

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI “FEDERICO II”



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

La Cosmologia Quantistica ed il Criterio di Hartle

Relatori:

Prof. Salvatore Capozziello
Dr. Francesco Bajardi

Candidato:

Raffaele Macciocchi
Matr. N85000900

Salvatore Capozziello
Francesco Bajardi

Anno Accademico 2021/2022

Indice

1	Introduzione	2
2	La Relatività Generale e la Cosmologia Classica	4
3	La quantizzazione canonica della Relatività Generale	10
4	L'interpretazione della funzione d'onda	18
5	Il limite semiclassico	23
6	Il Minisuperspazio	28
7	Le simmetrie di Noether e il Criterio di Hartle	33
8	Conclusioni e prospettive	37

Capitolo 1

Introduzione

Sistematicamente nella fisica accade che quando si fa un passo avanti nella comprensione di qualche fenomeno, e si ottengono quindi delle risposte a delle domande, questo comporta la nascita di nuovi interrogativi ancora più profondi e con un livello maggiore di tecnicismi necessari a trovare nuove soluzioni. Einstein ha rivoluzionato - insieme ad altri scienziati che si sono serviti delle sue scoperte - il nostro modo di concepire l'Universo, ma ha anche consegnato degli enigmi che restano irrisolti da tempo. Uno tra questi è la singolarità all'inizio dell'Universo, la quale proibisce di **trovare delle condizioni al contorno per la sua nascita**, impedendo di rispondere alla domanda "come ha avuto origine tutto ciò che ci circonda?".

I tentativi di risoluzione di questo problema sono molteplici e una buona parte di essi rientra nel campo di studi chiamato "Cosmologia Quantistica". Nonostante il problema sia di difficoltà elevata, l'idea alla base della Cosmologia Quantistica è piuttosto banale: stabilire se le attuali proposte di teorie unificatrici siano in grado di descrivere il comportamento dell'Universo nel periodo in cui esso aveva dimensioni sufficientemente piccole da poter essere considerato come un sistema quantistico e verificare se le loro, eventuali, predizioni sulla sua evoluzione coincidano con le osservazioni. Questo è, infatti, il primo obiettivo di questo lavoro di tesi: presentare una tra le possibili candidate a teoria unificatrice e mostrare come essa potrebbe risolvere il problema delle condizioni al contorno per la nascita dell'Universo. La teoria che presenteremo è la "quantizzazione canonica della Relatività Generale", il cui risultato chiave è l'equazione di Wheeler-DeWitt (WDW). Nel fare ciò ci impareremo in un problema di interpretazione dei risultati ottenuti - nello specifico otterremo una nuova definizione di funzione d'onda - e **mostreremo quindi come una tra le varie interpretazioni proposte nel corso della storia, quella di Hartle, potrebbe essere elevata a criterio**, che è il secondo obiettivo di questo lavoro di tesi.

La struttura del discorso sarà la seguente: nel capitolo 2 introdurremo la Teoria della Relatività Generale e mostreremo come la Cosmologia Classica si basi su una particolare soluzione dell'equazione di campo trovata da Einstein per descrivere la relazione che c'è tra curvatura e materia. Nel capitolo 3 sarà mostrata e discussa la procedura di quantizzazione canonica della Relatività Generale che porterà all'equazione di WDW, prestando particolare attenzione alle caratteristiche dello spazio delle configurazioni in cui sono definite le soluzioni di tale equazione. Nel capitolo 4 discuteremo dei problemi interpretativi legati all'equazione di WDW e alla sua funzione d'onda, e forniremo alcuni esempi di interpretazione dei risultati della teoria. Nel capitolo 5 dimostreremo che nel limite semiclassico della Meccanica Quantistica l'equazione di WDW consente l'emersione di Universi classici dallo stato quantistico in cui si trovava il sistema al tempo di Planck. Nel capitolo 6 introdurremo il concetto di minisuperspazio, ovvero un tentativo di semplificare l'equazione di WDW tenendo conto delle caratteristiche del sistema, e forniremo un esempio di questa procedura basato sul principio cosmologico. Nel capitolo 7 dimostreremo che l'interpretazione di Hartle, esposta nel capitolo 4 tra gli esempi di interpretazione dei risultati della teoria, potrebbe costituire in realtà un criterio di selezione di condizioni al contorno per l'emersione di Universi classici nel limite semiclassico. Nel capitolo 8 saranno discusse le conclusioni di questo lavoro di tesi e le prospettive future della Cosmologia Quantistica.

Capitolo 2

La Relatività Generale e la Cosmologia Classica

Nel 1916, nell'articolo "I fondamenti della teoria della Relatività Generale", Albert Einstein espose una nuova teoria della gravitazione che ampliò e, progressivamente, sostituì quella di Newton. Nell'esporre i suoi principi generali sottintenderemo sempre, eccetto quando specificato, che i sistemi di cui si parla siano non quantistici ed intenderemo per relativistico ciò che ha velocità prossime a quella della luce. Il paradigma della Relatività Generale è il seguente: la gravità non è più considerabile come una forza, in quanto essa risulta essere un effetto della curvatura dello spaziotempo in presenza di una massa; cioè quelli che secondo Newton erano moti accelerati in geometrie piatte sono, in realtà, moti inerziali in geometrie curve. Quanto detto è conseguenza del "principio di equivalenza" che afferma, come dimostrato empiricamente, che la massa inerziale e quella gravitazionale di un corpo coincidono, e ciò implica la possibilità di poter sempre scegliere un sistema di coordinate tale da poter annullare gli effetti gravitazionali, rendendo difatti impossibile per un osservatore solidale a tale sistema di coordinate capire se esso è soggetto a forze gravitazionali o a forze apparenti. L'equazione fondamentale della teoria della Relatività Generale è l'equazione di campo di Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

che mette in relazione il tensore di Einstein $G_{\mu\nu}$, il quale esprime la curvatura dello spaziotempo nel punto, con il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$, contenente le informazioni riguardanti la materia e l'energia presenti nello stesso punto. Il termine $G_{\mu\nu}$ è dato da

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (2.2)$$

dove $R_{\mu\nu}$ ed R sono chiamati rispettivamente tensore e scalare di Ricci e sono contrazioni del tensore di Riemann.

Anche la definizione di punto cambia, infatti mentre in fisica galileana si individua un certo punto ad un dato istante tramite una terna di coordinate $(x(t), y(t), z(t))$ parametrizzate rispetto al tempo in uno spazio euclideo che è quindi tridimensionale, in Relatività Generale il tempo stesso è una coordinata e dunque un punto è definito dalle coordinate (t, x, y, z) . Lo spaziotempo relativistico è dunque quadrimensionale. La soluzione delle (2.1) è il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ le cui componenti, 10 delle quali indipendenti, sono funzioni delle coordinate dello spaziotempo. È importante sottolineare che le coordinate sono un'etichetta che viene assegnata ai punti dello spaziotempo, mentre la dinamica del sistema risiede nello spostamento infinitesimale compiuto dal punto, chiamato elemento di linea. Questo è, in realtà, vero anche in fisica galileana dove si misurano le distanze tramite il Teorema di Pitagora:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (2.3)$$

Nella teoria di Einstein gli elementi di linea si misurano tramite la relazione

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.4)$$

da cui possiamo facilmente intuire qual è il ruolo del tensore metrico: assegnare i coefficienti alle varie combinazioni possibili di $dx^\mu dx^\nu$, i quali possono essere non nulli non solo per le componenti in cui $\mu \neq \nu$ ma anche, e soprattutto, per il tempo, a differenza di quanto afferma il Teorema di Pitagora. La (2.4) è una generalizzazione dell'intervallo in Relatività Ristretta. Alla luce di queste considerazioni non è sbagliato affermare che il teorema di Pitagora sia "solo" un caso particolare di una relazione che descrive una situazione ben più ampia: esso è infatti ciò a cui si riduce la (2.4) nel caso di geometrie piatte e sistemi non relativistici; ed è qui che si può riscontrare praticamente quanto detto ad inizio capitolo, cioè che i moti in Relatività Generale sono moti in geometrie curve.

Esiste una molteplicità di soluzioni per le (2.1), le quali a volte corrispondono a situazioni fisiche riscontrate empiricamente, mentre per altre sussiste ancora il dubbio che siano soluzioni soltanto matematiche. In questo capitolo presenteremo una sola di queste: la metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

Tale metrica è fondamentale ai fini dello studio della Cosmologia Classica poichè fornisce la relazione che descrive come si misurano le distanze quando ragioniamo su scale cosmologiche (cioè da 100Mpc in poi). Prima di fare ciò diamo una definizione di Cosmologia: la Cosmologia è la scienza che si occupa di studiare la formazione, la struttura e l'evoluzione dell'Universo. La metrica di FLRW è una conseguenza del "principio cosmologico" (Figura 2.1), formulato in seguito allo sviluppo delle osservazioni extragalattiche, il quale afferma che l'Universo a scale cosmologiche è omogeneo ed isotropo, il che significa che il modo in cui



Figura 2.1: Immagine raffigurante circa 10.000 galassie. Quando lo osserviamo a distanze cosmologiche, l'Universo appare omogeneo ed isotropo.

appare non dipende dalla posizione dell'osservatore. La metrica di FLRW è data da

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right), \quad (2.5)$$

dove $a(t)$ è detto fattore di scala e k è il parametro di curvatura. La funzione $a(t)$ è adimensionale, caratterizza l'espansione relativa dell'Universo ed è l'unica grandezza non determinata nella metrica di FLRW. La curvatura spaziale dell'Universo è data dal valore di k che può assumere i valori +1, 0, -1 corrispondenti, rispettivamente, ad un Universo con curvatura positiva, piatta o negativa (detto anche Universo chiuso, piatto o aperto), come mostrato in Figura 2.2. Poichè l'Universo si espande, il Δs^2 tra due punti in metrica di FLRW aumenta nonostante le coordinate r, θ e ϕ non cambino; l'aumento della distanza, infatti, non è espresso tramite le coordinate ma tramite il fattore di scala e, pertanto, le coordinate nella metrica di FLRW vengono dette comoventi. Dal momento che l'espansione è osservata ovunque nell'Universo, allora non ha senso ricercare il centro dell'Universo, ossia cercare il punto preciso in cui il Big Bang è avvenuto.

