale;
- validità del principio cosmologico;
- le sorgenti di campo gravitazionale sono descritte come un fluido perfetto costituito da una componente di materia ed una di radiazione;
- validità del modello standard delle particelle;
- esistenza di una radiazione di fondo cosmica, con radiazione che è in uno stato di equilibrio termodinamico.

2.1 Le equazioni di Friedmann

Considerando valide le assunzioni prima elencate, riprendiamo le equazioni di Einstein, prive della costante cosmologica:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}. \tag{2.1}$$

Per un fluido perfetto, il tensore energia-impulso assume la seguente forma [10]:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

con $\rho(t)$ e $p(t)$ densità di energia e pressione del fluido cosmico. Queste due quantità sono tra loro legate da una equazione di stato $p = p(\rho)$. All'interno del cono luce, la quadrivelocità è normalizzata ad 1:

$$g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = 1. \tag{2.3}$$

Per un fluido a riposo rispetto le u^k con $k = 1, 2, 3$, si ottiene che

$$g_{00}u^0u^0 = 1 \Rightarrow u^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} = 1. \tag{2.4}$$

Sostituita quest'ultima nel tensore energia-impulso, troviamo per le sue componenti che

- $T_{00} = (\rho + p) - p = \rho$
- $T_{0i} = -pg_{0i} = 0$
- $T_{ij} = -pg_{ij}$

Tale tensore è quindi diagonale rispetto ad un sistema di coordinate comobili ed in componenti miste è esprimibile come:

$$T^{\mu}_{\nu} = diag(\rho, -p, -p, -p). \tag{2.5}$$

Ricordando che le componenti del tensore di Ricci sono date da [11]:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} \tag{2.6}$$

e che lo scalare di curvatura di Ricci è $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, calcolando le varie componenti delle connessioni e le sue derivate prime si può riscrivere il set di equazioni di Einstein nel sistema equivalente

$$\begin{cases} H^2 = \frac{\chi}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\chi}{6}(\rho + 3p). \end{cases} \tag{2.7}$$

Queste equazioni prendono il nome di equazioni di Friedmann e rappresentano le equazioni di Einstein con le assunzioni del modello standard. Fornita una equazione di stato sarà possibile, tramite la risoluzione di questo sistema, dare forma al fattore di scala ed alla densità di energia. Sfruttando la conservazione dell'energia, data dall'identità di Bianchi [9] $T^{\nu}_{\mu;\nu} = 0$, è possibile ottenere una equazione di continuità che può essere sostituita alla seconda delle equazioni di Friedmann ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} H^2 = \frac{\chi}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \\ \dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

2.2 Le ipotesi di fluido barotropico

Questo sistema può essere facilmente risolto per fluidi perfetti barotropici, ossia per quei fluidi caratterizzati da una equazione di stato che esprime una proporzionalità diretta tra pressione e densità di energia:

$$\frac{p}{\rho} = \gamma = costante, \tag{2.9}$$

dove γ è pari al rapporto tra il quadrato della velocità del suono nel fluido in esame ed il quadrato della velocità della luce $\frac{c_s^2}{c^2}$ [9]. Considerando ogni componente del tensore energia-impulso come un fluido perfetto barotropico, ciascuno con indice adiabatico γ_n, possiamo scrivere per ognuna di esse la propria equazione di stato $p_n = \rho_n \gamma_n$. Assumendo le componenti disaccoppiate tra loro, ognugna di esse soddisferà la propria equazione di continuità

$$\dot{\rho}_n + 3H\rho_n(1 + \gamma_n) = 0. \tag{2.10}$$

Tale equazione differenziale è risolvibile per separazione di variabili e si ottiene che le componenti del fluido cosmico hanno una densità di energia che ha il seguente andamento in funzione del fattore di scala:

$$\rho_n = \rho_{n0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\gamma_n)}, \tag{2.11}$$

dove ρ_{n0} e a_0 sono delle costanti di integrazione, ottenibili imponendo le condizioni iniziali. Si osserva quindi che l'andamento della densità di energia, come quello della pressione, dipendono dall'indice adiabatico ed è pertanto possibile caratterizzare l'evoluzione temporale in fasi cosmologiche, dove una componente domina sulle altre.

2.3 Le fasi cosmologiche

Nel modello standard il fluido cosmologico è costituito da due componenti: materia barionica e radiazione. La materia non relativistica ha indice adiabatico nullo e pertanto questa componente ha pressione nulla; descrive le sorgenti gravitazionali. La radiazione è invece caratterizzata da un indice adiabatico che assume il valore $\gamma_r = \frac{1}{3}$. Riprendendo l'andamento prima ottenuto delle densità di energia, vediamo che:

$$\rho_m \propto a^{-3} \quad ; \quad \rho_r \propto a^{-4}.$$

Ciò ci permette di dire che il modello standard prevede due fasi cosmologiche, una di dominazione della materia ed una di dominazione della radiazione. Seguendo le due proporzionalità e considerando un fattore di scala che va espandendosi, le fasi si susseguono in questo modo: una prima di dominazione della radiazione, dopodiché si tenderà ad una fase di equilibrio in cui le due componenti hanno densità di energia circa simili per poi, infine, entrare nella fase di dominazione della materia. Per poter studiare l'andamento del fattore di scala nelle due epoche, bisogna sostituire la (2.11) nella prima equazione di Friedmann. Assumendo una curvatura spaziale nulla, in accordo con le osservazioni delle anisotropie della radiazione di fondo cosmica (CMBR) [1], si ottiene

$$H^2 = \frac{\chi}{3}\rho_{n0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\gamma_n)}. \tag{2.12}$$

Esplicitando $H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$ otteniamo la seguente equazione differenziale

$$\dot{a}^2 = \left[\frac{\chi}{3}\rho_{n0}a_0^{3(1+\gamma_n)}\right]a^{-(1+3\gamma_n)}. \tag{2.13}$$

Da qui, possiamo scrivere

$$\dot{a}^2 \propto a^{-(1+3\gamma_n)}, \tag{2.14}$$

$$\dot{a}a^{(1+3\gamma_n)/2} = costante. \tag{2.15}$$

Da quest'ultima, possiamo scrivere il membro di sinistra come una derivata rispetto al tempo

$$\frac{d}{dt}\left(a(t)^{\frac{3}{2}(1+\gamma_n)}\right) = cost \tag{2.16}$$

ed integrando, otteniamo

$$a^{\frac{3}{2}(1+\gamma_n)} = ct + b. \tag{2.17}$$

Imponendo le condizioni iniziali, ossia l'annullarsi del fattore di scala per $t = 0$, si ottiene che $b = 0$ e quindi la seguente proporzione tra $a(t)$ ed il tempo

$$a \propto t^{\frac{2}{3(1+\gamma_n)}}. \tag{2.18}$$

In virtù della dipendenza dalla costante adiabatica γ_n, l'andamento del fattore di scala cambia dipendenza a seconda dell'era considerata. Analizziamo, quindi, gli andamenti per le due ere previste dal modello standard:

- Era della radiazione ($\gamma_r = \frac{1}{3}$):

$$a \propto t^{\frac{1}{2}},$$

$$\rho_r \propto a^{-3(1+\gamma_r)} = a^{-4} \Rightarrow \rho_r \propto t^{-2},$$
$$H = \frac{\dot{a}}{a} \propto \frac{1}{2t} \qquad\qquad 0 \leq t \leq t_{eq},$$

dove t_{eq} è il tempo in cui le due componenti, materia e radiazione, hanno stesso peso.

- Era della materia ($\gamma_m = 0$):

$$a \propto t^{\frac{2}{3}},$$
$$\rho_m \propto a^{-3} \Rightarrow \rho_m \propto t^{-2},$$
$$H = \frac{\dot{a}}{a} \propto \frac{2}{3t} \qquad\qquad t_{eq} \leq t \leq \infty.$$

Come si può notare, in entrambe le ere il parametro di Hubble è positivo, indice dell'espansione dell'universo.

2.4 Il problema della massa mancante

Secondo le ipotesi del modello standard, dovremmo essere in una fase di dominazione della materia barionica, componente a pressione nulla. Le osservazioni sulle anisotropie della radiazione di fondo cosmica suggeriscono, inoltre, una curvatura spaziale circa nulla. Dalla prima delle equazione di Friedmann scritta in termini delle frazioni di densità, trascurando la frazione di radiazione e di curvatura segue che:

$$\Omega_{m0} + \Omega_{k0} + \Omega_{r0} = 1 \Rightarrow \Omega_{m0} \simeq 1. \tag{2.19}$$

Ciò implica che la densità di materia attuale è pari circa alla densità critica ρ_{c0}, definita come la densità di energia che si ottiene ponendo $k = 0$ nella prima delle equazioni di Friedmann. Nonostante ciò, le osservazioni mostrano che al tempo attuale il contributo alla densità di energia dovuto alla materia barionica è di circa il 5%, in forte contrasto con le previsioni teoriche. Negli anni 70 si ipotizzò quindi l'esistenza di una grande quantità di materia non relativistica, fredda e che non emette radiazione elettromagnetica (la materia oscura [1]). Ciò si traduce in una materia non visibile e quindi non rilevabile se non tramite i suoi effetti gravitazionali.

2.5 L'espansione accelerata e l'energia oscura

Dalle osservazioni relative alla relazione luminosità-redshift sulle Supernovae Ia risulta che l'universo è attualmente in una fase di espansione accelerata. Dalle equazioni di Friedmann ciò implica che

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p) > 0. \tag{2.20}$$

Questa condizione, che implica che $(\rho + 3p) < 0$, è inconsistente con le ipotesi del modello standard che prevede due componenti con $\rho > 0$ e $p \geq 0$. Per ovviare a questo inconveniente ed avvicinarsi alle evidenze sperimentali si è quindi introdotta una nuova componente con pressione negativa e tale che $p \leq -\frac{\rho}{3}$. Tale componente, che deve risultare dominante, prende il nome di "energia oscura".

2.6 La costante cosmologica

I modelli più semplici che includono questa componente sono quei modelli che prevedono una costante cosmologica. Nel 1917 Einstein introdusse per la prima volta questa costante con l'obiettivo di ottenere un effetto di repulsione in grado di rendere statico l'universo [12], l'ipotesi più plausibile per l'epoca. Dalle equazioni di Friedmann si nota come questa condizione sia ottenibile per $\rho + 3p = 0$, ossia per una pressione o densità di energia che sia negativa. Così, Einstein modificò le sue equazioni introducendo al membro di sinistra il termine di costante cosmologica Λ:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}. \tag{2.21}$$

La soluzione statica è ottenibile quindi con una opportuna scelta del valore di Λ, qui interpretata come una proprietà dello spazio-tempo di compensare la contrazione o l'espansione della parte spaziale. Questa aggiunta non modifica il carattere covariante delle equazioni di Einstein e l'unica limitazione imposta sulla costante cosmologica è che essa debba essere abbastanza piccola da non alterare le leggi del moto planetario. La risoluzione di queste nuove equazioni di campo conducono ad un modello che descrive un universo statico ma instabile: la minima perturbazione ne provoca il collasso o l'espansione. In seguito ai risultati pubblicati da Hubble sul carattere dinamico dell'universo, Einstein dichiarò l'introduzione di questa costante come il suo più grande errore. Con la scoperta dell'espansione accelerata, tale costante fu ripresa, seppur con significato differente: non è più interpretata come una proprietà geometrica dello spazio-tempo, piuttosto come una nuova componente del fluido cosmico e che noi attribuiamo all'energia oscura. Questo termine va quindi inserito al membro destro delle equazioni di campo:

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{2.22}$$

La densità di energia di tale componente è $\rho = \Lambda = costante$ e la pressione è $p = -\Lambda$, con proprietà repulsive [13] in grado di giustificare l'espansione accelerata. Risolvendo le nuove equazioni di campo per la metrica FLRW si ottengono le nuove equazioni di Friedmann

$$\begin{cases} H^2 = \frac{\chi}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\chi}{6}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \end{cases} \tag{2.23}$$

Tramite le frazioni di densità

$$\Omega_k = -\frac{k}{a^2H^2} \quad ; \quad \Omega_m = \frac{\chi\rho_m}{3H^2} \quad ; \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \tag{2.24}$$

è possibile riscrivere la prima delle due equazioni di Friedmann in forma adimensionale:

$$\Omega_k + \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1. \tag{2.25}$$

Le attuali osservazioni sulle anisotropie della CMBR ed ai dati sperimentali a basso redshift danno le seguenti caratteristiche per l'universo:

- Curvatura spaziale circa nulla: $\Omega_{k0} \simeq 0$;
- Radiazione trascurabile: $\Omega_{r0} \simeq 5 \cdot 10^{-5}$;
- Circa il 30% di densità di materia costituita dal 25% di materia oscura fredda ed il 5% di materia barionica: $\Omega_{m0} = \Omega_{cdm0} + \Omega_{b0} \simeq 0.3$;
- Circa il 70% di energia oscura, responsabile della espansione accelerata: $\Omega_{\Lambda 0} \simeq 0.7$.

Questo modello basato sui valori sperimentali dei parametri ricavati dalle osservazioni attuali è detto Λ Cold Dark Matter (ΛCDM).