Tramite la metrica di FLRW possiamo studiare la dinamica dell'Universo in quanto, lo ricordiamo, la metrica è la soluzione delle (2.1) che si riducono ad un siste-

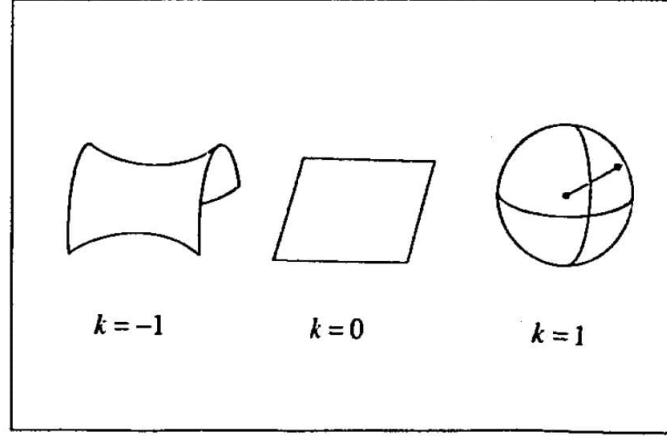


Figura 2.2: Rappresentazione bidimensionale della geometria nella metrica di FLRW al variare del parametro k .

ma di 2 equazioni in 3 incognite. In unità naturali $\hbar = c = 1$, le equazioni cosmologiche sono:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G_N \rho}{3} a^2 - k, \quad (2.6)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G_N}{3} (\rho + 3p) a, \quad (2.7)$$

dove il punto denota la derivata rispetto al tempo. Le 3 incognite sono $a(t)$, $\rho(a)$ e $p(a)$. Le quantità $\rho(a)$ e $p(a)$ sono, rispettivamente, la densità e la pressione della materia. Esse emergono dal tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$ e bastano da sole a descrivere il comportamento della materia, poichè abbiamo approssimato l'Universo ad un fluido perfetto a causa del principio cosmologico. In particolare, $T_{\mu\nu}$ viene scelto nella forma $diag(\rho, -p, -p, -p)$. Derivando la (2.6) e sottraendole la (2.7) possiamo eliminare $\ddot{a}$ ed ottenere l'equazione di continuità

$$\frac{d\rho}{da} = -\frac{3}{a}(\rho + p). \quad (2.8)$$

Abbiamo bisogno di una terza equazione per poter risolvere il sistema e, pertanto, introduciamo l'equazione di stato della materia

$$p = p(\rho) = \frac{\gamma}{3}\rho, \quad (2.9)$$

con $\gamma = 1$ per la radiazione e $\gamma = 0$ per la materia. Sostituendo la (2.9) nella (2.8) si ottiene la

$$\rho(a) = \rho(a_i) \left(\frac{a_i}{a} \right)^{\gamma+3}, \quad (2.10)$$

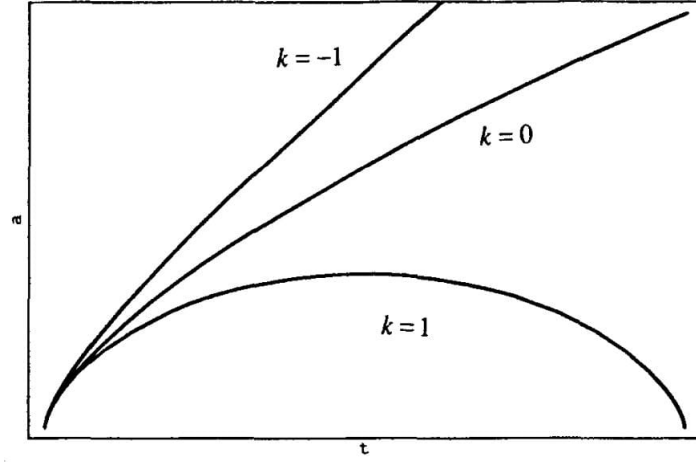


Figura 2.3: Grafico di $a(t)$ al variare di k .

con a_i valore del fattore di scala ad un certo istante t_i . A questo punto non solo abbiamo un sistema risolvibile, ma abbiamo anche equazioni più facili da gestire poichè, come vedremo, la dinamica dell'Universo è espressa solamente in funzione di $a(t)$, delle sue derivate prima e seconda e di altri termini costanti. Se, infatti, sostituiamo la (2.10) e la (2.9) nella (2.6) e nella (2.7) quest'ultime diventano

$$\dot{a}^2 = \frac{cost}{a^{\gamma+1}} - k, \quad (2.11)$$

$$\ddot{a} = -\frac{cost}{a^{\gamma+2}}. \quad (2.12)$$

Queste ultime due equazioni mostrano come l'accelerazione dell'espansione dell'Universo sia destinata ad essere negativa per sempre e come ciò influisca sulla velocità di espansione dell'Universo a seconda del valore della curvatura. Se $k = -1$ allora $\dot{a} > 0$ sempre e quindi l'Universo si espande in eterno, situazione che si verifica con un andamento più "morbido" anche nel caso di $k = 0$, poichè si ottiene $\dot{a} = 0$ solo asintoticamente. Se $k = 1$ si avrà, invece, a un certo istante, che la velocità di espansione si annulla e che, grazie all'accelerazione negativa perenne, $\dot{a}$ diventerà successivamente negativa e quindi l'Universo si contrarrà. Nonostante le considerazioni teoriche ci abbiano indotto a concludere che $\ddot{a} < 0$, le osservazioni hanno dimostrato che l'Universo si trova, attualmente, in una fase in cui la velocità dell'espansione aumenta anzichè diminuire. Quest'incongruenza viene giustificata, da un punto di vista teorico, con l'aggiunta di una costante, detta costante cosmologica, nell'equazione di campo di Einstein. Tale costante,

avendo una pressione negativa al suo interno, determina un'energia di espansione la cui natura non è nota e che viene pertanto chiamata "energia oscura" [1]. L'equazione (2.1) diventa, in seguito all'aggiunta della costante cosmologica Λ ,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Capitolo 3

La quantizzazione canonica della Relatività Generale

Il *modus operandi* della Quantizzazione Canonica della Relatività Generale non è concettualmente diverso da quello usato per la quantizzazione standard: si tratta di formulare la teoria in meccanica hamiltoniana e, successivamente, passare alla matematica degli operatori [2]. La formulazione lagrangiana della Relatività Generale è covariante, al contrario di quella hamiltoniana che non lo è ma lo può diventare in seguito ad una decomposizione $3 + 1$ della metrica, in cui i gradi di libertà dinamici sono le componenti spaziali: a tal fine introdurremo il formalismo sviluppato da Richard Arnowitt, Stanley Deser e Charles W. Misner (ADM) [3]. Fissiamo una topologia nello spaziotempo $R \times M^3$, con M^3 varietà compatta, ed una griglia di coordinate X^α ed introduciamo il metodo del foglietamento per ipersuperfici tridimensionali del genere spazio di topologia M^3 . Una trasformazione di coordinate

$$X^\alpha = X^\alpha(x^0, x^i) \quad (3.1)$$

definisce nello spaziotempo **una famiglia di ipersuperfici a un parametro** dato dalla coordinata temporale x^0 mentre le coordinate spaziali x^i costituiranno una scelta di coordinate locali su ogni ipersuperficie. Quanto è stato evidenziato in grassetto risulta di grande importanza ai fini della discussione sulle simmetrie di Noether. In ogni punto della ipersuperficie possiamo definire dei vettori di base costituiti dai vettori tangenti alla stessa superficie (chiameremo d'ora in poi superficie la ipersuperficie del genere spazio precedentemente definita ed indicheremo con il termine "metrica" il tensore metrico) $X_i^\alpha \equiv X_{,i}^\alpha$ e dal versore normale n^α , che implicano le condizioni

$$g_{\mu\nu} X_i^\mu n^\nu = 0, g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = +1. \quad (3.2)$$

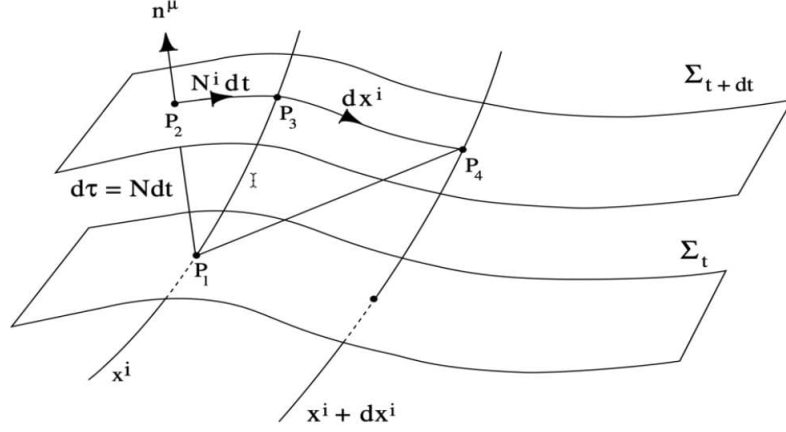


Figura 3.1: fogliettamento di una varietà spaziotemporale.

È definita vettore di deformazione la quantità

$$N^\alpha \equiv \dot{X} = \partial_0 X^\alpha(x^0, x^i), \quad (3.3)$$

la quale connette i punti con le stesse coordinate locali x^i su due superfici contigue $x^0, x^0 + dx^0$. Tale vettore può essere decomposto secondo la base locale di vettori $\{n^\alpha, X_i^\alpha\}$, ottenendo

$$N^\alpha \equiv N n^\alpha + N^i X_i^\alpha. \quad (3.4)$$

Le componenti del vettore di deformazione nella base definita in precedenza, ossia le sue proiezioni, sono chiamate funzioni di Lapse e Shift e descrivono, rispettivamente, lo spostamento locale e quello tangenziale alla superficie con $x^0 = \text{costante}$. Per sviluppare la dinamica di un campo possiamo proiettarlo perpendicolarmente e parallelamente alla superficie e studiare come cambiano le sue componenti quando la superficie stessa evolve. In questo caso abbiamo a che fare con la metrica dello spaziotempo e la sola proiezione non banale è quella parallela alla superficie (poichè le altre devono soddisfare le (3.2))

$$h_{ij} = g_{\mu\nu}(X^\alpha(x^s; x^0)) X_i^\mu X_j^\nu. \quad (3.5)$$

Questa è la metrica tridimensionale indotta sulla generica superficie, a x^0 fissato, dal fogliettamento: essa descrive la geometria intrinseca della superficie nelle coordinate locali x^i . Riscriviamola in termini di g_{ij} e n_i come

$$h_{ij} = g_{ij} + n_i n_j. \quad (3.6)$$

Se il versore normale alla superficie è del genere tempo ($n_i = 0, n_0 = 1$) si ottiene

$$h_{ij} = g_{ij}. \quad (3.7)$$

Sfruttando le definizioni di h_{ij} , N , N^j e le condizioni

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = +1 \\ g_{\mu\nu} n^\mu X_j^\nu = 0, (\forall j) \end{cases}$$

(le quali significano che n^μ è un versore del genere tempo ortogonale a X_j^ν) è possibile riscrivere la metrica spaziotemporale

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \quad (3.8)$$

come

$$ds^2 = +(N^2 - N^j N_j) dt^2 - 2N^i dx_i dt - h_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.9)$$

Le equazioni sono scritte rispetto alla segnatura $(+,-,-,-)$. È, dunque, in questo che consiste il formalismo ADM: in una parametrizzazione di $g_{\mu\nu}$ in termini delle N , N^j , h_{ij} , cioè

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (N^2 - N^i N_i) & -N_j \\ -N_j & -h_{ij} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

A questo punto possiamo vedere come si trasforma la formulazione lagrangiana della Relatività Generale in seguito alla parametrizzazione esposta.

Il campo fondamentale è la metrica $g_{\mu\nu}$ e l'azione di Einstein-Hilbert è scritta come

$$S_{E-H} = \frac{1}{16\pi G_N} \int_V d^4x \sqrt{-g} [R(g) - 2\Lambda] + \frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial V} d^3x \sqrt{h} K. \quad (3.11)$$

$K \equiv h^{ij} K_{ij}$ è la traccia del tensore di curvatura estrinseca K_{ij} della ipersuperficie tridimensionale compatta ∂V , la quale è immersa in una varietà di dimensione 4, mentre h è il determinante della metrica indotta sulla varietà tridimensionale. Il secondo termine dell'azione è introdotto per eliminare le derivate seconde della metrica, provenienti tramite le derivate delle connessioni affini. Sostituendo la nuova metrica (3.9) nell'azione (3.11) e tralasciando, per adesso, il termine con la costante cosmologica Λ otteniamo la forma ADM dell'azione di Einstein-Hilbert

$$S(N, N^j, h_{ij}) = \int N dt d^3x L \quad (3.12)$$

dove L indica la densità di lagrangiana

$$L = L(N, N_i, h_{ij}). \quad (3.13)$$

È possibile mostrare che in L non compaiono né le derivate temporali di N né quelle di N_i , da cui segue una proprietà importante della Relatività Generale: non tutte le 10 componenti indipendenti del tensore metrico sono variabili dinamiche. Le funzioni N , N^i dovranno considerarsi solo come moltiplicatori di Lagrange associati a vincoli sulle variabili canoniche e saranno assegnati arbitrariamente. Le variabili dinamiche saranno, quindi, solo le h_{ij} , componenti della 3-metrica della superficie. Per i momenti coniugati, infatti, si ha

$$\pi \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{N}} = 0, \pi^i \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{N}_i} = 0. \quad (3.14)$$

Questi due momenti coniugati sono chiamati anche vincoli primari. I momenti coniugati a h_{ij} sono

$$\pi^{ij} \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{h}_{ij}} \neq 0. \quad (3.15)$$

Esprimendo la lagrangiana come

$$L = \pi^{ij} \dot{h}_{ij} - H \quad (3.16)$$

e decomponendo H tramite la funzione di Lapse e il vettore di Shift come

$$H = NH_0 + N^i H_i \quad (3.17)$$

otteniamo una nuova forma per l'azione

$$S(\pi^{ij}, h_{ij}, N, N^i) = \int dt d^3x (\pi_{ij} \dot{h}_{ij} - NH_0 - N^i H_i), \quad (3.18)$$

dove H_0 è chiamato *superhamiltoniana* e H_i è chiamato *supermomento*. Per ottenere le equazioni di campo classiche è necessario variare l'azione rispetto alle variabili canoniche indipendenti π^{ij}, h_{ij}, N, N^i . Nel caso di Universi aperti andrebbe aggiunto un ulteriore termine di energia, la cui natura non sarà discussa, ma ci limitiamo a dire che questo termine non interferisce nelle equazioni del moto sebbene cambi la definizione canonica dell'energia. Notiamo che né la lagrangiana né l'eventuale termine da aggiungere per Universi aperti dipendono dal tempo.

Poichè i vincoli primari valgono sempre allora $\dot{\pi} = \dot{\pi}_i = 0$, conseguentemente le rispettive parentesi di Poisson sono

$$\dot{\pi} = -\{H, \pi\} = \frac{\delta H}{\delta N} = 0, \dot{\pi}_i = -\{H, \pi_i\} = \frac{\delta H}{\delta N^i} = 0, \quad (3.19)$$

da cui otteniamo i vincoli "secondari" o "dinamici"

$$H_0 = H_i = 0. \quad (3.20)$$

Questi vincoli sono equivalenti, rispettivamente, alle equazioni di Einstein nel vuoto $G_{00} = G_{i0} = 0$ con

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (3.21)$$

Le altre equazioni di Einstein G_{ij} si possono ottenere in forma di equazioni di Hamilton

$$\dot{h}_{ij} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}}, \quad \dot{\pi}^{ij} = -\frac{\delta H}{\delta h_{ij}}. \quad (3.22)$$

È rimasta, adesso, un'ultima operazione da compiere per ottenere una formulazione hamiltoniana completa: aggiungere il termine di costante cosmologica ed i campi della materia per poi procedere alla quantizzazione effettiva. Il ragionamento è analogo a quello seguito fin qui, si aggiunge infatti il seguente termine

$$\pi^\phi \equiv \frac{\delta L}{\delta \phi} \neq 0 \quad (3.23)$$

che rende i vincoli dinamici

$$H_0 + \sqrt{h} \left(\frac{2\Lambda}{16\pi G_N} + T_{00} \right) = 0, \quad (3.24)$$

$$H_i + \sqrt{h}T_{i0} = 0. \quad (3.25)$$

La teoria fin qui sviluppata ci fa giungere alla seguente conclusione: l'obiettivo della quantizzazione canonica della gravità è trattare le (3.20) come vincoli quantistici sugli stati permessi dal campo gravitazionale. Infatti, data una certa superficie della decomposizione 3+1 ed assegnati i valori di h_{ij} e π^{ij} come condizioni iniziali che soddisfino le (3.20) su tale superficie, allora la corrispondente soluzione di Hamilton (3.22) verificherà i vincoli secondari su ogni altra superficie della decomposizione. È, inoltre, vero anche il contrario: le variabili dinamiche h_{ij} e π^{ij} che soddisfino i vincoli su qualsiasi superficie sono soluzioni delle equazioni di Hamilton.