2.7 Le problematiche del modello ΛCDM

Una delle principali problematiche risiede nell'interpretazione della natura fisica della costante cosmologica. I fisici delle particelle tendono a considerare questa costante come il contributo gravitazionale dell'energia del vuoto, legato alle fluttuazioni quantistiche nello spazio privo di materia. Chiamando ρ_{vac} la densità di energia del vuoto, il suo tensore energia-impulso sarà del tipo

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}, \tag{2.26}$$

con equazione di stato $p_{vac} = -\rho_{vac}$ del tutto equivalente all'equazione di stato della costante cosmologica. A partire dalla costante di Planck è possibile definire una scala di lunghezza detta *lunghezza di Planck ridotta*: $L_p = M_p^{-1} = \sqrt{\kappa}$. Possiamo quindi pensare alle fluttuazioni quantistiche del vuoto. Per un campo quantistico non interagente, ogni modo contribuisce all'energia del vuoto ed il risultato netto è ottenuto integrando sui modi. Tale integrale è, in principio, divergente e ciò implica che l'energia del vuoto sia infinita. Per evitare la catastrofe ultravioletta, si può introdurre un cut-off ed ignorare i contributi tagliati fuori. Naturalmente questo taglio è legato alla scala di Planck tramite la relazione $\Lambda \sim L_p^{-2}$, ottenendo una stima dimensionale della densità di energia $\rho_\Lambda \simeq 10^{72} Gev^4$. I dati sperimentali, tuttavia, mostrano per la densità di energia del vuoto un valore di $\rho_\Lambda^{(obs)} \simeq 10^{-48}\ Gev^4$, ottenendo una discrepanza tra teoria e dati di circa 120 ordini di grandezza; tale problema è noto come *problema della costante cosmologica* [14, 15]. Il secondo problema è chiamato *problema di coincidenza* [16, 17]: secondo il modello ΛCDM la frazione di densità di materia e dell'energia oscura sono confrontabili. Queste due componenti hanno, però, una storia evolutiva differente:

$$\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_m} \propto a^3. \tag{2.27}$$

Ciò implica che l'attuale espansione accelerata sia un fenomeno iniziato relativamente di recente. Diventa immediatamente chiaro che la transizione dall'era di dominazione della materia a quella di dominazione dell'energia oscura sia avvenuta abbastanza velocemente. Ciò implica che la probabilità che un osservatore possa vivere durante un periodo in cui queste due componenti sono confrontabili è molto bassa e non c'è nessuna ragione fisica del perché ci troviamo in un'era così "speciale". Oltre queste due fondamentali problematiche, a compromettere la nostra comprensione dell'aumento della velocità cosmica, vi sono le discrepanze tra metodi diretti ed indiretti (modello-indipendenti) [18] della misura del parametro di Hubble. Dalla prima determinazione di questo parametro, per opera di Hubble, si è trovato per decenni che H_0 appartiene al range $50 \div 100$ km/s/Mpc. Migliorando l'accuratezza delle misure, usando la relazione periodo-luminosità per le Cefeidi per calibrare le distanze di indicatori secondari quali le Supernovae Ia, grazie all'Hubble Space Telescope Key Project [19] si è stimato un valore di questa costante pari a (73 ± 8) km/s/Mpc. La più recente stima diretta [20] di H_0 mostra un valore pari a 73.24 ± 1.74 km/s/Mpc. Questo valore non è molto in accordo con il più recente risultato offerto dal Planck collaboration [21] per il modello ΛCDM, $H_0 = 67.51 \pm 0.64$ km/s/Mpc, che ad ora, rappresenta il più forte vincolo su questo parametro.

2.8 Alternative al modello ΛCDM

2.8.1 Il modello di quintessenza

Uno dei modi per poter rispondere al problema della costante cosmologica è quello di considerare una energia oscura dinamica che sia in grado di emulare l'attuale costante cosmologica, in accordo alle osservazioni attuali. Similmente al meccanismo inflazionario [22, 23], ma ad energie differenti, il candidato ideale a ricoprire questo ruolo è un campo scalare chiamato *Quintessenza* [6]. Abbiamo che la densità di energia e la pressione del campo sono dati da:

$$\rho_\Phi = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi); p_\Phi = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi), \tag{2.28}$$

dove V(Φ) è il potenziale legato al campo scalare. L'equazione di stato relativa a questo campo ω_Φ tende a -1, come nel caso del modello di concordanza, se è verificata la condizione $\dot{\Phi}^2 \ll V(\Phi)$. Per un campo scalare omogeneo minimamente accoppiato alla gravità, l'equazione di Klein-Gordon in uno spazio-tempo con metrica FLRW è la seguente:

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + V'(\Phi) = 0, \tag{2.29}$$

dove l'apice sta ad indicare la derivata rispetto al campo. A partire da questa equazione, imponendo la condizione $\dot{\Phi}^2 \ll V(\Phi)$ si ottiene che $H \sim \sqrt{V''(\Phi)}$. Considerando che questa radice rappresenta la massa effettiva del campo m_Φ e che l'attuale valore del campo dovrebbe essere dell'ordine della costante cosmologica, si ottiene che

$$m_\Phi \sim 10^{-33} eV. \tag{2.30}$$

Dato che le masse dei campi scalari sono, in genere, diversi ordini di grandezza superiori, molti dubbi rimangono sull'effettiva validità della Quintessenza come soluzione al problema di coincidenza.

2.8.2 Le teorie estese della gravità

Un approccio alternativo è quello di considerare le teorie estese della gravità [13, 24]); tali teorie consistono nel modificare il membro sinistro delle equazioni di Einstein. Sappiamo che, grazie ai loro successi la relatività generale (GR) e la teoria quantistica dei campi (QFT) sono i pilastri su cui è costruita la fisica moderna. Da un lato, la GR è utile alla descrizione di sistemi non inerziali a larghe scale, dall'altro la QFT fornisce una descrizione del mondo a piccole scale ed alte energie. E' quindi necessario capire come si comportano i campi scalari in presenza della gravità, ossia capire quando queste due teorie siano compatibili. E' senza dubbio inevitabile, infatti, studiare gli effetti quantistici quando si tratta il lasso lasso di tempo che va tra il Big Bang e l'era di Planck (circa 10^{-43}s dopo il Big Bang). La difficoltà nel fornire uno schema unificatorio soddisfacente sta al fatto che l'interazione gravitazionale descrive il background dello spazio-tempo, mentre gli stessi gradi di libertà gravitazionali vengono trattati come variabili dinamiche. L'assunzione di una mutua interazione tra geometria e campi quantistici di materia portano quindi ad una necessaria modifica dell'azione di Hilbert-Einstein [25, 26, 27]

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}f(R) + S_m(g_{\mu\nu},\psi), \tag{2.31}$$

dove S_m è l'azione del campo di materia ψ. Questo è un esempio di teoria estesa della gravità, in cui si considera una funzione dello scalare di curvatura di Ricci, piuttosto che lo scalare di curvatura [28]. Deriviamo le equazioni di campo delle teorie $f(R)$ utilizzando il formalismo metrico. Variando l'azione rispetto $g_{\mu\nu}$ otteniamo

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{2.32}$$

dove $T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}$. L'apice indica la derivata rispetto R. Le equazioni di campo sono chiaramente del quarto ordine rispetto la metrica. Quando $f(R)$ è una funzione lineare di R, gli ultimi due termini del membro sinistro sono nulli e riotteniamo i risultati della relatività generale. Dalla traccia dell'equazione (2.32) si ottiene

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\Box f'(R) = \kappa T. \tag{2.33}$$

In questo contesto, la relazione tra lo scalare di curvatura e la traccia del tensore energia-impulso non è di tipo algebrico ma sono legate tra loro da una equazione differenziale, ampliando le possibili soluzioni. E' utile riscrivere il tensore energia-impulso come somma di un termine relativo alla materia ed uno relativo alla curvatura:

$$G_{\mu\nu} = \kappa(T^{(m)}_{\mu\nu} + T^{(curv)}_{\mu\nu}), \tag{2.34}$$

dove i due tensori del membro destro sono identificati come

$$T^{(m)}_{\mu\nu} = \frac{T_{\mu\nu}}{f'(R)}, \tag{2.35}$$

$$T^{(curv)}_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa f'(R)}\left[\frac{f(R) - Rf'(R)}{2}g_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\Box f'(R)\right]. \tag{2.36}$$

Dalla (2.35) segue che la costante di gravitazione universale effettiva, nelle teorie $f(R)$, è data da

$$G_{eff} = \frac{G}{f'(R)}. \tag{2.37}$$

Ciò impone la positività della $f'(R)$. Per studiare la storia dell'evoluzione cosmologica, assumiamo la metrica FLRW restringendo le nostre attenzioni al caso di curvatura spaziale nulla ($\Omega_k = 0$), come suggerito dalle osservazioni [21]. Usare la metrica FLRW implica la seguente relazione tra lo scalare di Ricci ed il parametro di Hubble:

$$R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] = -6(\dot{H} + 2H^2). \tag{2.38}$$

Assumendo la componente del tensore energia-impulso relativa alla materia come un fluido perfetto, le equazioni di Friedmann modificate diventano

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\left[\frac{\rho_m}{f'(R)} + \rho_{curv}\right], \tag{2.39}$$

$$2 + \dot{H} + 3H^2 = -\kappa\left[\frac{p_m}{f'(R)} + p_{curv}\right], \tag{2.40}$$

dove

$$\rho_{curv} = \frac{1}{f'(R)}\left[\frac{1}{2}(f(R) - Rf'(R)) - 3H\dot{R}f''(R)\right], \tag{2.41}$$

$$p_{curv} = \frac{1}{f'(R)}\left[2H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f'''(R) + (\dot{R})^2 f'''(R) - \frac{1}{2}(f(R) - Rf'(R))\right] \tag{2.42}$$

sono la densità di energia e la pressione del fluido di curvatura. Da queste due, si ottiene che l'equazione di stato effettiva è

$$w_{DE} = \frac{p_{curv}}{\rho_{curv}} = -1 + \frac{\ddot{R}f''(R) + (\dot{R})^2 f'''(R) - H\dot{R}f''(R)}{(f(R) - Rf'(R))/2 - 3H\dot{R}f''(R)}. \tag{2.43}$$

Per una $f(R) \propto R - 2\Lambda$, si ottiene $w_{DE} = -1$ come in uno scenario con la costante cosmologica. Se si considera la materia come polvere ($p_m = 0$), l'equazione di conservazione della densità di energia totale può essere riscritta come

$$\dot{\rho}_{tot} + 3H(\rho_{tot} + p_{curv}) = 0. \tag{2.44}$$

Assumendo che non vi sia interazione tra materia e fluido di curvatura, la conservazione della densità di energia può essere separata in due equazioni di conservazione, una per ogni componente. Per la materia si avrebbe che

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0, \tag{2.45}$$

la cui soluzione è quella standard

$$\rho_m = \rho_{m0} a^{-3} = 3H_0 \Omega_{m0} (1+z)^3. \quad (2.46)$$

Inserendo quest'ultima nella (2.44) si ottiene l'equazione di continuità effettiva per il fluido di curvatura

$$\dot{\rho}_{curv} + 3H(1+w_{DE})\rho_{curv} = 3H_0^2 \Omega_{m0}(1+z)^3 \frac{\dot{R} f''(R)}{(f'(R))^2}. \quad (2.47)$$

A questo punto, è conveniente combinare le due equazioni di Friedmann modificate

$$\dot{H} + \frac{1}{2f'(R)} \left[3H_0^2 \Omega_{m0}(1+z)^3 - H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + (\dot{R})^2 f'''(R) \right] = 0. \quad (2.48)$$

Negli ultimi anni, si è tentato di ricostruire modelli $f(R)$ come quello di Quintessenza che fossero in grado di riprodurre gli effetti di espansione accelerata sia per i primi che per gli ultimi stadi dell'universo. E' stato mostrato che in modelli con $f(R) = R + \alpha R^2$ con valore positivo di α danno risultati consistenti con le temperature osservate delle anisotropie della CMB, fornendo una valida alternativa ai campi scalari dei modelli inflazionari [29, 30]. Il termine quadratico fornisce una soluzione asistotica esatta di De Sitter e l'inflazione termina quando diventa più piccolo del termine lineare. Questo tipo di modello non è, però, in grado di spiegare l'attuale accelerazione poiché il termine quadratico, ad oggi, è molto più piccolo di quello lineare. Modelli del tipo $f(R) = R - \alpha R^{-n}$ ($\alpha > 0, n > 0$) sono stati proposti per spiegare l'attuale espansione [31, 32, 33] ma è stato dimostrato che non soddisfano i vincoli locali della gravità a causa dell'instabilità derivante dal valore negativo della $f''(R)$ [34, 35]. In più, questi modelli non ammettono una fase di dominazione della materia a causa di un accoppiamentro tra materia ed energia oscura [36]. Sebbene esistano vari modelli, relativi alla della scelta fatta per la $f(R)$, vi sono dei punti comuni che vanno rispettati:

- $f'(R) > 0$, con $R \geq R_0 > 0$ dove R_0 è l'attuale valore dello scalare di curvatura di Ricci. Tale condizione è necessaria per evitare di avere un valore negativo della costante di gravitazione universale effettiva.

- $f''(R) > 0$, con $R \geq R_0 > 0$ Dai vincoli sulla gravità nel sistema solare [37, 38] e della consistenza con la presenza di un'era domaninata dalla materia standard [39]. In più, serve a garantire la stabilità delle pertubazioni cosmologiche.

- $f'(R) \to 1$, con $R \gg 1$ Questa condizione è necessaria affinché le teorie $f(R)$ tendano al modello ΛCDM per grandi curvature, come richiesto dalle osservazioni sulle anisotropie CMB [40]-[42].

Uno dei problemi principali delle teorie $f(R)$ è legato al problema di riuscire a ricostruire prime ed ultime fasi dell'universo con lo stesso approccio. E' possibile selezionare una classe di modelli realistici descriventi il meccanismo inflazionario e l'inizio di una successiva espansione accelerata. Modelli con $f(R)$ rappresentate da potenze dello scalare di curvatura, descrivono l'inflazione, $f(R)$ esponenziali e non singolari [43] sono invece prese in considerazione per connettere la prima espansione accelerata e l'attuale. Oltre le teorie $f(R)$ è giusto citare, tra le teorie estese della gravità, le teorie $f(T)$ [44]-[45]: come già detto, è inevitabile non prendere in considerazioni effetti quantistici in teorie che coinvolgono la gravità a livelli fondamentali. Una generalizzazione semplice che includa anche lo spin è quella di considerare una varietà con torsione. Queste teorie, le $f(R)$ e le $f(T)$ sono solo delle possibilità di poter rispondere al problema dell'espansione accelerata dell'universo osservato. La degenerazione tra i vari modelli cosmologici ha portato alla necessità di dover formulare delle tecniche modello indipendente in grado di poter descrivere l'attuale espansione accelerata [46, 47]. Tra gli approcci possibili di questo genere, ci concentreremo sull'approccio cosmografico.

Capitolo 3

Cosmografia

Il metodo cosmografico è un approccio matematico basato sulla sola assunzione del Principio Cosmologico, determinando la dinamica dell'universo a partire dall'espansione del fattore di scala $a(t)$ dell'universo. Tale metodo permette lo studio dell'evoluzione dell'energia oscura senza la necessità di assumere uno specifico modello cosmologico a priori [9, 47, 48].

3.1 Le misure di distanze

Esistono vari metodi per la determinazione di distanze di oggetti astronomici. Per oggetti che rientrano nei confini della nostra galassia, si sfruttano metodi cinematici quali la parallasse trigonometrica e la determinazione dei moti propri [12]. Per oggetti esterni, invece, è di rilevante importanza la determinazione della distanza di questi oggetti tramite la conoscenza della luminosità assoluta dell'oggetto in esame. Tramite quest'ultima si definisce la distanza di luminosità, fondamentale per i nostri scopi.

3.1.1 Il redshift

Le sorgenti astronomiche emettono radiazioni elettromagnetiche la cui frequenza è rilevata con uno shift dovuto al moto di recessione. Questo shift in frequenza prende il nome di *redshift* z e tale quantità è strettamente legata al fattore di scala $a(t)$. Consideriamo di porci al centro di un sistema di coordinate sferiche e che la sorgente luminosa posta a distanza r_1 emetta un segnale luminoso. Per un segnale luminoso vale la relazione $ds^2 = 0$; immaginando che questo segnale viaggi verso di noi in direzione $-r$ e che possano considerarsi nulle le variazioni angolari, vale la seguente per una cresta d'onda:

$$dt^2 - a^2(t)\frac{dr^2}{1-kr^2} = 0, \tag{3.1}$$

riscrivibile come

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{3.2}$$

Il segnale è emesso in $r = r_1$ al tempo t_1 ed è ricevuto in $r = 0$ al tempo t_0. Segue dalla integrazione della (3.2) che

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = f(r_1) = \begin{cases} \text{arcsin}(r_1) & k = +1 \\ r_1 & k = 0 \\ \text{settsinh}(r_1) & k = -1 \end{cases} \tag{3.3}$$

Una seconda cresta d'onda è emessa al tempo $t_1' = t_1 + \delta t_1$ ed è ricevuta al tempo $t_0' = t_0 + \delta t_0$; per tale cresta, varrà la (3.3), per cui possiamo scrivere

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1'}^{t_0'} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = f(r_1). \tag{3.4}$$

Scomponendo l'integrale tra t_0' e t_1' otteniamo

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{dt}{a(t)}. \tag{3.5}$$

Sottraendo la (3.3) alla (3.4), si ottiene che

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{dt}{a(t)}. \tag{3.6}$$

Supponendo che il ritardo sia piccolo abbastanza da poter considerare costante $a(t)$, possiamo portarlo fuori dall'integrale ambo i membri e valutato al rispettivo tempo t. Ciò conduce, dalla (3.6) alla relazione

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)}. \tag{3.7}$$

Il redshift z è definito come l'incremento frazionario della lunghezza d'onda

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}. \tag{3.8}$$

La (3.7) può essere riscritta in termini delle frequenze associate e dalla relazione tra lunghezza d'onda e frequenza si ottiene la relazione tra z e $a(t)$

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1. \tag{3.9}$$

Tramite il redshift è possibile fare le seguenti osservazioni: un valore positivo di z ci dice che la lunghezza d'onda ricevuta è maggiore della lunghezza d'onda di emissione da cui la definizione di "spostamento verso il rosso". In più, un valore positivo di z implica che se $t_0 > t_1$ il fattore di scala sta crescendo, indice di una espansione accelerata.

3.1.2 La distanza di luminosità

Il redshift z non è una quantità direttamente osservabile, si ricava a partire dalla determinazione della distanza di un oggetto astronomico di interesse. Come accennato, per oggetti esterni alla nostra galassia si definisce la distanza di luminosità, determinabile dal confronto tra la luminosità assoluta e la luminosità apparente della sorgente luminosa. La luminosità assoluta L è definita come la potenza totale emessa dalla sorgente; la luminosità apparente l corrisponde, invece, alla potenza ricevuta per unità di area del rilevatore, corrispondente quindi al flusso osservato F. Immaginando che la radiazione emessa sia isotropa e che la luce non venga assorbita durante il tragitto, è possibile esplicitare, per una geometria euclidea, una relazione tra le due quantità sopracitate

$$F \equiv l = \frac{L}{4\pi d^2}. \tag{3.10}$$

La distanza di luminosità è espressa, pertanto, come

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}}. \tag{3.11}$$

Quando si vogliano trattare distanze considerevoli, è necessario introdurre gli effetti dovuti alla espansione dell'universo: l'area della superficie sferica centrata nella sorgente è riscritta tramite la distanza di moto proprio

$$A = 4\pi d_0^2 = 4\pi a^2(t_0) r_1^2, \tag{3.12}$$

ed i fotoni emessi ad una frequenza ν_1 vengono rilevati ad una frequenza $\nu_0 = \nu_1 \dfrac{a(t_1)}{a(t_0)}$ per cui la (3.10) può essere riscritta come

$$l = \frac{L}{4\pi a^2(t_0) r_1^2} \left(\frac{a(t_1)}{a(t_0)} \right)^2, \tag{3.13}$$

dalla quale si ottiene, per la distanza di luminosità

$$d_L = a^2(t_0)\frac{r_1}{a(t_1)}. \tag{3.14}$$

3.1.3 Le scale di magnitudini e il modulo di distanza

Gli astronomi non sono soliti lavorare con la luminosità assoluta L e la luminosità apparente l. Infatti, queste quantità sono generalmente espresse in termini di magnitudine assoluta M e di magnitudine apparente m. La magnitudine apparente è una grandezza legata alla misura della luminosità di un oggetto visto dalla Terra ed è stata introdotta inizialmente dall'astronomo greco Ipparco, al fine di catalogare le stelle visibili nel cielo. Ipparco assegnò una magnitudine apparente $m = 1$ alla stella più luminosa del cielo ed un valore $m = 6$ alle stelle più deboli visibili ad occhio nudo. Nell '800 si pensava che l'occhio umano fosse sensibile alle differenze di luminosità di due oggetti su scala logaritmica. Questa teoria ha portato storicamente all'introduzione di una scala in cui la differenza di 1 magnitudine tra due stelle implica un rapporto costante tra le loro luminosità apparenti. Secondo la definizione moderna, una differenza di 5 magnitudini corrisponde esattamente ad un fattore 100 in luminosità apparente, pertanto, alla differenza di 1 magnitudine corrisponderà esattamente un rapporto di luminosità pari a $100^{1/5} \simeq 2,512$. Quindi, la relazione matematica tra la magnitudine apparente di due oggetti celesti e la loro luminosità apparente è

$$\frac{l_2}{l_1} = 100^{(m_1 - m_2)/5}, \tag{3.15}$$

da cui si ricava l'andamento logaritmico della scala di magnitudine

$$m_1 - m_2 = -2,5\log_{10}\left(\frac{l_1}{l_2}\right). \tag{3.16}$$

Il punto zero della scala corrisponde per ragioni storiche a Polaris, avente una magnitudine $m = 2,12$ nella luce visibile. Infatti, quando si parla di magnitudine è necessario specificare il tipo di radiazione misurata: se la radiazione è misurata in tutte le lunghezze d'onda ci riferiamo alla magnitudine bolometrica, se si considera solamente lo spettro del visibile si parla di magnitudine visuale. Ad oggi, la scala di Ipparco è stata estesa da un valore minimo, pari circa alla magnitudine apparente del Sole $m =$ -$26,83$, fino approssimativamente al valore $m = 30$, associato agli oggetti rilevabili più deboli. La magnitudine assoluta è definita, invece, come la magnitudine apparente che un oggetto avrebbe se si trovasse ad una distanza dall'osservatore di 10 pc. Da queste due equazioni si ricava il legame tra le grandezze M e m

$$\frac{l_{10}}{l} = 100^{(m-M)/5} = \left(\frac{d_L}{10\text{pc}}\right)^2, \tag{3.17}$$

dove l_{10} corrisponde alla luminosità apparente della sorgente rilevabile posta alla distanza di 10 pc. Così facendo, otteniamo una nuova relazione per la distanza di luminosità

$$d_L = 10^{(m-M+5)/5}\text{pc}. \tag{3.18}$$

La quantità $(m - M)$ è denominata modulo di distanza e può essere interpretata come un'ulteriore grandezza utile alla determinazione della distanza di un oggetto luminoso

$$(m - M) = 5\log_{10}(d_L - 5) = 5\log_{10}\left(\frac{d_L}{10\text{pc}}\right). \tag{3.19}$$

Apparentemente, sembra naturale che gli astronomi debbano partire dalle quantità misurabili l ed m per poi utilizzare la distanza della sorgente, se nota, per determinare le sue proprietà intrinseche. Tuttavia, se la sorgente appartiene a particolari classi di oggetti la sua luminosità assoluta L e magnitudine assoluta M può essere determinata senza conoscere la sua distanza: queste specifiche sorgenti luminose vengono chiamate *candele standard*.

3.2 Il ruolo della cosmografia nella cosmologia di precisione

Il metodo cosmografico consiste in una tecnica modello indipendente che consente di ricavare informazioni sulla storia dell'espansione dell'universo degli ultimi tempi, presupponendo la validità del Principio Cosmologico. Infatti, gli unici requisiti richiesti dalla cosmografia sono l'omogeneità e l'isotropia spaziale, con il parametro di curvatura Ω_k fissato ad un certo valore, permettendo lo studio dell'evoluzione dell'energia oscura senza il bisogno di assumere un modello cosmologico in particolare. Tramite l'assunzione del Principio Cosmologico, la dinamica dell'universo è ricostruita a partire dall'espansione del fattore di scala. Dunque, espandendo $a(t)$, tutte le osservabili cosmologiche dipendenti da esso saranno espresse come serie di potenze sviluppate in un intorno del tempo presente t_0. In questo modo, confrontando tali espansioni con i dati cosmologici, è possibile fissare dei vincoli sull'evoluzione di ogni variabile in esame, ottenendo risultati numerici che non dipendono dal particolare modello teorico. La cosmografia, dunque, è in grado di discriminare i modelli compatibili con le previsioni osservative, riducendo così la degenerazione tra i vari modelli cosmologici.

3.3 L'approccio cosmografico standard

L'approccio cosmografico standard consiste nell'espansione in serie di Taylor del fattore di scala $a(t)$. Espandendo attorno al tempo attuale t_0 si ottiene che

$$a(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k a}{dt^k}\bigg|_{t=t_0} (t - t_0)^k. \tag{3.20}$$

Da qui, si definiscono i parametri cosmografici Hubble, deceleration, jerk e snap:

$$H(t) \equiv \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \quad ; \quad q(t) = -\frac{1}{aH^2}\frac{d^2a}{dt^2};$$
$$j(t) \equiv \frac{1}{aH^3}\frac{d^3a}{dt^3} \quad ; \quad s(t) \equiv \frac{1}{aH^4}\frac{d^4a}{dt^4}.$$

Queste funzioni, sono delle quantità modello indipendenti in quanto costruite senza la necessità di dover definire un modello di fluido cosmologico. Quando queste quantità vengono valutate al tempo attuale, prendono il nome di *serie cosmografica* [46]. Riscrivendo l'espansione del fattore di scala in termini della serie cosmografica possiamo definire i significati associati a queste quantità [49]

$$a(t) \sim a(t_0)\left[1 + H_0\Delta t - \frac{q_0}{2}H_0^2\Delta t^2 + \frac{j_0}{6}H_0^3\Delta t^3 + \frac{s_0}{24}H_0^4\Delta t^4 + \dots\right]. \tag{3.21}$$