Procediamo con la quantizzazione. Il primo passo consiste nel trasformare le variabili dinamiche della teoria classica in operatori, verificando che soddisfino regole di commutazione appropriate. Le caratteristiche della varietà M^3 fissata fanno in modo che le nostre variabili canoniche siano le h_{ij} , π^{ij} e nella rappresentazione di Schrödinger si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} [\hat{h}_{ij}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{kl}(\mathbf{x}')] = i\delta_{ij}^{kl}\delta^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\ [\hat{h}_{ij}, \hat{h}_{kl}] = 0, \\ [\hat{\pi}^{ij}, \hat{\pi}^{kl}] = 0, (\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in M^3) \end{array} \right. \quad (3.26)$$

con

$$\delta_{ij}^{kl} \equiv \frac{1}{2}(\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k). \quad (3.27)$$

Otteniamo così degli operatori quantistici che vanno sostituiti in H_0 e H_i , i quali diventano essi stessi operatori agenti su uno stato $|\Psi\rangle$ e i vincoli dinamici (3.20) si trasformano in equazioni quantistiche per lo stato $|\Psi\rangle$, cioè si ha

$$\begin{cases} \hat{H}_0 |\Psi\rangle = 0 \\ \hat{H}_i |\Psi\rangle = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

L'equazione per $\hat{H}_i$ è un'equazione traslazionale mentre quella per $\hat{H}_0$ è un'equazione di evoluzione temporale. Come già visto il vincolo hamiltoniano seleziona, dal principio, fra tutti gli stati, quelli fisicamente permessi e questo è fondamentale per ciò che sarà detto in seguito. È importante, adesso, specificare la rappresentazione adottata per gli operatori. Scegliamo quella che si chiama *rappresentazione metrica*:

$$\hat{h}_{ij} = h_{ij}, \quad \hat{\pi} = -i \frac{\delta}{\delta N}, \quad \hat{\pi}^i = -i \frac{\delta}{\delta N_i}, \quad \hat{\pi}^{ij} = -i \frac{\delta}{\delta h_{ij}}. \quad (3.29)$$

Sostituendo questi operatori in H_0 e H_i si ottiene la forma esplicita

$$\hat{H}_0 |\Psi\rangle = \left[16\pi G_N \nabla^2 + \frac{\sqrt{h}^{(3)} R}{16\pi G_N} \right] \Psi[h_{ij}(\mathbf{x})] = 0 \quad (3.30)$$

$$\hat{H}_i |\Psi\rangle = 2ih_{ij} D_k \frac{\delta}{\delta h_{jk}} \Psi[h_{ij}(\mathbf{x})] = 0 \quad (3.31)$$

dove $^{(3)}R$ è la curvatura intrinseca tridimensionale, G_N è la costante di Newton mentre ∇^2 è

$$\nabla^2 \equiv G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} + \gamma_{ij} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \quad (3.32)$$

con γ_{ij} dipendente dall'ordinamento dei fattori. D_l è la derivata covariante nella metrica h_{ij} . Con questa rappresentazione la $|\Psi\rangle$ diventa un funzionale delle configurazioni metriche h_{ij} , del tipo $\Psi[h_{ij}(\mathbf{x})]$, il quale descrive lo stato del campo gravitazionale come vettore nello spazio delle configurazioni metriche. L'equazione $\hat{H}_0 |\Psi\rangle = 0$ è detta equazione di WDW e la sua soluzione $\Psi[h_{ij}(\mathbf{x})]$ prende il nome di funzionale d'onda dell'Universo [4]. Uno degli obiettivi principali della Cosmologia Quantistica è proprio quello di determinare le condizioni al contorno per tale soluzione, ma questo lo vedremo nel capitolo dedicato al limite semiclassico della Meccanica Quantistica. Siamo giunti dunque ad una formulazione hamiltoniana ed operatoriale della Relatività Generale.

Si potrebbe dimostrare che anche la formulazione hamiltoniana della Relatività Generale è covariante e lo si potrebbe fare attraverso lo studio delle (3.28).

In particolare, l'equazione per il superamento ci consentirebbe di ricavare che il funzionale d'onda $\Psi[h_{ij}]$ dipende solo dalla 3-geometria e non dalla scelta delle coordinate usate per descriverla, cioè il funzionale d'onda deve essere lo stesso per due 3-metriche connesse da un diffeomorfismo, ma vale anche il viceversa. Questo perchè è stato dimostrato (in letteratura, non in questa trattazione) che sono le H_i ad essere i generatori dei diffeomorfismi in M^3 . È invece lo studio dell'equazione di WDW a dimostrare l'invarianza per riparametizzazioni temporali [5].

Abbiamo detto che $\Psi[h_{ij}]$ è un funzionale d'onda ma non abbiamo ancora definito qual è il suo dominio. Se ci mettiamo nella situazione in cui non consideriamo i termini che tengono conto della costante cosmologica e dei campi di materia, allora tale funzionale dipenderà soltanto da h_{ij} e il suo dominio sarà quindi l'insieme delle 3-metriche possibili, a meno dei loro diffeomorfismi. Tale insieme costituisce uno spazio delle configurazioni per $\Psi[h_{ij}]$ che viene chiamato "spazio delle configurazioni dell'Universo" e viene denotato dal simbolo $S = G/Diff(M^3)$, dove G è l'insieme di tutte le possibili 3-metriche. Una grande parte delle difficoltà che si riscontrano nel maneggiare questa teoria è dovuto all'infinito-dimensionalità del superspazio. Ogni punto del superspazio è associato ad una geometria tridimensionale e la figura 3.2 ci può aiutare a visualizzarne la sua struttura: abbiamo scelto di prendere 6 punti nel superspazio che sono stati chiamati A, B, C, D, E e B' , i quali sono stati scelti per darci un'idea di cosa significa muoverci nel superspazio attraverso lo spazio, attraverso il tempo o attraverso entrambi. Come si può vedere, per ogni punto tra i primi 5 scritti è stato definito un taglio a $t = costante$ e pertanto una singola superficie nel superspazio, mentre nel caso di B' non si ha una singola configurazione spaziale ma un'evoluzione della configurazione al variare del tempo, il quale è il parametro affine. Con lo scopo di continuare la caratterizzazione del superspazio diamo solo un primo sguardo al modo in cui si appropria il problema dell'infinito-dimensionalità dello stesso. Se sono presenti simmetrie, ossia dei vincoli, il numero delle possibili 3-geometrie si riduce e quindi il funzionale d'onda dell'Universo non agisce più sul superspazio ma su un suo sottospazio a cui viene dato il nome di minisuperspazio. È possibile che le simmetrie siano in numero sufficiente a ridurre le dimensioni del superspazio fino a renderlo finito-dimensionale. Questo avrà, ovviamente, delle conseguenze che, come vedremo in seguito, saranno sia positive che negative. Come fatto in precedenza si può generalizzare il tutto introducendo la costante cosmologica e i campi della materia. Il superspazio sarà, in tal caso, costituito da tutte le possibili 3-geometrie e le configurazioni locali dei campi della materia. Adottando anche per π^ϕ la rappresentazione metrica avremo

$$\hat{\pi}^\phi \equiv -i \frac{\delta}{\delta \phi} \quad (3.33)$$

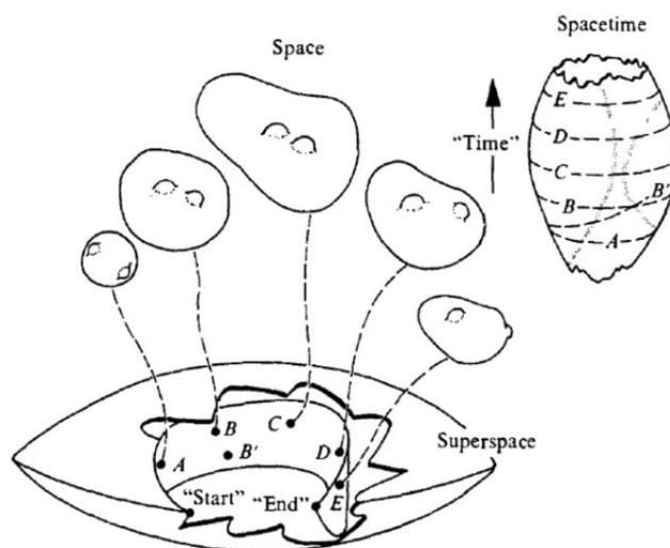


Figura 3.2: raffigurazione del superspazio.

da cui si ottiene sia la generalizzazione quantistica del vincolo sul supermomento, sia l'equazione di WDW, entrambe con costante cosmologica Λ e con i campi della materia ϕ . Dal momento che il superspazio viene ampliato quando si tiene conto anche di Λ e ϕ , la funzione d'onda dell'Universo diventa $\Psi = \Psi[h_{ij}(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})]$.

Capitolo 4

L'interpretazione della funzione d'onda

Nessun metodo di quantizzazione della gravità è esente da problemi e, purtroppo, anche questo metodo non fa eccezione a questa regola. Come abbiamo visto alla fine del capitolo precedente, la procedura canonica porta alla definizione di un funzionale d'onda che agisce su uno spazio delle configurazioni detto superspazio, il quale altro non è che l'insieme di tutte le 3-geometrie possibili per l'Universo. In questa situazione l'Universo è l'analogo dell'onda-particella in Meccanica Quantistica standard e l'equazione di WDW ha per esso, invece, lo stesso ruolo dell'equazione di Schrödinger.

Già nella Meccanica Quantistica standard sorse il problema, ancora non risolto, del collasso della funzione d'onda e fu per questo motivo che si arrivò ad usare un termine che raramente è legittimo nella scienza: interpretazione. Alla funzione d'onda fu data l'interpretazione di Copenaghen e il meccanismo del collasso non fu mai chiarito. Data la struttura matematica analoga, quando siamo in presenza dell'equazione di WDW emerge lo stesso problema, ma in un modo profondamente diverso.