Un valore positivo del parametro di Hubble ci dice che l'universo è in espansione, un valore negativo che è in contrazione; sapendo che al tempo attuale l'universo è in espansione, abbiamo un primo vincolo sulla positività di questo parametro. Il segno di q ci dice invece se l'espansione (o la contrazione) è in una fase accelerata o decelerata: nel primo caso, avremo un segno negativo di q, nel secondo, il segno sarà positivo. Il parametro jerk, invece, ci dice quando ci sarà una variazione nel segno del parametro q: un valore negativo di j ci suggerisce che non vi siano transizioni rispetto l'attuale fase accelerata; un valore nullo di questo parametro indica, invece, che il parametro q tende a stabilizzarsi attorno ad un valore preciso, senza modificare il suo comportamento man mano che cresce z; infine, un valore positivo di questo parametro ci assicura che è esistito un momento in cui l'universo è passato da uno stato decelerato ad uno accelerato. Tuttavia, è importante sottolineare che le quantità q e j sono parametri locali e quindi non sufficienti a discriminare modelli che ammettono l'energia oscura come un'entità dinamica da modelli in cui l'energia oscura è interpretata come un termine di costante cosmologica. Per ovviare a questa problematica si introduce il parametro snap s, legato alla dipendenza funzionale dell'energia oscura dal redshift. Per prossimi sviluppi, è utile riscrivere i coefficienti cosmografici in termini del parametro di Hubble. Riprendendo la scrittura dei coefficienti cosmografici, possiamo scrivere che

$$\dot{H} = -H^2(1+q), \tag{3.22a}$$

$$\ddot{H} = H^3(j+3q+2), \tag{3.22b}$$

$$\dddot{H} = H^4[s-4j-3q(q+4)-6]. \tag{3.22c}$$

In tal modo, è evidente la dipendenza delle derivate del parametro di Hubble dal parametro stesso, mostrando che se si considerano n parametri cosmografici, sono n-1 di essi sono realmente indipendenti tra loro. Tramite queste tre, possiamo riscrivere i parametri cosmografici in dipendenza del parametro di Hubble e delle sue derivate temporali:

$$q = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}, \tag{3.23a}$$

$$j = 1 + \frac{\dot{H} + \ddot{H}}{H^2}, \tag{3.23b}$$

$$s = 1 + \frac{2}{H^2}(3\dot{H} + 2\ddot{H}) + \frac{1}{H^4}(3H^2 + \dddot{H}), \tag{3.23c}$$

che ci permettono di calcolare i coefficienti della serie cosmografica per un dato modello cosmologico. Inoltre, possiamo notare la degenerazione tra i parametri dovuta alla presenza in tutte le espressioni del parametro H. Dunque, per quanto detto finora, procederemo con la scelta di un particolare set di quantità osservabili al fine di effettuare un'espansione in serie da confrontare con i dati sperimentali, ottenendo così preziose informazioni sui parametri cosmografici. Abbiamo precedentemente definito la distanza di luminosità per uno spazio-tempo piatto. Ricaveremo, quindi, l'espansione in serie per d_L che troncheremo al secondo ordine per semplicità di calcolo. Ricordando la definizione di redshift cosmologico, la distanza di luminosità può essere riscritta in funzione di z come

$$d_L(z) = a(t_0)r_1(1+z). \tag{3.24}$$

Sfruttando l'espansione del fattore di scala in termini del set cosmografico, possiamo ottenere una espansione in serie del redshift z in termini del tempo di volo $(t_0 - t_1)$

$$z \simeq H_0(t_0 - t_1) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right)H_0^2(t_0-t_1)^2 + O[(t_0-t_1)^3]. \tag{3.25}$$

Invertendo questa, è possibile esprimere il tempo di volo in funzione del redshift z, ottenendo

$$(t_0 - t_1) \simeq \frac{1}{H_0}\left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right)z^2 + O(z^3)\right]. \tag{3.26}$$

Vogliamo, inoltre, riscrivere r_1 in termini del redshift z

$$r_1 = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \tag{3.27}$$

In questo modo, si ottiene che

$$r_1 \simeq \frac{1}{a(t_0)}\left[(t_0 - t_1) + \frac{1}{2}H_0(t_0 - t_1)^2 + O[(t_0 - t_1)^3]\right]. \tag{3.28}$$

Sostituendo l'espansione del tempo di volo rispetto il redshift z, si ottiene una espansione di r_1 in termini di z

$$r_1 \simeq \frac{1}{a(t_0)H_0}\left[z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + O(z^3)\right]. \tag{3.29}$$

Sostituendo quest'ultima nella espressione della distanza di luminosità, otteniamo

$$d_L(z) \simeq \frac{1}{H_0}\left[z + \frac{(1 - q_0)}{2}z^2 + O(z^3)\right]. \tag{3.30}$$

Ripetendo gli stessi calcoli, spingendoci ad ordini superiori, è possibile determinare una espansione in serie della distanza di luminosità che contenga i quattro parametri cosmografici precedentemente definiti

$$\begin{aligned} d_L(z) \simeq \frac{z}{H_0}\Bigg[1 &+ \frac{z}{2}(1 - q_0) - \frac{z^2}{6}(1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0) + \\ &+ \frac{z^3}{24}(2 - 2q_0 - 15q_0^2 - 15q_0^3 + 5j_0 + 10q_0j_0 + s_0) + O(z^4)\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Questa equazione è del tutto generale ed è applicabile a qualsiasi modello cosmologico basato su una metrica FLRW piatta. In questo modo, effettuando direttamente un fit dei dati cosmologici a disposizione per d_L, è possibile utilizzare questa equazione per imporre vincoli sui parametri della serie cosmografica al fine di ricavare importanti informazioni sulla dinamica dell'universo, senza dover postulare un modello a priori.

3.4 I limiti della cosmografia standard

Sebbene sia potente e semplice da applicare, il metodo cosmografico mostra delle carenze che ne limitano le possibilità di applicazione. Il problema principale consiste nella impossibilità di poter imporre vincoli stringenti sui parametri cosmografici coi soli dati attualmente disponibili, specialmente sui primi stadi dell'universo. Inoltre, l'arbitrarietà con cui si tronca la serie di Taylor può seriamente comprometterne il potere predittivo. Altro problema importante è quello legato alla degenerazione tra i coefficienti cosmografici: l'impossibilità di poterli misurare separatamente (di fatto si misurano somme di questi coefficienti) porta a risultati differenti a seconda delle distribuzioni di probabilità associate ai singoli parametri. In più, il ruolo della curvatura spaziale è cruciale per poter imporre vincoli: un valore non nullo della frazione di curvatura Ω_k comporta l'imposizione di una equazione di stato, per l'energia oscura, che evolve nel tempo e che fissa a priori la forma. A causa della stretta relazione tra la distanza di luminosità e la curvatura spaziale, si è obbligati a fissare il valore di Ω_k al fine di poter imporre vincoli sui parametri cosmografici. Nel fissarlo, quindi, la serie risultante è una formulazione dell'universo con quella determinata curvatura. Se da una parte assumere un preciso valore della frazione di curvatura potrebbe influenzare la ricostrizione dell'energia oscura, d'altra parte potrebbero insorgere forti problemi di convergenza se non la si postula a priori.

3.5 Il metodo delle approssimazioni razionali di Padé

Con l'approccio cosmografico standard emergono problemi quando si vuole studiare il comportamento dell'energia oscura sfruttando dati ad alto redshift [50]. Il ristretto intervallo di convergenza della serie di Taylor rende il potere predittivo dell'approccio standard poco soddisfacente per analisi cosmologiche a $z > 1$. Un modo di ovviare a questo problema è rappresentato dal metodo delle approssimazioni razionali che consiste nell'espandere la funzione come rapporto di due polinomi. Ci soffermeremo in particolare sul metodo degli approssimanti di Padé [51], accenando il metodo degli approssimanti di Chebyshev come altra possibilità. Per costruire l'approssimante di Padé si inizia dalla espansione di Taylor di una generica funzione $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i, \tag{3.32}$$

dove $c_i = f^i(0)/i!$. L'approssimante di Padé di ordine (n, m) della funzione $f(z)$ si definisce come

$$P_{n,m}(z) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a^i z^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j z^j}. \tag{3.33}$$

Il legame tra l'approssimante e la serie di Taylor è dato dal sistema

$$\begin{cases} P_{n,m}(0) = f(0), \\ P'_{n,m}(0) = f(0), \\ \vdots \\ P^{n+m}_{n,m}(0) = f^{n+m}(0). \end{cases} \tag{3.34}$$

In genere, il polinomio a denominatore viene rinormalizzato ponendo $b_0 = 1$, ottenendo

$$P_{n,m}(z) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i}{1 + \sum_{j=1}^{m} b_j z^j}. \tag{3.35}$$

Il numero di incognite totali è n+m+1, n+1 al numeratore, m al denominatore. Tali incognite possono essere determinate imponendo la seguente

$$f(z) - P_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1}), \tag{3.36}$$

dalla quale si ottiene

$$(1+b_1 z+\cdots+b_m z^m)(c_0+c_1 z+\dots) = (a_0+a_1 z+\cdots+a_m)+O(z^{n+m+1}). \tag{3.37}$$

Eguagliando i coefficienti associati alle stesse potenze di z, si ottiene un sistema di n+m+1 equazioni che, risolto, fornisce i coefficienti cercati. Le applicazioni dell'approssimazione di Padé, nell'ambito della cosmologia, hanno mostrato la buona capacità di alleviare i problemi di convergenza ad alti redshift [52, 53]. Inoltre, come nel caso dell'espansione di Taylor, tutte le informazioni fisiche ottenute dai dati, sono basate sulla sola assunzione del principio cosmologico. I vantaggi di questa tecnica sono quindi quelli di migliorare l'intervallo di convergenza, ampliandolo ad alti redshift, diminuendo la propagazione di errori. Inoltre, la serie può essere calibrata a piacere, considerando quale sia l'appropriato ordine in dipendenza della situazione specifica. Questa tecnica, ovviamente, non è esente da problematiche: la convergenza della serie non è, infatti, nota a priori, ed è quindi necessario un confronto diretto con i dati per poter scegliere l'ordine dell'approssimante; vi è la possibilità che il limite della convergenza, nei domini osservazionali, venga ristretto dalla possibilità che vi siano dei poli caratteristici per l'approssimante. Esiste, infine, degenerazione tra i differenti approssimanti corrispondenti allo stesso ordine dell'approssimazione di Taylor. Altri studi più dettagliati sono stati svolti sui vantaggi di questo metodo, analizzando vari approssimanti [49].

3.5.1 Confronto con il modello ΛCDM

Il metodo delle approssimazioni razionali di Padé permette di risolvere i problemi di convergenza ad alti redshift legati all'approccio standard. Vogliamo, quindi, ricavare l'andamento della distanza di luminosità per il modello ΛCDM e confrontare le previsioni teoriche con le approssimazioni di Taylor e di Padé per un ampio range del redshift. Per il modello ΛCDM, in accordo con le ipotesi di universo spazialmente piatto, il parametro di Hubble, in termini del redshift z, è espresso come

$$H_{\Lambda CDM}(z) = H_0\sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}, \tag{3.38}$$

dove $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{m0}$. La distanza di luminosità di una sorgente di luminosità assoluta L e posta ad una distanza comovente r, per una geometria piatta, è

$$d_L(z) = (1+z)a(t_0)r. \tag{3.39}$$

Considerando dei fotoni emessi all'istante di tempo t ed osservati all'istante t_0, possiamo riscrivere la distanza comovente r in forma integrale

$$r = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \tag{3.40}$$

Riprendendo la relazione tra redshift e fattore di scala (3.9) e derivandola rispetto al tempo otteniamo

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a(t_0)}{a(t)^2}\dot{a}(t) = -\frac{a(t_0)}{a(t)}H(t). \tag{3.41}$$

Da qui, si ottiene

$$dt = -\frac{a(t)}{a(t_0)H(t)}dz, \tag{3.42}$$

che sostituita nell'integrale, con estremi $z(t_0) = 0$ e $z(t) = z$, ci da

$$r = \frac{1}{a(t_0)}\int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \tag{3.43}$$

La distanza di luminosità può, quindi, essere espressa come

$$d_L(z) = (1+z)\int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \tag{3.44}$$

Sostituendo il parametro di Hubble per il modello ΛCDM si ottiene la distanza di luminosità la seguente

$$d_{\Lambda CDM} = \frac{(1+z)}{H_0}\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_{m0}(1+z')^3 + \Omega_\Lambda}}. \tag{3.45}$$

Eseguendo una integrazione numerica, è possibile ricavare l'andamento teorico della distanza di luminosità prevista da modello di concordanza in un determinato intevallo di z. Nel caso del modello ΛCDM, i parametri della serie cosmografica sono espressi in termini della frazione di materia al tempo attuale

$$\begin{cases} q_{0,\Lambda\text{CDM}} = -1 + \frac{3}{2}\Omega_{m0}, \\ j_{0,\Lambda\text{CDM}} = 1, \\ s_{0,\Lambda\text{CDM}} = 1 - \frac{9}{2}\Omega_{m0}. \end{cases} \tag{3.46}$$

Assumendo $\Omega_{m0} = 0.3$ in accordo alle osservazioni [54], si ottiene che

$$\begin{cases} q_{0,\Lambda\text{CDM}} = -0.55, \\ j_{0,\Lambda\text{CDM}} = 1, \\ s_{0,\Lambda\text{CDM}} = -0.35. \end{cases} \tag{3.47}$$

Adottando questi valori per il set cosmografico, mostriamo il confronto grafico tra la distanza di luminosità esatta per il modello ΛCDM e le relative approssimazioni. In particolare, il polinomio di Taylor al terzo ordine $T3$ è confrontato con gli approssimanti di Padé (1,1), (1,2) e (2,1).

Osservando la figura 3.1, si vede come le approssimazioni di Taylor forniscano un ottimo risultato per piccoli valori di z, mentre divergono in maniera evidente per $z > 2$. Gli approssimanti di Padé, invece, si avvicinano di più all'andamento della distanza di luminosità prevista dal modello ΛCDM. Si vede come, per gli approssimanti di Padé, non sia indice di bontà l'aumento del grado dell'approssimante in quanto hanno forme completamente differenti a seconda del grado del numeratore e del denominatore. L'analisi analitica fornisce alcune considerazioni teoriche per la costruzione degli approssimanti. $P_{n,m}(z)$ non deve presentare singolarità nell'intervallo considerato per z. L'approssimante di Padé per $d_L(z)$ deve essere definito positivo, in modo da garantire la corretta definizione del modulo di distanza $(m - M)$. Infine, gli approssimanti che hanno il grado del numeratore poco più grande del grado del denominatore forniscono le approssimazioni migliori.

3.5.2 Studio del raggio di convergenza

Per verificare il miglioramento effettivo delle approssimazioni razionali di Padé rispetto l'approccio standard, studiamo il raggio di convergenza dei due metodi [13]. Prendiamo in considerazione l'approssimante di Padé $P_{1,1}(z)$ ed il polinomio di Taylor al secondo ordine, $T2$. L'espressione dell'espansione $T2$ è

$$d_L(z) \simeq \frac{1}{H_0}\left[z + \frac{(1-q_0)}{2}z^2 + O(z^3)\right], \tag{3.48}$$

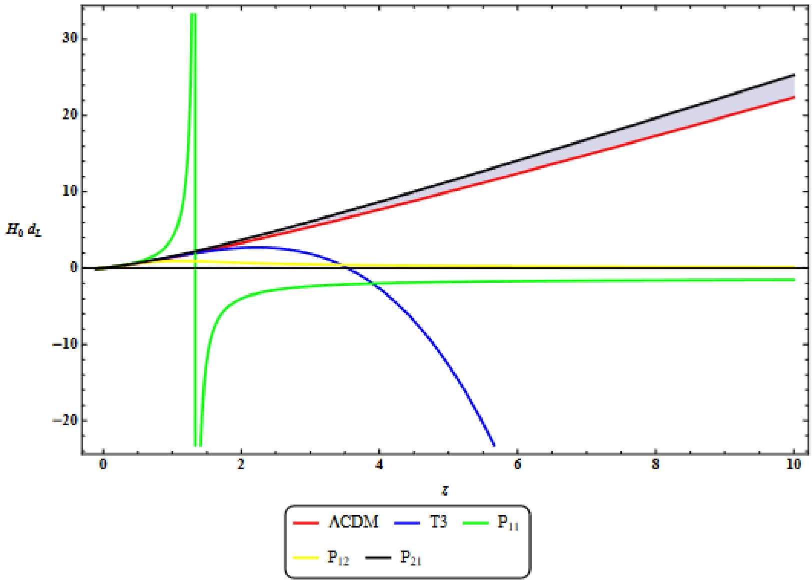

Figura 3.1: Confronto delle curve analitiche della distanza di luminosità del modello ΛCDM (in rosso) con l'approssimazione di Taylor al terzo ordine (in blu) e l'approssimante di Padé (1,1) (in verde), (1,2) (in giallo) e (2,1) in nero. Si vede che l'approssimazione di Taylor diverge rapidamente fuori dalla regione $z \leq 2$. Non tutti gli approssimanti forniscono delle buone approssimazioni di questo modello, eccezione fatta per il polinomio (2,1).

l'espressione di $P_{1,1}$ è invece data da

$$P_{1,1}(z) = \frac{2z}{H_0[2 + (q_0 - 1)z]}. \tag{3.49}$$

Il polinomio di Padé (1,1) si scrive come

$$P_{1,1}(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{1 + b_1 z} = \frac{a_0}{1 + b_1 z} + \frac{a_1}{b_1}\left(1 - \frac{1}{1 + b_1 z}\right), \tag{3.50}$$

da cui segue

$$P_{1,1}(z) = \frac{a_1}{b_1} + \left(a_0 - \frac{a_1}{b_1}\right)\left(\frac{1}{1 + b_1 z}\right), \tag{3.51}$$

che può essere riscritta in termini di una serie geometrica

$$P_{1,1}(z) = \frac{a_1}{b_1} + \left(a_0 - \frac{a_1}{b_1}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-b_1)^n z^n. \tag{3.52}$$

La serie geometrica converge solo se $|z| < \frac{1}{|b_1|}$. Pertanto, il raggio di convergenza dell'approssimante di Padé (1,1) è dato da

$$\rho_{P_{1,1}} = \frac{1}{|b_1|} = \frac{2}{1 - q_0}. \tag{3.53}$$

Svolgendo degli analoghi calcoli, si ottiene che il raggio di convergenza per $T2$ è

$$\rho_{T2} = \frac{1 - q_0}{2}. \tag{3.54}$$

Utilizzando il valore del parametro di decelerazione q_0 previsto dal modello ΛCDM, possiamo effettuare un confronto immediato dei due raggi di convergenza, ottenendo

$$\begin{cases} \rho_{P_{1,1}} = 1.290, \\ \rho_{T2} = 0.775. \end{cases} \tag{3.55}$$

Questo risultato conferma nuovamente che l'uso della tecnica cosmografica basata sui polinomi razionali di Padé comporta un miglioramento nell'estensione del raggio di convergenza rispetto alla serie di Taylor.

3.5.3 Vincoli osservativi

Nell'articolo [54] si mostrano i risultati ottenuti utilizzando i polinomi di Padé, confrontati con i risultati ottenuti da altri approcci cosmografici. Le analisi sono state condotte sfruttando una integrazione alla Markov Chain Monte Carlo con le

Tabella 3.1: Prior utilizzati per MCMC, con H_0 in unità di Km/s/Mpc ed r_d in Mpc

Parametri	Prior
H_0	$(50, 90)$
q_0	$(-10, 10)$
j_0	$(-10, 10)$
s_0	$(-10, 10)$
M	$(-20, -18)$
Δ_M	$(-1, 1)$
α	$(0, 1)$
β	$(0, 5)$
r_d	$(140, 160)$

distribuzioni di probabilità combinate dello SNe Ia JLA data [55] ed altre misure a basso redshift come l'Observational Hubble data [56] e le Barionic Acoustic Oscillation [57]. Assumendo i prior mostrati in tabella 3.1, nella tabella 3.2 vengono mostrati i risultati ottenuti da una analisi compiuta attraverso l'algoritmo numerico Metropolis implementato tramite la routine Monte Python [58]. Nella tabella 3.3 si vede come l'incertezza relativa dei parametri cosmografici è ridotta nel caso di utilizzo dei polinomi razionali di Padé. Questa tecnica riduce le difficoltà computazionali nell'implementare i dati cosmici, sebbene non corregga appropriatamente il parametro di ordine maggiore della approssimazione scelta. Per ovviare a questo problema, si potrebbe incrementare l'ordine dell'approssimante.

3.5.4 Cenni sul metodo dei polinomi di Chebyshev

Come detto, il metodo di Padé presenta la problematica relativa al grado di soggettività della scelta dell'ordine di espansione. E' un metodo particolarmente utile per approssimare funzioni non lisce, come nel caso di funzioni che presentano flessi o discontinuità nel dominio. Sfortunatamente, non è questo il caso per le distanze cosmiche. Da un lato è possibile alleviare i problemi di convergenza, dall'altro, concettualmente, si sta utilizzando Padé per approssimare distanze cosmiche ben definite, dove non sono necessariamente coinvolti dei poli. Per evitare ciò, è possibile utilizzare il metodo dei rapporti razionali di Chebyshev. Studi su questo approccio sono stati condotti in [54] dove si è dimostrato come questo approccio migliori le predizioni ed interpoli meglio i dati rispetto il metodo standard. Per dimostrarlo è stato condotto un confronto con le previsioni ottenute

Tabella 3.2: Livello di confidenza 1σ e 2σ ottenuti da una analisi MCMC utilizzando i dati SN+OHD+BAO nel caso di una espansione di Taylor al quarto ordine e nel caso di Padé (2,2)

Parametri	Taylor			Padé		
	Mean	1σ	2σ	Mean	1σ	2σ
H_0	65.80	$^{+2.09}_{-2.11}$	$^{+4.22}_{-4.00}$	64.94	$^{+2.11}_{-2.02}$	$^{+4.12}_{-4.13}$
q_0	-0.276	$^{+0.043}_{-0.049}$	$^{+0.093}_{-0.091}$	-0.285	$^{+0.040}_{-0.046}$	$^{+0.087}_{-0.084}$
j_0	-0.023	$^{+0.317}_{-0.397}$	$^{+0.748}_{-0.685}$	0.545	$^{+0.463}_{-0.652}$	$^{+1.135}_{-1.025}$
s_0	-0.745	$^{+0.196}_{-0.284}$	$^{+0.564}_{-0.487}$	0.118	$^{+0.451}_{-1.600}$	$^{+3.422}_{-1.921}$
M	-19.16	$^{+0.07}_{-0.07}$	$^{+0.14}_{-0.14}$	-19.03	$^{+0.02}_{-0.02}$	$^{+0.05}_{-0.05}$
Δ_M	-0.054	$^{+0.023}_{-0.022}$	$^{+0.044}_{-0.045}$	-0.054	$^{+0.022}_{-0.023}$	$^{+0.045}_{-0.045}$
α	0.127	$^{+0.006}_{-0.006}$	$^{+0.012}_{-0.012}$	0.0127	$^{+0.006}_{-0.006}$	$^{+0.012}_{-0.012}$
β	2.624	$^{+0.071}_{-0.068}$	$^{+0.136}_{-0.140}$	2.625	$^{+0.065}_{-0.069}$	$^{+0.137}_{-0.135}$
r_d	149.2	$^{+3.7}_{-4.1}$	$^{+7.7}_{-7.5}$	148.6	$^{+3.5}_{-3.8}$	$^{+7.5}_{-7.1}$

Tabella 3.3: Errori al 65% e 98% sui parametri cosmografici in uscita ottenuti con una analisi MCMC utilizzando dati SN+OHD+BAO nel caso di una espansione di Taylor al quarto ordine e nel caso (2,2) di Padé

Parametri	Taylor		Padé	
	1σ	2σ	1σ	2σ
H_0	3.19%	6.25%	3.17%	6.35%
q_0	16.8%	33.5%	15.1%	30.1%
j_0	15.34%	30.79%	10.2%	19.8%
s_0	32.2%	70.5%	86.6%	22.58%

utilizzando il metodo di Padé, attuando una stima teorica del raggio di convergenza della serie di Chebyshev (1,1) e confrontandolo con quella di Padé e di Taylor corrispondenti.

3.6 La ricostruzione delle teorie $f(R)$

Abbiamo visto quale siano i vantaggi e gli svataggi nel ricostruire modelli di energia oscura tramite l'approccio cosmogafico, derivando la forma funzionale della lagrangiana dai dati osservazionali. Vogliamo, quindi, ricostruire la gravità $f(R)$ tramite la cosmografia. La procedura strandard, utilizzata nell'ambito delle teorie estese della gravità, è quello di postulare apriori una forma per la $f(R)$, determinando l'azione e derivando da essa le osservabili, una volta risolte le equazioni di Friedmann modificate che ne risultano. Ciò consiste, quindi, nel postulare apriori un determinato modello cosmologico. Tramite l'approccio cosmografico, è possibile ricostruire, senza assumere un modello, la forma del funzionale d'azione. Sfrutteremo l'approccio di Padé per ottenere approssimazioni della distanza di luminosità e studieremo la storia dell'espansione dell'universo determinando, se possibile, le differenze con la relatività generale ed il modello di concordanza. L'approccio cosmografico strandard, non permette lo studio per dati ad alto redshift, introducendo inevitabilmente errori nelle analisi. Utilizzando l'approccio di Padé e motivati da [50], la migliore approssimazione è fornita dall'approssimante di ordine (2,1) che, da ora, sarà il nostro riferimento per gli sviluppi che seguono

$$\begin{aligned} H_{2,1}(z) = {} & \big[2H_0(1+z)^2(3+z+j_0z-q_0(3+z+3q_0z))^2\big] \times \big[18(q_0-1)^2+ \\ & + 6(q_0-1)(-5-2j_0+q_0(8+3q_0))z+(14+2j_0^2 \\ & + j_0(7-q_0(10+9q_0))+q_0(-40+q_0(17+9q_0(2+q_0))))z^2\big]^{-1}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Come è possibile vedere, questo approssimante è espresso coinvolgendo i termini della serie cosmografica fino al parametro jerk, nonostante l'approssimazione di Taylor al terzo ordine contenga anche il parametro snap. Per poter applicare la nostra strategia, è necessario convertire le derivate temporali e rispetto lo scalare di Ricci in derivate rispetto z:

$$\frac{dF}{dt} = -(1+z)HF_z, \tag{3.57}$$

$$\frac{\partial F}{\partial R} = \frac{1}{6}\bigg[(1+z)H_z^2+(1+z)H_{zz}\bigg]^{-1}F_z, \tag{3.58}$$

dove $F(z)$ è una generica funzione e dove il pedice z indica la derivata rispetto il redshift. Dopo aver determinato i valori dei parametri cosmografici, possiamo combinare l'equazione (2.39) con la (2.41) e la (2.38) per ottenere la seguente equazione differenziale del secondo ordine per $f(z)$

$$
\begin{aligned}
H^2 f_z = {} & [-(1+z)H_z^2 + H(3H_z - (1+z)H_{zz})]\Bigg[-6H_0^2(1+z)^3\Omega_{m0} - f \\
& - \frac{Hf_z(2H-(1+z)H_z)}{(1+z)H_z^2 + H(-3H_z + (1+z)H_{zz}^2)} - \frac{f_{zz}((1+z)H_z^2 + H(-3H_z + (1+z)H_{zz}))}{[(1+z)H_z^2 + H(-3H_z + (1+z)H_{zz})]^2} \\
& \times (1+z)H^2 - \frac{(1+z)H^2(f_z(2H_z^2 - 3(1+z)H_{zz} + H(2H_{zz} - (1+z)H_{zzz})))}{[(1+z)H_z^2 + H(-3H_z + (1+z)H_{zz}]^2}\Bigg].
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