Nella Meccanica Quantistica standard la dinamica del sistema è descritta dall'equazione di Schrödinger che nel caso di una particella sottoposta ad un campo esterno risulta

$$[-\nabla^2 + U(x)]\Psi(x, t) = i\partial_t\Psi(x, t). \quad (4.1)$$

Tale equazione ammette un'equazione di continuità, analogamente al caso classico: se Ψ_1 e Ψ_2 sono due soluzioni dell'equazione di Schrödinger, abbiamo che

$$\partial_t(\Psi_1 * \Psi_2) + \nabla \cdot \mathbf{J}_{12} = 0 \quad (4.2)$$

dove

$$\mathbf{J}_{12} \equiv \frac{i}{2}\Psi_1 * \bar{\nabla}\Psi_2 = \frac{i}{2}(\Psi_1 * \nabla\Psi_2 - \Psi_2 * \nabla\Psi_1). \quad (4.3)$$

Si può definire, inoltre, un prodotto interno

$$(\Psi_1, \Psi_2) \equiv \int d^3x \Psi_1 \Psi_2 \quad (4.4)$$

avente la proprietà di essere definito positivo

$$(\Psi, \Psi) \geq 0 \quad (4.5)$$

ed indipendente dal tempo. Da questo consegue che le funzioni d'onda, soluzioni dell'equazione di Schrödinger ed a quadrato sommabile, formano uno spazio di Hilbert infinito dimensionale. È possibile, pertanto, interpretare (Ψ, Ψ) come la densità di probabilità di localizzare la particella nel suo spazio delle configurazioni, poichè il prodotto scalare è definito positivo e le funzioni sono normalizzate ad uno. Nell'equazione di Wheeler-DeWitt sorge però il seguente problema, che è la radice dell'esigenza di una nuova interpretazione della funzione d'onda, e cioè: se da una parte si continua ad avere un'equazione di continuità, che però assume la forma

$$\nabla \cdot J_{12} = 0 \quad (4.6)$$

(dove ora ∇ è il supergradiente, definito come l'insieme delle derivate funzionali nel superspazio), dall'altra il prodotto scalare non è più definito positivo, anche se ancora conservato. Non avendo più un prodotto scalare definito positivo abbiamo perso la nozione di spazio di Hilbert, ma non solo, poichè nella Meccanica Quantistica standard è il prodotto scalare che fornisce le probabilità di trovare il sistema in un certo stato, le quali possono risultare negative nella nostra situazione e questo è assurdo. Alcuni problemi della Meccanica Quantistica standard furono risolti passando ad una teoria di seconda quantizzazione, ma nel nostro caso questo procedimento non è possibile poichè la Relatività Generale è già una teoria di campo. Sono diversi, e non li elencheremo, i tentativi che sono stati fatti per risolvere questo problema, ma in tutti i casi non si è riusciti a fare progressi. In questa situazione non ci resta che costruire l'informazione statistica secondo una nuova prospettiva, che tenga conto dell'eccezionalità del sistema Universo. L'Universo, da un punto di vista quantomeccanico, è un sistema letteralmente unico che, per definizione, non ammette un apparato di misura esterno con cui interagire e questo lo distingue da ogni altro sistema considerato normalmente dalla Meccanica Quantistica, la quale possiede alcune tra le sue proprietà maggiormente caratterizzanti proprio in ciò che accade nel collasso della funzione d'onda quando interagisce con un apparato esterno. Occorre quindi fornire una nuova informazione statistica per la funzione d'onda (dell'Universo) e chiarirne il significato. Tale nuova informazione non può che essere espressa, per ora, tramite una nuova interpretazione, dal momento che la Meccanica Quantistica standard si poggia essa stessa su un'interpretazione, quella di Copenaghen. Molte sono le

interpretazioni che sono state proposte, ma a noi interessa principalmente quella di Hartle poichè porta ad un notevole risultato quando la si unisce al teorema di Noether per le simmetrie, cosa che vedremo in seguito. Prima di parlare dell'interpretazione di Hartle occorre introdurre un'altra interpretazione, chiamata "a molti mondi" (Many Worlds), di Everett (1957)-Wheeler (1968), alternativa a quella di Copenhagen. L'interpretazione di Copenhagen separa i processi descritti dall'equazione di Schrödinger dai processi di misura che hanno bisogno di un apparato classico e crea una frattura tra i due tipi di fenomeni tale che essi non sono riconducibili in alcun modo l'uno all'altro. Analizziamo matematicamente quest'ultima affermazione. Dato un sistema S che possa essere espresso come una sovrapposizione lineare di un insieme completo di autostati di un osservabile K (con spettro discreto di autovalori K_m) del tipo

$$|\phi^S\rangle = \sum_m k_m |\phi_m^S\rangle, \quad (4.7)$$

chiamiamo $|\phi^S\rangle$ la sua funzione d'onda. Sia, inoltre $|\phi^K[\dots]\rangle$ la funzione d'onda corrispondente a un apparato di misura K , nel suo stato iniziale, per l'osservabile precedentemente scritta. Quando vogliamo effettuare una misura, cioè quando lasciamo i due sistemi liberi di interagire, l'interpretazione standard assume che il risultato del processo di misura sia il collasso della funzione d'onda in un autostato, rappresentato da

$$|\phi_m^S\rangle |\phi^K[K_m]\rangle, \quad (4.8)$$

cioè l'apparato introduce a priori la probabilità $P_m = |k_m|^2$ di trovare un valore k_m dell'osservabile. Al contrario, l'interpretazione a "Molti Mondi" presuppone che tutti i processi siano descrivibili tramite l'equazione di Schrödinger senza distinguere i sistemi quantistici dagli apparati classici. Suppone, inoltre, che una sovrapposizione del tipo

$$\sum k_m |\phi_m^S\rangle |\phi^K[K_m]\rangle \quad (4.9)$$

descrive, contemporaneamente, un insieme di esperimenti e il vettore (4.7) sia in corrispondenza con un insieme di oggetti. Si suppone, ancora, che esistano molti "Universi", che da ora chiameremo "Mondi", e che la sovrapposizione (4.9) descriva simultaneamente i risultati di esperimenti eseguiti in differenti Mondi e, a ciascun Mondo e al risultato di un esperimento fatto in esso, corrisponda uno dei termini della sovrapposizione (4.7). Quindi, da una parte il vettore $|\phi^S\rangle$ caratterizza solo un insieme di oggetti, ciascuno dei quali situato nel suo Mondo, dall'altra parte, in un Mondo fissato, la Teoria Quantistica descrive un oggetto unico sul cui comportamento incidono gli oggetti corrispondenti degli altri Mondi. Possiamo quindi affermare che in ogni Mondo il sistema è effettivamente in

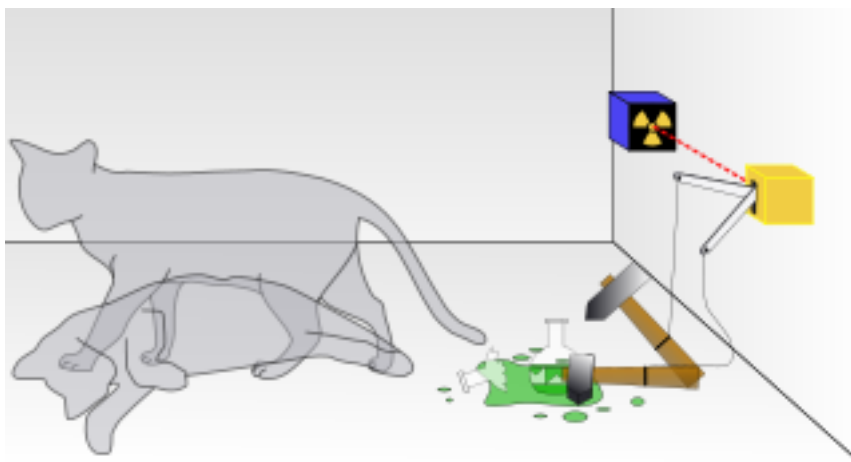


Figura 4.1: il gatto nella scatola secondo la MWI.

uno stato $|\phi_m^S\rangle$. Se si assume come misura statistica di un Mondo "tipico" dell'insieme quel particolare Mondo che contribuisce in modo dominante alla norma di $|\phi^S\rangle$, ovvero postulando che $|k_m|^2$ sia proporzionale al numero di Mondi di tipo m , è possibile riprodurre i risultati dell'interpretazione standard. Nella sostanza, i problemi legati alla MWI non sono soltanto di carattere matematico e interpretativo, ma esistono anche problemi di definizione. Questo poichè, così come la Meccanica Quantistica standard mise in discussione alcune delle strutture logiche più fondamentali e scontate del pensiero umano, che il genere umano tramandava da secoli, come la visione di un Universo deterministico, allo stesso modo la MWI ci mette davanti ad una situazione che, se venisse confermata empiricamente, sarebbe estremamente controintuitiva.

Vediamo ora come definire, prima con le parole e poi matematicamente, alcuni enti caratterizzanti di questa teoria:

1) Cos'è un Mondo?

Un Mondo è la totalità degli oggetti macroscopici (stelle, città, persone..) in uno stato classico ben descritto. Di conseguenza, detta $|\phi\rangle_{obj}$ la funzione d'onda di un oggetto, lo stato quantistico di un Mondo è

$$|\phi\rangle_{world} = |\phi\rangle_{obj_1} \dots |\phi\rangle_{obj_N} |\Psi\rangle, \quad (4.10)$$

dove $|\Psi\rangle$ è la funzione degli oggetti non facenti parte del Mondo. Una $|\phi_{world}\rangle$ differisce da un'altra se tra loro differisce almeno una $|\phi_{obj}\rangle$.

2) Cos'è l'Universo?

Un Mondo non può essere definito come tutto ciò che esiste poichè tutto ciò che esiste è contenuto nell'Universo, che è unico, e pertanto:

$$| \phi_{universe} \rangle = \sum_i \alpha_i | \phi_{word_i} \rangle. \quad (4.11)$$

3) Chi sono io?

Io sono un oggetto, proprio come la Terra, un gatto o un sasso. Se io mi chiamassi, per esempio, Alberto, non potrei dire che "io" e "Alberto" siamo la stessa cosa: io sarei solo quel particolare Alberto che percepisce il trascorrere degli eventi nel proprio Mondo e che risulta diverso dagli altri Alberto che ogni volta si splittano e percepiscono il loro [6].

Un buon modo per familiarizzare con questa nuova interpretazione potrebbe essere quello di chiederci cosa accadrebbe al gatto di Schrödinger se egli avesse proposto questo esperimento per dibattere sulla MWI anzichè sull'interpretazione di Copenaghen (figura 4.1); ebbene nella MWI non esiste un solo osservatore che apre la scatola e osserva se il gatto è vivo o meno, ma ne esistono due: uno che lo troverà vivo ed uno che, purtroppo, lo troverà morto. Questo perchè in MWI l'esperimento causa lo split dei mondi.

Questa interpretazione ha il vantaggio di rinunciare ad un apparato esterno di misurazione, però, in assenza di un vero significato statistico rigoroso matematicamente per la funzione d'onda dell'Universo, non può ancora essere considerata autoconsistente. In molti si sono espressi al riguardo, cercandolo, e così si esprime Hartle: la funzione d'onda esprimerebbe solo "correlazioni" tra variabili dinamiche dell'Universo. Più precisamente, il criterio minimale di Hartle sostiene che i picchi di $|\phi|^2$ indicano, nel superspazio, "correlazioni" (termine usato da Hartle stesso) effettive delle variabili dinamiche, mentre la mancanza di questi picchi (le depressioni) indicano l'assenza di correlazioni. Per Hartle questa è la sola ed unica informazione contenuta nella funzione d'onda dell'Universo [7]. Apparentemente sembra una definizione vaga, ma come mostreremo acquisisce un significato più chiaro nel limite semiclassico. Questo criterio sembra mancare, inoltre, del carattere statistico della previsione, che era l'obiettivo principale, ma Hartle sostenne che ciò è dovuto al fatto che l'Universo nel suo insieme non è un sistema standard. Come vedremo, quando si unisce il criterio minimale di Hartle alle simmetrie di Noether si ottiene un vero e proprio teorema.

Capitolo 5

Il limite semiclassico

Per limite semiclassico si intende una proposta di teoria della Gravità Quantistica in cui i campi di materia possono essere trattati come quanti e il campo gravitazionale come classico. L'analisi di ciò che accade in questa situazione è di grande rilevanza per quelli che sono gli scopi della Cosmologia Quantistica: risolvere il problema delle condizioni al contorno per la nascita dell'Universo ed avere un criterio interpretativo che ci permetta di fare delle previsioni. Data la nostra incapacità di ottenere dati precedenti all'era di Planck, tutte le osservazioni si basano su un Universo classico, e pertanto il limite semiclassico si presta bene a fare da raccordo tra l'era di Planck e l'era in cui l'Universo è osservabile. Prima di vedere come utilizzare il limite semiclassico in questa nuova versione della Meccanica Quantistica spieghiamo qual'è l'idea alla base nella Meccanica Quantistica standard. Consideriamo una particella sottoposta a un potenziale del tipo

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } |x| \leq L \\ 0 & \text{se } |x| > L \end{cases} \quad (5.1)$$

che sarà pertanto descritta dall'equazione di Schrödinger stazionaria

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \right\} \psi(x) = 0; \quad (5.2)$$

tale equazione in questo caso può essere risolta poichè il potenziale $V(x)$ è particolarmente semplice da trattare, ed in genere può essere risolta solo per potenziali altrettanto semplici, pertanto il più delle volte, per esempio quando $V(x)$ ha una forma generica, si ricorre a metodi di approssimazione appropriati al caso in questione. Nella situazione in cui il potenziale sia lentamente variabile si utilizza l'approssimazione semiclassica sviluppata da Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB), che ci dà una descrizione del sistema quantistico nel limite classico in cui gli effetti quantistici sono irrilevanti. Bisogna, innanzitutto, definire cosa significa "lentamente variabile". Il ragionamento alla base di questa trattazione poggia

su un parallelismo con l'Ottica Classica. È noto, infatti, che in Ottica Classica la riflessione dei raggi luminosi in un mezzo con indice di rifrazione variabile è trascurabile se la lunghezza d'onda cambia di una piccola frazione all'interno di una distanza pari alla lunghezza d'onda stessa, cioè se l'indice di rifrazione in una distanza λ varia di poco. In termini matematici, detta $\delta\lambda$ la variazione della lunghezza d'onda e sia δx una distanza si ha che

$$\delta\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\delta x \quad (5.3)$$

Ponendo $\delta x = \lambda$ si trova che non ci sono riflessioni significative quando

$$|\delta\lambda| = \left| \frac{\partial\lambda}{\partial x}\lambda \right| \ll \lambda \Rightarrow \left| \frac{\partial\lambda}{\partial x} \right| \ll 1. \quad (5.4)$$

Lo stesso ragionamento si applica per la parte riflessa di una funzione d'onda che incontra un potenziale lentamente variabile, con l'unica differenza che in questo caso la lunghezza d'onda è quella di De Broglie, $\lambda = \frac{h}{p}$, e quindi la condizione per l'assenza di onda riflessa si tramuta in

$$\left| \frac{\partial\lambda}{\partial x} \right| = \left| \frac{h}{p^2} \frac{\partial p}{\partial x} \right| \ll 1. \quad (5.5)$$

Sostituendo $p^2 = 2m|E - V|$ si ha

$$\frac{hm|\partial V/\partial x|}{(2m|E - V|)^{3/2}} \ll 1 \Rightarrow \frac{\lambda|\partial V/\partial x|}{2|E - V|} \ll 1 \quad (5.6)$$

e pertanto possiamo affermare che l'assenza di onda riflessa in Meccanica Quantistica si ha a patto che la variazione del potenziale entro una distanza pari alla lunghezza d'onda di De Broglie è piccola rispetto all'energia cinetica $T = E - V$. Queste sono le condizioni per l'approssimazione semiclassica o WKB. Dalla relazione (5.5) possiamo osservare che la validità dei concetti di fisica classica è una caratteristica esclusiva di quei sistemi fisici aventi

$$h \ll p^2 \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{-1}, \quad (5.7)$$

che significa che il mondo macroscopico ha queste caratteristiche poichè h è molto piccola rispetto alle strutture da cui è composta la nostra realtà. Potremmo, però, immaginare un mondo in cui h assume un valore abbastanza grande da sperimentare effetti quantistici anche nel macroscopico. Quando il potenziale è costante la funzione d'onda risulta essere

$$\psi = \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right), \quad p = \sqrt{2m(E - V_0)}. \quad (5.8)$$

Riscrivendo ψ come

$$\psi = \exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right), \quad (5.9)$$

con S funzione di x , possiamo vedere cosa succede se invece $V(x)$ è lentamente variabile: ci aspettiamo che $S \simeq px$. Nonostante ciò, una stima migliore può essere ottenuta approssimando S tramite un'espansione in serie di potenze di $\hbar$:

$$S \equiv S_0(x) + \hbar S_1(x) + \frac{\hbar^2}{2} S_2(x) + \dots \quad (5.10)$$

Questa serie non converge ma è un'espansione asintotica della funzione S [8]; questo significa che dato un numero finito di termini è sempre possibile trovare un valore abbastanza piccolo di $\hbar$ tale che la differenza tra la somma finita ed il valore vero di S sia arbitrariamente piccola; tuttavia, aggiungendo termini alla serie, questa potrebbe divergere dal vero valore di S , motivo per cui in genere si prendono solo i primi 2 o 3 termini della serie. Nel caso di un potenziale costante, come già detto, $S_0 = px$ e $S_1, S_2, \dots, S_n$ sono tutti nulli, pertanto se ho un potenziale lentamente variabile riesco ad approssimare bene il caso di potenziale costante solo se risulta che i rapporti $\frac{\hbar S_1}{S_0}, \frac{\hbar S_2}{2 S_1}, \dots, \frac{\hbar S_n}{n S_{n-1}}$ sono piccoli. Questo avviene se $\hbar$ è piccola, e se $\hbar$ lo è allora siamo nel limite semiclassico. Il calcolo della somma S non è difficile ma è laborioso, pertanto sarà riportato solo il ragionamento alla base. Inserendo la funzione d'onda (5.9) nell'equazione (5.2), sostituendo S con l'espansione e raccogliendo i termini aventi la stessa potenza di $\hbar$ si perviene ad un'equazione avente la caratteristica che ogni coefficiente di potenza di $\hbar$ deve annullarsi, ottenendo pertanto il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS_0}{dx} \right)^2 + V(x) - E = 0, \quad (5.11)$$

$$\frac{dS_0}{dx} \frac{dS_1}{dx} - \frac{i}{2} \frac{d^2 S_0}{dx^2} = 0, \quad (5.12)$$

$$\frac{dS_0}{dx} \frac{dS_2}{dx} + \left(\frac{dS_1}{dx} \right)^2 - i \frac{d^2 S_1}{dx^2} = 0. \quad (5.13)$$

Tali equazioni possono essere risolte in successione: possiamo trovare S_0 dalla prima ed usarlo per trovare S_1 nella seconda e così via, arrivando a trovare la forma di ψ . Una notevole conseguenza di questa trattazione è la dimostrazione che l'effetto tunnel è possibile per potenziali di forma arbitraria.