Le condizioni iniziali, necessarie per trovare una soluzione all'equazioni di sopra, possono essere ottenute combinando la condizione $f'(R_0) = 1$ con la (2.39), la (2.41) e la (2.42) :

$$f_0 = R_0 + 6H_0^2(\Omega_{m0} - 1), \tag{3.60}$$

$$f_z|_{z=0} = R_z|_{z=0}. \tag{3.61}$$

In accordo alle rilevazioni dei dati attuali, fisseremo, per gli sviluppi a venire, il valore della frazione di materia al valore $\Omega_{m0} = 0.3$. Riguardo i parametri cosmografici, invece, utilizziamo per l'approssimazione di Padé (2,1) i risultati ottenuti in [49]

$$
\begin{cases}
h = 0.7064^{+0.0277}_{-0.0263}, \\
q_0 = -0.4712^{+0.1224}_{-0.1106}, \\
j_0 = 0.593^{+0.216}_{-0.210}.
\end{cases}
\tag{3.62}
$$

Per l'espansione di Taylor al terzo ordine, invece:

$$
\begin{cases}
h = 0.7253^{+0.0353}_{-0.0351}, \\
q_0 = -0.6642^{+0.2050}_{-0.1963}, \\
j_0 = 1.223^{+0.644}_{-0.664}, \\
s_0 = 0.394^{+1.335}_{-0.731}.
\end{cases}
\tag{3.63}
$$

Quindi, sarà possibile ricostruire numericamente la $f(z)$ tramite la (3.56). La $f(R)$ risultante dalla procedura di ricostruzione sarà negativa in virtù della segnatura scelta all'inizio. Consistentemente, la $f(z)$ dovrà essere anch'essa negativa, come risulta nei casi dei limiti superiori risultanti nella (3.61). Nella figura 3.2, è mostrata la ricostruzione numerica di $f(z)$ per l'approssimazione (2,1)

Per determinare la funzione analitica che meglio combacia con la $f(z)$ ricostruita numericamente, si considerano le seguenti funzioni di test con tre coefficienti costanti A, B e C:

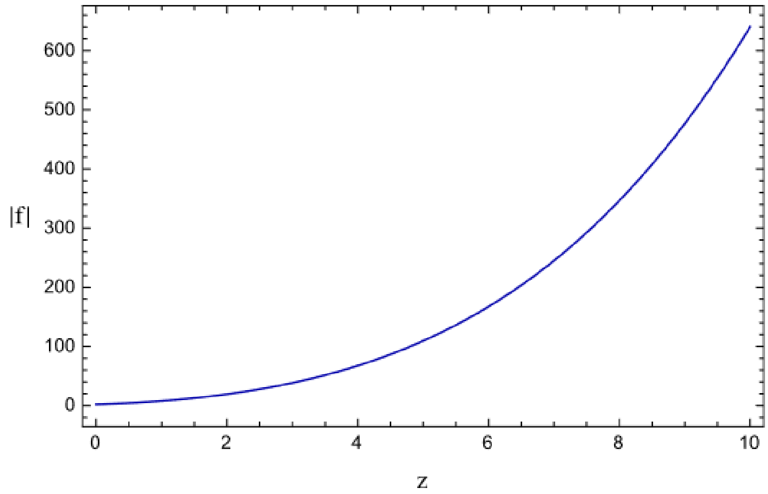

Figura 3.2: Andamento numerico di di $|f(z)|$ approssimata usando il polinomio di Padé (2,1)

$$Esponenziali$$

$$f_1(z) = Az + Bz^3 + e^{Cz}, \tag{3.64a}$$

$$f_2(z) = A + Bz^2 sinh(1 + Cz), \tag{3.64b}$$

$$f_3(z) = Az + Bz^3 cosh(Cz), \tag{3.64c}$$

$$f_4(z) = Az^2 + Bz^4 tanh(Cz). \tag{3.64d}$$

$$Trigonometriche$$

$$f_5(z) = Az^3 + Bz^5 sin(1 + Cz), \tag{3.64e}$$

$$f_6(z) = Az^3 + Bz^4 cos(1 + Cz), \tag{3.64f}$$

$$f_7(z) = Az + Bz^2 tan(Cz). \tag{3.64g}$$

$$Logaritmica$$

$$f_8(z) = Az + Bz^3 ln(1 + Cz). \tag{3.64h}$$

Dopodiché, si attua una $F - Statistica$ [59]

$$F = \frac{(TSS - RSS)/p}{RSS/(n - p - 1)}, \tag{3.65}$$

dove

$$TSS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2, \tag{3.66}$$

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{3.67}$$

e

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{3.68}$$

Qui, le y_i sono i valori osservati, mentre le $\hat{y}_i$ sono i valori predetti dal modello; n è il numero di osservazioni e p il numero di predittori. La bontà del modello è confermata dal confronto tra l'ipotesi nulla (la potenza esplicativa del modello è nulla se tutti i coefficienti delle regressioni sono nulli) ed il caso in cui esista almeno un coefficiente non nullo della regressione. Mentre per altri test come $statistica{-}t$ e $p{-}values$ la bontà del modello è misurata in base alla associazione tra le variabili individuali e la risposta, in una $F - statitica$ il modello è testato attraverso l'aggiunta dei predittori. Per p grande, può accadere, infatti, che le $p - values$ sono piccole anche quando non vi sia una reale associazione tra predittori e la risposta. Il vantaggio della $F - statistica$ rispetto l'$R^2 - test$ sta nella presenza di un numero di predittori. Aggiungendo più predittori al modello, l'R^2 risulterà sempre crescente, anche se l'associazione tra queste variabili e la risposta è debole. E' possibile esprimere la $F - statistica$ in termini di R^2 come

$$F = \frac{R^2/p}{(1 - R^2)/(n - p - 1)}. \tag{3.69}$$

Maggiore è il valore di F, maggiore è l'evidenza contro l'ipotesi nulla, per cui ci si aspettano valori piccoli per R^2 ed F. In questo studio, il numero di parametri liberi è $p = 3$ ed $n = 1000$ sono i punti generati dalla ricostruzione numerica di $f(z)$.

$Test - function$	(A, B, C)	$F(\times 10^6)$
$f_1(z)$	$(-8.078, -0.530, 0.005)$	31.7
$f_2(z)$	$(-6.147, -2.148, 0.080)$	13.5
$f_3(z)$	$(-8.046, -0.541, 0.025)$	3.637
$f_4(z)$	$(-3.699, 0.027, -562.2)$	4.535
$f_5(z)$	$(-0.708, -0.001, 1.095)$	0.118
$f_6(z)$	$(-0.717, -0.008, 0)$	0.142
$f_7(z)$	$(-41.30, 0.002, 1.000)$	0.0264
$f_8(z)$	$(-11.69, -0.208, 1.182)$	1.484

Questa tabella riassume i risultati ottenuti applicando la $F - statistica$ sulle equazioni (3.63a)-(3.63h) per l'approssimazione di Padé (2,1). I risultati indicano che la migliore corrispondenza analitica per $f(z)$ è data da

$$f(z) = Az + Bz^3 + e^{Cz}, \tag{3.70}$$

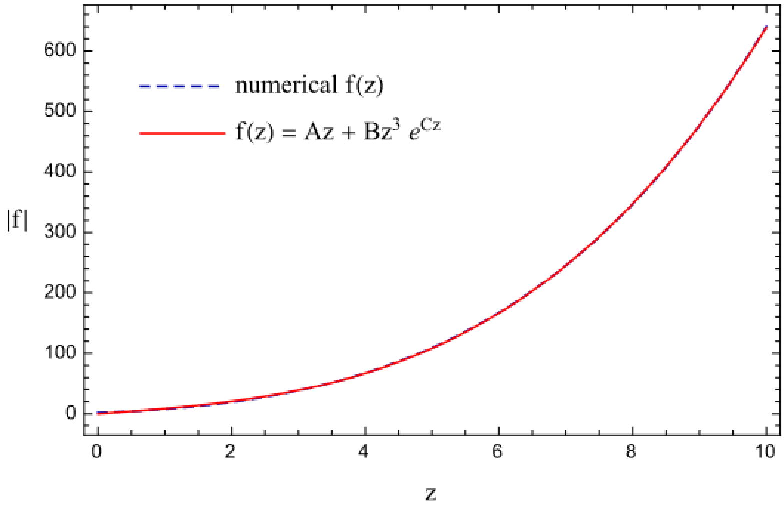

Figura 3.3: Confronto tra $|f(z)|$ e la forma funzionale (3.68) tramite l'approssimazione (2,1) di Padé

dove

$$(A, B, C) = (-8.078, -0.530, 0.005). \tag{3.71}$$

Nella figura 3.3 mostriamo il confronto tra la soluzione numerica e la soluzione analitica per la $f(z)$ nel dominio $z \in [0, 10]$. Per determinare la $f(R)$, abbiamo bisogno di invertire la funzione $R(z)$ ed inserirla nell'equazione (3.69). Questa procedura è numerica a causa dell'impossibilità di poter invertire analiticamente la (3.55). Usando la (2.38) per trovare $z(R)$ (vedi figura 3.4), che poi inseriremo nella (3.69) per ottenere la $f(R)$ (figura 3.5). Dalla figura 3.6 e dalla 3.7, possiamo vedere che il nostro modello soddisfa le condizioni discusse nella sezione relativa alle teorie $f(R)$. Ad ogni modo, nella figura 3.6, si vede che la $f'(R)$ diventa più grande per grandi curvature, a causa della condizione imposta su $f'(R_0)$. E' possibile definire un corretto comportamento asintotico alleggerendo l'assunzione $f'(R_0) = 1$, richiedendo, ad esempio, che la G_{eff} sia leggermente differente da G, entro i limiti imposti dalle più recenti misure [60]. E' possibile, quindi, modificare l'equazione (3.59) e la (3.60) come segue:

$$f_0 = f'(R_0)(6H_0^2 + R_0) - 6(H_0^2\Omega_m 0), \tag{3.72}$$

$$f_z|_{z=0} = f'(R_0)R_z|_{z=0}. \tag{3.73}$$

Nella figura 3.8, mostriamo i risultati ottenuti usando le relazioni qui sopra, al fine di ottenere la funzione ausiliaria $f(z)$. E' importante ricordare che il comportamento asintotico della $f'(R)$ dipende dall'accuratezza della serie cosmografica

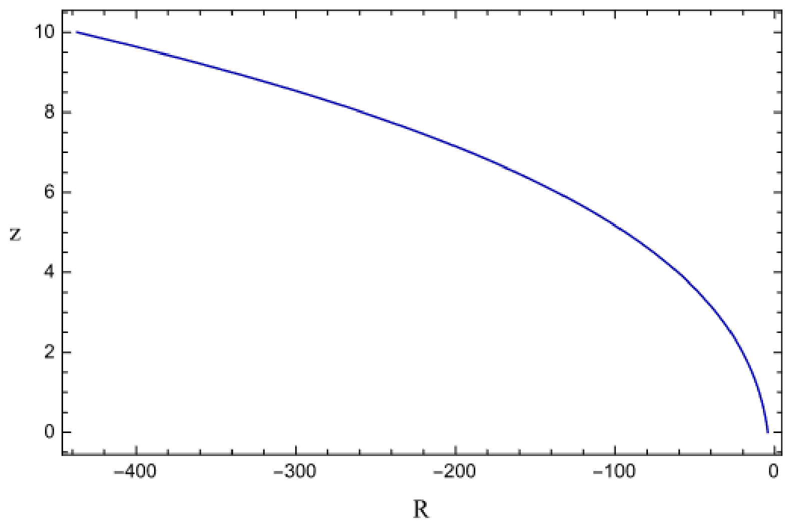

Figura 3.4: $z(R)$ per il polinomio di Padé (2,1)

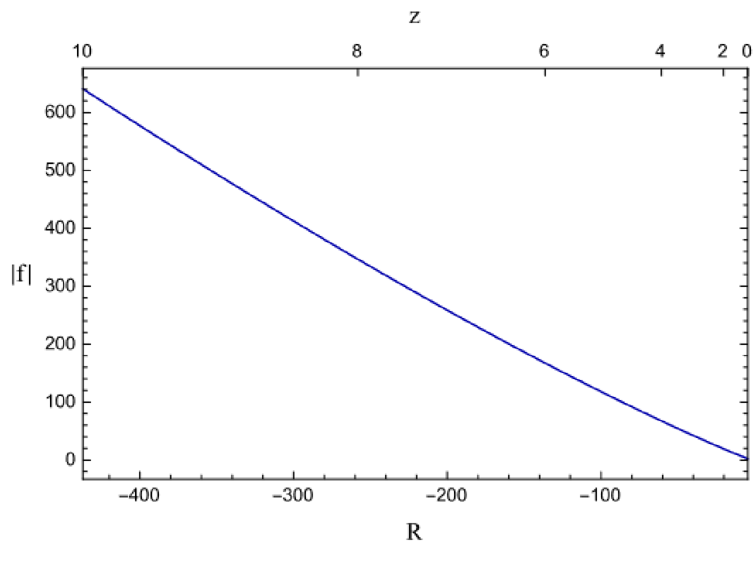

Figura 3.5: $|f(R)|$ ricostruita con il polinomio di Padé (2,1) in z ∈[0,10]

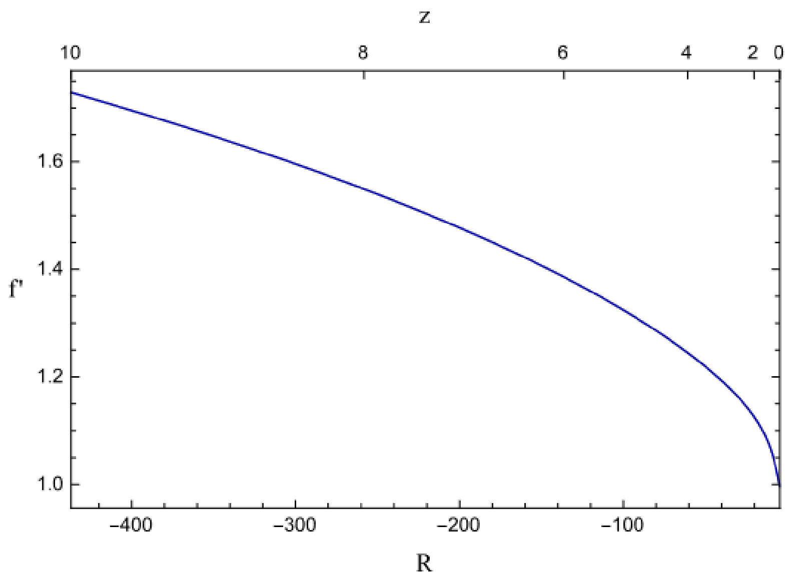

Figura 3.6: Andamento di $f'(R)$ ricostruita tramite il polinomio di Padé (2,1) con $z \in [0, 10]$.

ad alti redshift. Il potere predittivo ed il raggio di convergenza dei polinomi di Padé possono essere migliorati considerando termini di ordine superiore, cosicché la differenza $f'(R)_{numerical} - f'(R)_{exact}$ per grandi curvature possa essere resa piccola fino al livello desiderato. Possiamo, ora, studiare il comportamento della equazione di stato dell'energia oscura, w_{DE}, dedotta dalla ricostruzione della $f(R)$. Per questi propositi, riscaliamo la (3.69) per poter prendere in considerazione errori di propagazione nella procedura numerica

$$f(z) \to \lambda + f(z) \tag{3.74}$$

Qui, λ, non coincide con il contributo all'energia del vuoto ma gioca il ruolo di una costante di scala che garantisce l'accoppiamento tra il valore numerico della $f(z)$ per $z = 0$ e la condizione fisica $f'(R_0) = 1$. Il valore di λ può essere trovato imponendo la condizione di attuale accelerazione

$$-1 \leq w_{DE}|_{z=0} < -\frac{1}{3}, \tag{3.75}$$

che conduce ad un valore di

$$\lambda \gtrsim 19.3. \tag{3.76}$$

Il comportamento della densità di curvatura e della pressione sono mostrati nelle figure 3.9 e 3.10 per un valore indicativo di $\lambda = 100$. La figura 3.11 mostra l'effettiva equazione di stato dell'energia oscura per vari valori di λ in accordo

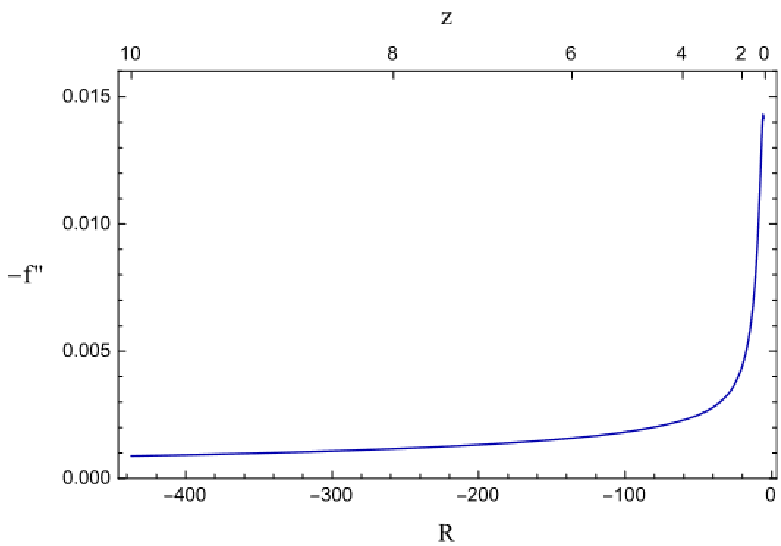

Figura 3.7: Andamento di $f''(R)$ ricostruita tramite il polinomio di Padé (2,1) in $z \in [0, 10]$.

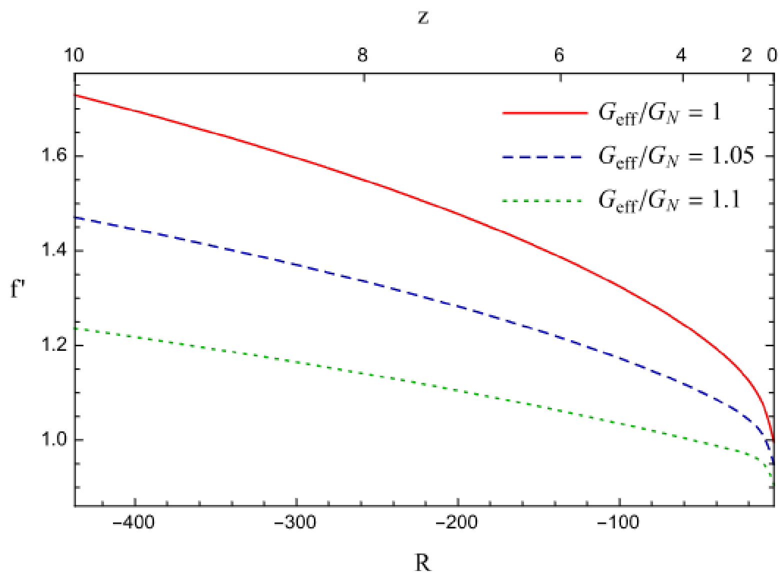

Figura 3.8: Andamento della $f'(R)$ per differenti valori di G_{eff}.

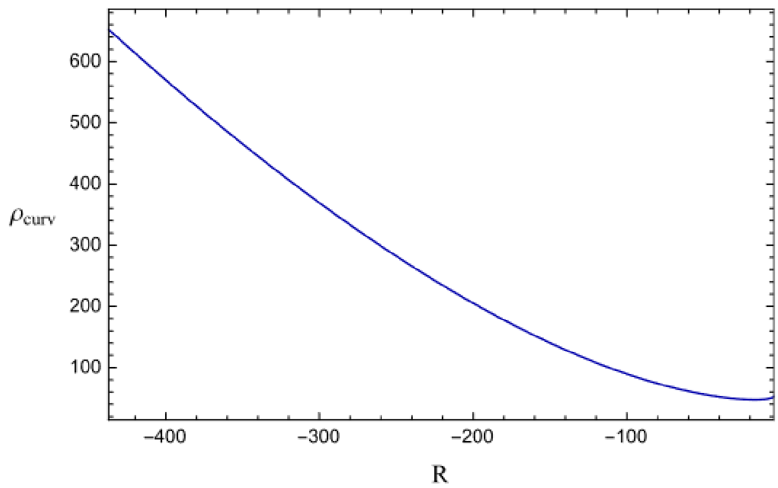

Figura 3.9: Densità di curvatura ricostruita tramite approssimazione di Padé (2,1) con $\lambda = 100$.

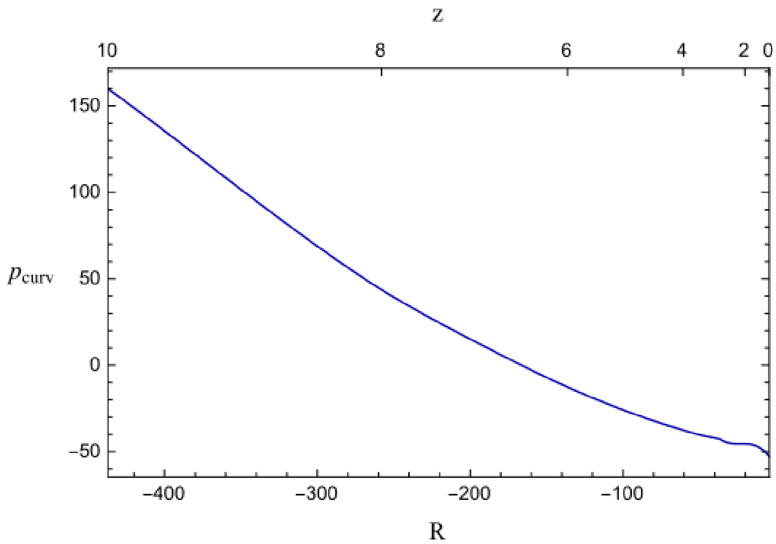

Figura 3.10: Pressione di curvatura ricostruita tramite approssimazione di Padé (2,1) con $\lambda = 100$.

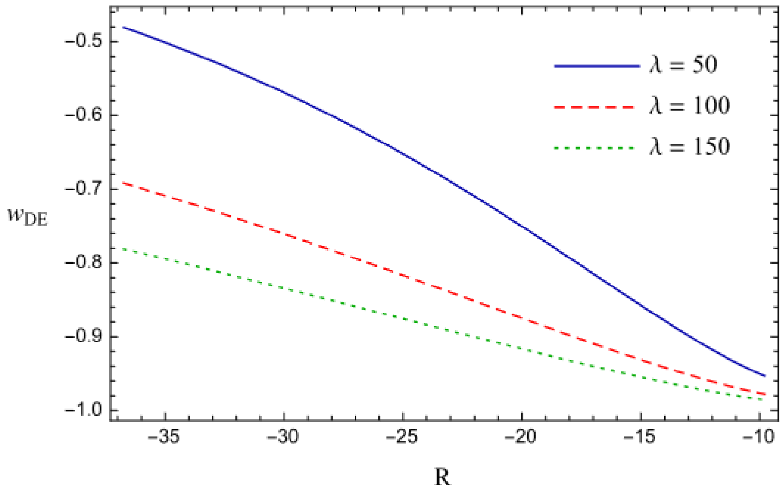

Figura 3.11: Parametro barotropico dell'energia oscura con differenti valori di λ.

alla (3.75). Per una migliore visualizzazione dei benefici dell'analisi basata sulla approssimazione di Padé rispetto l'approccio strandard, utilizziamo il parametro di Hubble, espresso in termini della serie cosmografica, per risolvere l'equazione (3.58) con i risultati (3.62)

$$H(z) \simeq H_0\left[1+z(1+q_0)+\frac{z^2}{2}(j_0-q_0^2)+\frac{z^3}{6}(-3q_0^2-3q_0^3+j_0(3+4q_0)+s_0)+O(z^4)\right] \tag{3.77}$$

Il confronto tra i due metodi è mostrato nella figura 3.12, dalla quale vediamo che l'approccio di Taylor perde di predittività a $z \geq 0.3$. Invertendo numericamente la (3.76) con l'utilizzo della (2.38) otteniamo $z(R)$ che viene inserita nella $f(z)$ per trovare la $f(R)$ nel caso della approssimazione di Taylor. Ci resta da studiare l'equazione di stato per l'energia oscura per l'approccio di Taylor e paragonarlo con i risultati ottenuti con Padé. Applicando l'appossimazione di Taylor il riscalo della (3.71) e la condizione (3.72), si ottiene che

$$\lambda \gtrsim 1196. \tag{3.78}$$

Il parametro barotropico della energia oscura mostrata in figura 3.15 oltrepassa il limite $w_{DE} = -1$ a $z = 0.3$. Ciò conferma il problema dell'approccio di Taylor per alti redshift. A questo punto, è importante ricapitolare quanto discusso. Una ricostruzione cosmologica della gravità $f(R)$ può essere sviluppata in termini del redshift. In un tale approccio, la cosmologia FLRW emerge da specifici modelli

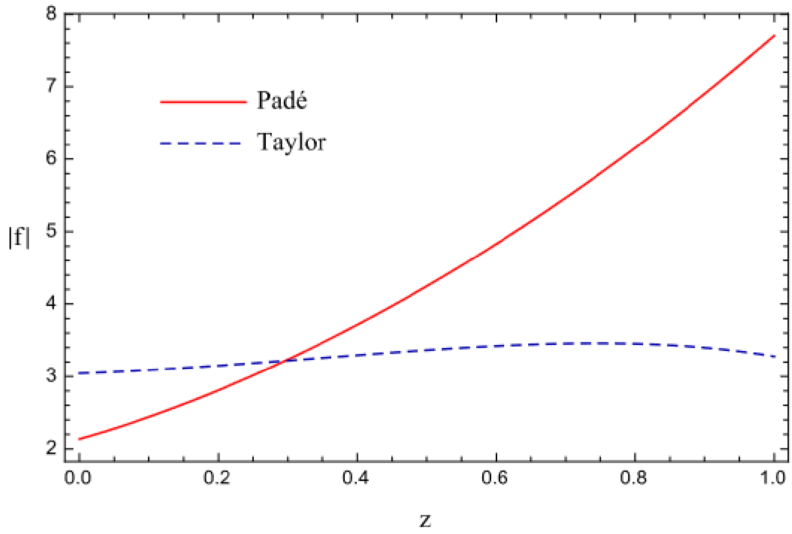

Figura 3.12: Confronto tra $|f(z)|$ ricostruita tramite il polinomio di Padé (2,1) e con l'approssimazione di Taylor al terzo ordine.