Vediamo adesso come trattare la situazione di approssimazione semiclassica per la nostra formulazione non standard della Meccanica Quantistica. Poichè l'equa-

zione di WDW (3.30) può essere riscritta come

$$\left(\frac{1}{m_p^2} \nabla^2 - m_p^2 U \right) \Psi[h_{ij}(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})] = 0, \quad (5.14)$$

dove si è posto $m_p^2 \simeq 1/16\pi G_N$ ed

$$U = \sqrt{h}^{(3)} R - 16\pi G_N \sqrt{h} V(\varphi), \quad (5.15)$$

con $V(\varphi)$ che è un termine associato alle condizioni presenti alla nascita dell'Universo, cioè al tempo di validità della Cosmologia Quantistica. Il limite classico per la funzione d'onda dell'Universo può essere identificato utilizzando, come parametro per controllare l'espansione, m_p^{-2} , questo perchè $m_p^2 = \hbar c/G$. Rappresentiamo la funzione d'onda nella forma

$$\Psi[h_{ij}(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})] = e^{im_p^2 S}, \quad (5.16)$$

dove

$$S \equiv S_0 + m_p^{-2} S_1 + O(m_p^{-4}) \quad (5.17)$$

è un'azione. Inserendo la (5.16) nella (5.14) ed uguagliando i coefficienti delle potenze identiche di m_p , si ottiene l'equazione di Hamilton-Jacobi per S_0

$$\nabla S_0 \cdot \nabla S_0 + U = 0. \quad (5.18)$$

Si può mostrare che, dove è valida l'approssimazione WKB all'ordine più basso, la soluzione della (5.14) è

$$\Psi \approx e^{im_p^2 S_0}, \quad (5.19)$$

dove S_0 è reale e rappresenta la fase dei modi WKB oscillanti. Si può dimostrare anche che la funzione d'onda risulta fortemente piccata intorno attorno alla regione dello spazio delle fasi definita dalle equazioni

$$\pi^{ij} = m_p^2 \frac{\delta S_0}{\delta h_{ij}}, \quad \pi^\phi = m_p^2 \frac{\delta S_0}{\delta \phi}, \quad (5.20)$$

che, si potrebbe dimostrare tramite l'equazione di Hamilton-Jacobi per S_0 , essere integrali primi delle equazioni di campo classiche, ovvero soluzioni di queste ultime [5].

È proprio grazie a quest'ultimo risultato che possiamo dire di aver raggiunto il nostro scopo, il quale era, ricordiamolo, avere delle condizioni al contorno per la nascita dell'Universo; vediamo perchè.

Bisogna fare una premessa: la soluzione generale delle equazioni di campo richiede $2n - 1$ parametri arbitrari mentre, data una certa S_0 , la soluzione delle (5.20)

ne richiede n ; questo vuol dire che la funzione d'onda è piccata intorno ad un sottoinsieme della soluzione generale. Con in mente questa premessa possiamo affermare che se noi imponiamo le condizioni al contorno all'equazione di WDW, e quindi troviamo una soluzione particolare, nella regione in cui questa oscilla con grandi valori di fase si ottiene una funzione di Hamilton-Jacobi, S_0 , la quale a sua volta seleziona un sottoinsieme delle soluzioni classiche. Vediamo quindi che le condizioni al contorno per la funzione d'onda determinano effettivamente le condizioni iniziali dell'Universo classico.

Capitolo 6

Il Minisuperspazio

Nei capitoli precedenti abbiamo introdotto e caratterizzato lo spazio delle configurazioni del funzionale d'onda, detto superspazio, il quale è infinito-dimensionale. Risolvere l'equazione di WDW diventa, pertanto, estremamente complicato e bisogna, quindi, elaborare una strategia che ci permetta di ricavare informazioni anche se l'equazione è difficile da trattare. Un approccio molto utile a questo scopo consiste nel congelare alcuni gradi di libertà a seconda del sistema in esame, lavorando così su un sottospazio, finito-dimensionale, del superspazio detto minisuperspazio. Un esempio molto semplice di quest'approccio, che sarà discusso nel dettaglio più avanti, è quello in cui si cerca di descrivere un Universo omogeneo ed isotropo usando come unico grado di libertà il fattore di scala $a(t)$. Il metodo dei minisuperspazi, tuttavia, deve confrontarsi col problema della violazione del principio di indeterminazione di Heisenberg, in quanto, congelando alcuni gradi di libertà, non tiene conto delle loro fluttuazioni quantistiche. È ovvio che non si può pensare di descrivere correttamente un sistema quantistico violando tale principio, pertanto si interpretano questi come dei modelli in grado di conservare soltanto alcune caratteristiche del fenomeno in esame. A questi modelli viene dato il nome di toy models. Nel corso della storia ci si è interrogati sul considerare questa come una vera e propria teoria fisica, nonostante sia stata spesso in grado di fare predizioni: per esempio le onde gravitazionali e l'epoca inflazionaria [9] vengono descritte anche tramite perturbazioni di modelli a minisuperspazio aventi determinate condizioni iniziali.

Vediamo ora un esempio di minisuperspazio, quello a cui si era accennato in precedenza. Se consideriamo un Universo omogeneo ed isotropo, descritto dalla metrica di FLRW, il superspazio si riduce ad un minisuperspazio monodimensionale in cui l'unica variabile è $a(t)$. Questo significa che lo spazio delle configurazioni è $0 < a < +\infty$. Il più semplice modello di cosmogenesi quantistica è quello che prevede una nascita spontanea, dal "nulla", dell'Universo per effetto tunnel. Si

può dimostrare che solo un Universo chiuso può nascere per effetto tunnel [11] e quindi si pone $k = 1$. Si prende come unico contributo a ρ la densità di energia del vuoto ρ_{vac} e, poichè si ha che $p = -\rho_{vac}$, con

$$\Lambda \equiv 8\pi G_N \rho_{vac}, \quad (6.1)$$

allora la (2.6) diventa

$$\dot{a}^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}a^2\right) = 0. \quad (6.2)$$

Poichè $\rho_{vac} = \text{costante}$ allora

$$\frac{d\rho_{vac}}{da} = 0 \quad (6.3)$$

e quindi possiamo sfruttare la soluzione di de Sitter per $\rho(a)$ costante o lentamente variabile

$$a(t) = a_0 \cosh(a_0^{-1}t) \quad (6.4)$$

dove

$$a_0 = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}. \quad (6.5)$$

Inserendo la (6.5) nella (2.6) si ottiene

$$\dot{a}^2 + \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) = 0. \quad (6.6)$$

Possiamo ora procedere alla quantizzazione canonica. Così come nella Meccanica Quantistica si introducono gli operatori

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \hat{x} = x \\ p &\rightarrow \hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial x} \\ E &\rightarrow \hat{E} = i \frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

ottenendo la quantizzazione canonica, allo stesso modo dobbiamo cercare degli analoghi per l'equazione di Einstein (2.6). La (2.6) ha la forma di una "particella" ad Hamiltoniana nulla la cui posizione è data dalla coordinata a , la cui energia cinetica è data dalla "velocità" $\dot{a}$ e la cui energia potenziale è una funzione di a . Dobbiamo trovare un'espressione per il momento coniugato di a per poi sostituirlo. Per determinare la lagrangiana di punto cosmologica consideriamo l'azione gravitazionale con costante cosmologica, ovvero

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda). \quad (6.8)$$

Lo scalare di Ricci in una metrica di tipo FLRW è

$$R = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (6.9)$$

mentre

$$\sqrt{-g}d^4x = 2\pi^2 a^3 dt d^3x. \quad (6.10)$$

Inoltre, poichè

$$\int \ddot{a}a^2 dt = - \int 2a\dot{a}^2 dt, \quad (6.11)$$

inserendo tutti questi risultati nella (6.8), tenendo conto della (6.5) e ricordando che abbiamo posto $k = 1$, otteniamo una nuova forma per l'azione data da

$$S = \frac{3\pi}{4G_N} \int -a\dot{a} + a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) dt, \quad (6.12)$$

pertanto la lagrangiana risulta essere

$$L_{grav} = \frac{3\pi}{2G_N} \left[-\dot{a}^2 a + a \left(\frac{a^2}{a_0^2} \right) \right]. \quad (6.13)$$

Il momento coniugato risulta

$$p_a \equiv \frac{\partial L_{grav}}{\partial \dot{a}} = -\frac{3\pi}{2G_N} \dot{a}a, \quad (6.14)$$

pertanto la (6.2) diventa

$$p_a^2 + \left(\frac{3\pi}{2G_N} \right)^2 a^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) = 0, \quad (6.15)$$

da cui, quantizzando, si ottiene

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \left(\frac{3\pi}{2G_N} \right)^2 a^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) \right] \psi(a) = 0. \quad (6.16)$$

La (6.16) altro non è che l'equazione di WDW nel caso di Universi chiusi, omogenei ed isotropi, descritti dalla metrica di FLRW. In Meccanica Quantistica standard l'operatore posizione e quello momento non commutano, infatti

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar, \quad (6.17)$$

il che implica il principio di indeterminazione di Heisenberg

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2. \quad (6.18)$$

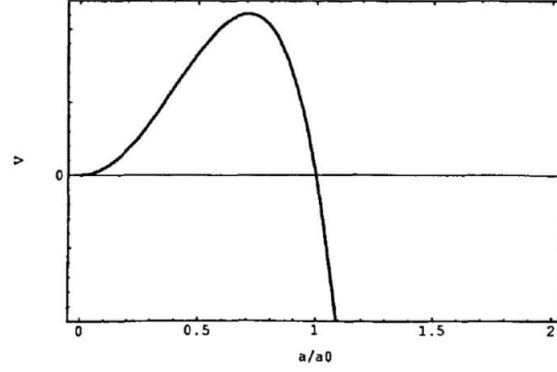


Figura 6.1: Grafico del potenziale dell'equazione di WDW nella metrica di FLRW.