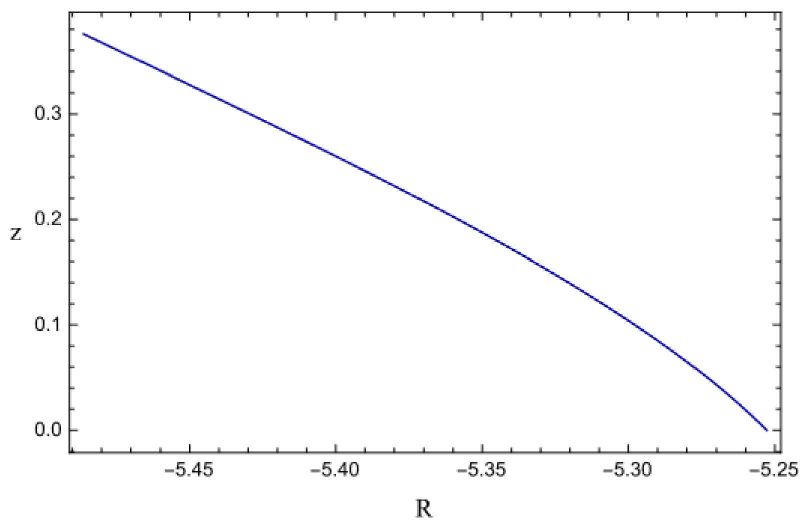

Figura 3.13: Andamento numerico di $z(R)$ ricostruito tramite l'approssimazione di Taylor al terzo ordine.

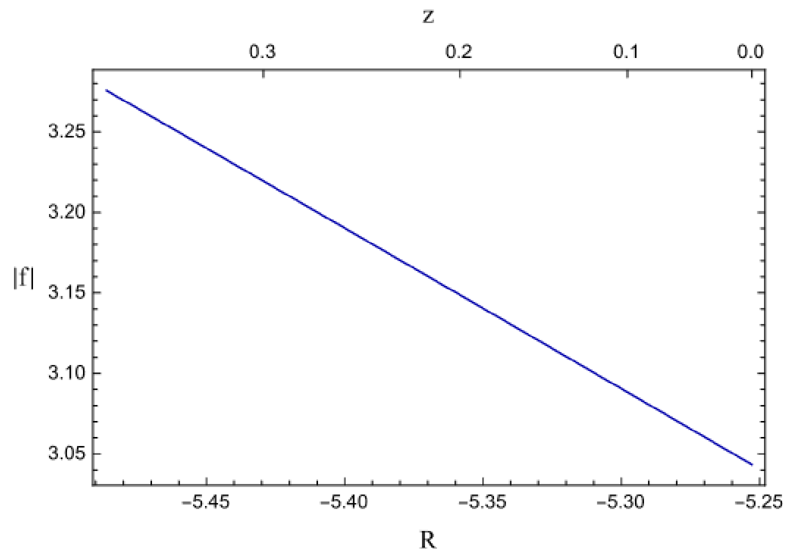

Figura 3.14: Ricostruzione di $f(R)$ tramite l'approssimazione di Taylor al terzo ordine.

$f(R)$. L'applicazione di una schema del genere, permette l'unificazione dell'inflazione con la dark energy, oltrepassando gli inconvenienti legati alla serie di Taylor utilizzata per la distanza di luminosità. Lo schema di ricostruzione può essere generalizzato in presenza di campi scalari. Tramite le tecniche di ricostruzione applicate alla gravità $f(R)$, la transizione dall'epoca della dominazione della materia all'epoca di dominazione della dark energy può essere realizzata [61, 62]. Ciò è estremamente rilevante al fine di ottenere dei modelli cosmologici validi.

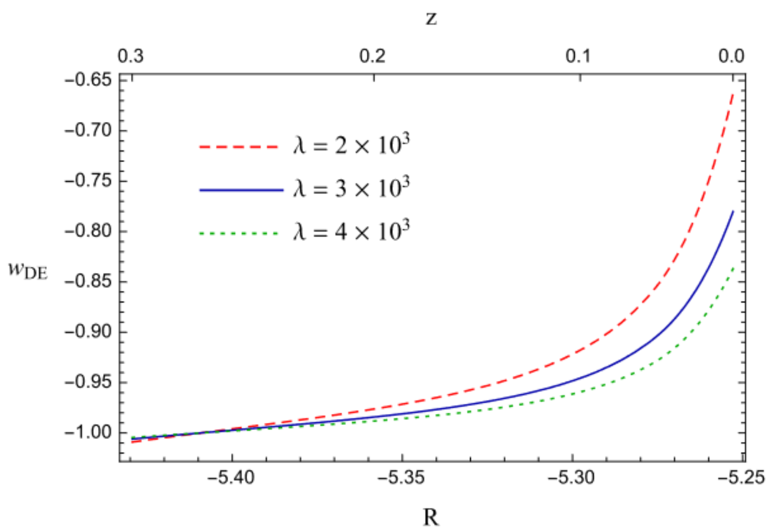

Figura 3.15: Parametro barotropico della energia oscura ricostruita tramite approssimazione di Taylor al terzo ordine per diversi valori di λ.

Conclusioni

In questa tesi è stato discusso il metodo cosmografico e la sua particolare applicazione alle teorie estese della gravità. La filosofia è quella di andare oltre la gravità di Einstein al fine di correggere inconvenienti relativi al modello cosmologico standard. L'evidenza osservativa che prevede la densità di energia composta prevalentemente da componenti oscure (materia ed energia oscura) è prova dei limiti della relatività generale su scale cosmologiche. Un modo per ovviare a questa problematica è quello di modificare l'azione di Hilbert-Einstein introducendo ordini superiori dell'invariante di curvatura e termini minimamente, o non, accoppiati ad esso ed alla geometria. In questo lavoro ci siamo concentrati sulle teorie $f(R)$, di cui abbiamo descritto la dinamica e la validità osservativa di tali teorie. Abbiamo mostrato come sia possibile sviluppare tecniche modello-indipendente, quale l'approccio cosmografico, per descrivere l'espansione accelerata senza postulare a priori l'azione gravitazionale. E' stato, poi, proposto l'utilizzo dei polinomi razionali, in particolare di Padé, per correggere i problemi di convergenza legati all'approccio standard, riducendone la propagazione di errori. I dati più recenti sono stati utilizzati per imporre vincoli sulla serie cosmografica attraverso integrazioni numeriche con metodi Monte Carlo. Questo approccio risulta adeguato a fornire una accurata descrizione della storia più recente dell'universo. Abbiamo mostrato come sia possibile applicare questo metodo per ricostruire modelli di gravità $f(R)$ consistenti con le osservazioni, partendo dalla sola assunzione del principio cosmologico. E' stato discusso il comportamento dinamico dei modelli ricostruiti e le conseguenze che ne derivano a livello cosmologico. Quello che risulta è una lieve deviazione dalla relatività generale (e quindi dal modello di concordanza) ed un termine di energia oscura che evolve nel tempo. Tuttavia, l'attuale lavoro suggerisce che non è ancora possibile falsificare il modello ΛCDM e che la degenerazione tra i vari modelli di energia oscura resta inevitabile. In conclusione, quindi, risulta essenziale la necessità di poter disporre di misurazioni più precise ed a redshift maggiori. Inoltre, un ruolo fondamentale nell'ambito di esperimenti futuri sarà quello dell'analisi delle perturbazioni cosmologiche in strutture a larga scala.

Appendice

In questa appendice riportiamo l'approssimazione di Taylor al terzo ordine e le approssimazioni di Padé fino al terzo ordine della distanza di luminosità.

$$T_3 = \frac{z}{H_0}\big[z(-(j_0+1)z + q_0(3q_0 z + z - 3) + 6\big], \tag{3.79}$$

$$P_{1,1}(z) = \frac{1}{H_0}\left[\frac{2z}{2+(-1+q_0)z}\right], \tag{3.80}$$

$$P_{1,2}(z) = \frac{1}{H_0}\left[\frac{12z}{12+6(-1+q_0)z+(5+2j_0-q_0(8+3q_0))z^2}\right], \tag{3.81}$$

$$P_{2,1}(z) = \frac{1}{H_0}\left[\frac{z(6(-1+q_0)+(-5-2j_0+q_0(8+3q_0))z)}{-2(3+z+j_0 z)+2q_0(3+z+3q_0 z)}\right]. \tag{3.82}$$

Bibliografia

[1] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, (Princeton Univ. Press, Princeton, 1993).

[2] E. Hubble, Proc. Nat. Acad. Sci.**15**, 168 (1929).

[3] A. G. Riess et al., Astron. J. **116**, 1009 (1998); S. Perlmutter et al., Astrophys. J. **517**, 565 (1999).

[4] V. Sahni and A. Starobinsky, Int. J. Mod. Phys. D **9**, 373 (2000).

[5] S. M. Carroll, Living Rev. Relativ. **4**, 1 (2001).

[6] P. J.Peebles and B. Ratra, Astrophys. J. **325**, 1220 (1988); B. Ratra and P. J. Peebles, Phys. Rev. D **37**, 3406 (1988).

[7] R. R. Caldwell, R. Dave, P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **80**, 1582 (1998).

[8] H. Bondi, *Cosmology*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952).

[9] S.Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (Wiley, New York,1972).

[10] R. Wald, *General Relativity*, (Chicago Univ. Press, Chicago, 1984).

[11] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheleer, *Gravitation*, (Freeman W.H., San Francisco, 1973).

[12] S. Weinberg, *Cosmology*, (Oxford Univ. Press, Oxford, 2008).

[13] S. Capozziello, R. D'Agostino and O. Luongo, Int. J. Mod. Phys. **28**, 1930016 (2019).

[14] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).

[15] P. J. E. Peebles and B. Ratra, Rev. Mod. Phys. **75**, 559 (2003).

[16] I. Zlatev, L. Wang and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **82**, 896 (1999).

[17] V. Sahni, Class. Quant. Grav. **19**, 3435 (2002).

[18] V. V. Luković, R. D'Agostino and N. Vittorio, Astron. Astrophys. **595**, A109 (2016).

[19] W. L. Friedmann et al., Astrophys. J. **553**, 47 (2001).

[20] A. G. Riess et al., Astrophys. J. **826**, 56 (2016).

[21] P. A. R. Ade et al. (Planck Collaboration), Astron. Astrophys. **594**, A132015 (2016).

[22] A. D. Linde, Phys. Lett. B **108** 389 (1982).

[23] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982).

[24] S. Capozziello, M. De Laurentis, Phys. Rep. **509**, 167 (2011).

[25] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, Rev. Mod. Phys. **82**, 451 (2010).

[26] A. De Felice and S. Tsujikawa, Living. Rev. Rel. **13**, 3 (2010).

[27] S. Nojiri, S. D. Odintsov and V. K. Oikonomou, Phys. Rept. **692**, 1 (2017).

[28] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rept. **505**, 59 (2011).

[29] A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B **91**, 99 (1980).

[30] Y. Wang, Phys. Rev. D **42**, 2541 (1990).

[31] S. Capozziello, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 483 (2002).

[32] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden and M. S. Turner, Phys. Rev. D **70**, 043528 (2004).

[33] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **68**, 123512 (2003).

[34] A. D. Dolgov and M. Kawasaki, Phys. Lett. B **1573**, 1 (2003).

[35] T. Chiba, Phys.Lett. B **575**, 1 (2003).

[36] L. Amendola, D. Polarski and S. Tsujikawa, Phys. Rev. Lett **98**, 131302 (2007).

[37] G. J. Olmo, Phys. Rev. D **72**, 083505 (2005).

[38] V. Faraoni, Phys. Rev. D **74**, 023529 (2006).

[39] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **75**, 083504 (2007).

[40] T. Chiba, T. L. Smith and A. L. Erickcek, Phys. Rev. D **75**, 124014 (2007).

[41] W. Hu and I. Sawicki, Phys. Rev. D **7676**, 064004 (2007).

[42] S. A. Appleby and R. A. Battye, Phys. Lett. B **654**, 7 (2007).

[43] E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, L. Sebastiani and S. Zerbini, Phys. Rev. D **83**, 086006 (2011).

[44] R. Ferraro and F. Fiorini, Phys. Rev. D **75**, 084031 (2007).

[45] G. R. Bengochea and R. Ferraro, Phys. Rev. D **79**, 124019 (2009).

[46] H. Visser, Gen. Rel. Grav. **37**, 1541 (2005); C. Cattoen and M. Visser, Phys. Rev. D **78**, 063501 (2008); H. Visser, Class. Quant. Grav. **32**, 135007 (2015).

[47] P. K. S. Dunsby and O. Luongo, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **13**, 1630002 (2016).

[48] E. R. Harrison, Nature **260**, 591 (1976).

[49] A. Aviles, A. Bravetti, S. Capozziello and O. Luongo, Phys. Rev. D *90*, 043531 (2014).

[50] S. Capozziello, R. D'Agostino and O. Luongo, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **494**, 2 (2020).

[51] G. A. Baker Jr., P. Graves-Morris, *Padé Approximants*, (Cambdrige Univ. Press, Cambridge, 1996).

[52] C. Gruber and O. Luongo, Phys. Rev. D **89**, 103506 (2014).

[53] H. Wei, X. P. Yan and Y. N. Zhou, J. Cosm. Astrop. Phys. **1401**, 045 (2014).

[54] S. Capozziello, R. D'Agostino and O. Luongo, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **476**, 3924 (2018).

[55] M. Betoule et al., Astron. Astrphys. **568**, A22 (2014).

[56] R. Jimenez and A. Loeb, Astrophys. J. **573**, 37 (2002).

[57] SDSS Collab. (D. J. Eisenstein at al.), Astrophys. J. **633**, 560 (2005).

[58] B. Audren, J. Lesgourgues, K. Benabed and S. Prunet, J. Cosm. Astrop. Phys. **02**, 001 (2013).

[59] G. James, D. Witten, T. Hastie and R. Tibshirani, *An Introduction to Statistical Learning*, (Springer-Verlag, New York, 2013).

[60] C. J. A. P. Martins, Rep. Prog. Phys. **80**, 12 (2017).

[61] S. Capozziello, S. Nojiri, S. D. Odintsov and A. Troisi, Phys. Lett. B **639**, 135 (2006).

[62] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **74**, 086005 (2006).