Anche per a e p_a si può scrivere un principio di indeterminazione in quanto

$$[\hat{p}_a, \hat{a}] = -i, \quad (6.19)$$

da cui

$$\Delta p_a \Delta a \geq 1/2. \quad (6.20)$$

Nella Meccanica Quantistica standard il principio di indeterminazione ha portato alla perdita del concetto di traiettoria classica che è stato sostituito dalla probabilità di trovare, a un certo istante di tempo, la particella in un certo punto. Nella metrica di FLRW un punto appartenente allo spaziotempo è descritto da una 3-geometria ad un certo istante. In questa situazione, avere un equivalente del principio di indeterminazione significa avere un'incertezza sulla 3-geometria dell'Universo. Questo si può dimostrare essere vero non solo nell'esempio di minisuperspazio esposto ma in generale per tutti i superspazi poichè, come visto, la forma più generale dell'equazione di WDW si ricava a partire dal formalismo ADM che sfrutta, anch'esso, una decomposizione 3+1 della metrica. Quindi, alla scala di Planck, le fluttuazioni quantistiche della 3-geometria ci impediscono di trovare una traiettoria precisa nel superspazio e pertanto il concetto classico di spaziotempo non è altro che un'approssimazione classica ottenuta quando l'Universo non è più quantistico. Quando l'Universo è quantistico, e quindi la sua 3-geometria è affetta da incertezza, allo spaziotempo diamo il nome di "schiuma quantistica".

Riguardo questi risultati John Wheeler si esprime affermando che "Queste considerazioni rivelano che i concetti di spaziotempo, e di tempo stesso, non sono idee primarie ma secondarie nella struttura della fisica teorica. Questi concetti sono validi in approssimazioni classiche. Essi non hanno nessun si-

gnificato o applicazione quando le circostanze rendono gli effetti della quanto-geometrodinamica rilevanti. Di conseguenza dobbiamo rinunciare all'idea della natura secondo cui ogni evento passato, presente o futuro, occupi una posizione predeterminata nel grande catalogo chiamato "spaziotempo". Non c'è uno spaziotempo, non c'è il tempo, non c'è un prima, non c'è un dopo. La domanda cosa accade dopo non ha significato."

Il potenziale a cui è sottoposta la particella nell'equazione (6.16) è

$$V(a) = \left(\frac{3\pi}{2G_N} \right)^2 a_0^2 \left(\frac{a^2}{a_0^2} - \frac{a^4}{a_0^4} \right), \quad (6.21)$$

il quale delimita una regione classicamente proibita nell'intervallo $0 < a < a_0$ (figura 6.1). Imponendo le condizioni al contorno per $\psi(a)$ potremmo trovarne la sua forma. Fu così che Vilenkin dimostrò che l'Universo potrebbe essere nato per effetto tunnel, imponendo opportune condizioni al contorno che restituiscono una funzione d'onda ψ_T detta funzione d'onda di tunneling di Vilenkin [10].

Capitolo 7

Le simmetrie di Noether e il Criterio di Hartle

In questo capitolo vogliamo, come più volte anticipato, mostrare come quella di Hartle potrebbe non essere soltanto un'interpretazione ma costituire un vero e proprio criterio. Ricordiamo che Hartle sostenne che l'informazione contenuta nella funzione d'onda dell'Universo è la seguente: se il suo modulo quadro è piccato in una certa zona dello spazio delle configurazioni allora siamo in presenza di correlazione tra le variabili mentre se non lo è allora non c'è nessuna correlazione. Vediamo come dimostrare matematicamente quest'affermazione.

Consideriamo una lagrangiana L , la quale è una funzione definita nello spazio tangente a quello delle configurazioni $TQ \equiv \{q_i, \dot{q}_i\}$, e consideriamo il campo vettoriale X così definito

$$X = \alpha^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{\alpha}^i(q) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}, \quad (7.1)$$

dove il punto indica derivate temporali. L_X costituisce il generatore infinitesimale del gruppo a un parametro e in queste condizioni vale la proprietà

$$L_X f = X f \quad (7.2)$$

e pertanto

$$L_X L = X L = \alpha^i(q) \frac{\partial L}{\partial q^i} + \dot{\alpha}^i(q) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (7.3)$$

Dal momento che l'esistenza di simmetrie si dimostra tramite la condizione

$$L_X f = 0, \quad (7.4)$$

allora imponiamo che

$$L_X L = 0, \quad (7.5)$$

le cui soluzioni implicano che esistano una o più costanti del moto per L e quindi che può essere usato il teorema di Noether [12]. Infatti, considerando le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad (7.6)$$

si dimostra facilmente che

$$\frac{d}{dt} \left(\alpha^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = L_X L \quad (7.7)$$

poichè

$$\frac{d}{dt} \left(\alpha^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = \dot{\alpha}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \alpha^i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right); \quad (7.8)$$

ma dalla (7.6) si ha che

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}, \quad (7.9)$$

da cui

$$\frac{d}{dt} \left(\alpha^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = \alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \dot{\alpha}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = L_X L \quad (7.10)$$

e quindi, se la (7.5) vale, allora

$$\Sigma_0 = \alpha^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (7.11)$$

In alternativa, potremmo anche definire

$$\theta_L \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i \quad (7.12)$$

e definendo la derivata interna

$$i_X \theta_L = \langle \theta_L, X \rangle, \quad (7.13)$$

ottenere

$$i_X \theta_L = \Sigma_0, \quad (7.14)$$

nel caso in cui valga la (7.5). Applicando una trasformazione sul campo vettoriale X otteniamo

$$\tilde{X} = (i_X dQ^K) \frac{\partial}{\partial Q^K} + \left[\frac{d}{dt} (i_X dQ^K) \right] \frac{\partial}{\partial \dot{Q}^K}. \quad (7.15)$$

Se X ha una simmetria anche $\tilde{X}$ ha questa proprietà, quindi è sempre possibile scegliere una trasformazione di coordinate tale che

$$i_X dQ^1 = 1, i_X dQ^i = 0, i \neq 1, \quad (7.16)$$

e quindi

$$\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial Q^1}, \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q^1} = 0. \quad (7.17)$$

È evidente quindi che Q^1 è una coordinata ciclica e che la dinamica si semplifica. Il cambio di coordinate non è mai unico ed una scelta strategica è importante. Inoltre, è possibile anche che vengano trovate più simmetrie e quindi più coordinate cicliche. Questo ci porta a iterare questo processo, ripetendolo identico per ogni nuova lagrangiana finchè o non troviamo più coordinate cicliche o la lagrangiana non diventa puramente cinetica. Il fatto che una coordinata sia ciclica comporta che il momento cinetico coniugato sia costante, cioè

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q^i} = 0 \iff \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^i} = \Sigma_i. \quad (7.18)$$

Viceversa, l'esistenza di un momento coniugato costante significa che deve esistere una variabile ciclica e quindi una simmetria di Noether.

Se n è il numero di dimensioni dello spazio delle configurazioni allora si hanno $\{1 + n(n+1)/2\}$ equazioni alle derivate parziali le cui soluzioni assegnano le simmetrie. Nel formalismo Hamiltoniano, se il momento si conserva, deve valere che

$$[\Sigma_j, H] = 0, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (7.19)$$

e l'Hamiltoniana deve soddisfare la relazione

$$L_\Gamma H = 0, \quad (7.20)$$

così da ottenere una simmetria di Noether. Il vettore Γ è definito come

$$\Gamma = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \ddot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}. \quad (7.21)$$

Se al posto di un generico spazio delle configurazioni consideriamo il modello a minisuperspazi allora queste considerazioni continuano a valere e possono, quindi, essere applicate all'interpretazione della funzione d'onda dell'Universo e al problema della Cosmologia Quantistica. Come già mostrato, dall'opera di quantizzazione risulta:

$$\pi_j \longrightarrow \hat{\pi}_j = -i\partial_j, \quad (7.22)$$

$$H \longrightarrow \hat{H}(q^j, -i\partial_{q^j}). \quad (7.23)$$

La dinamica è data dall'equazione di WDW

$$H \mid \Psi \rangle = 0. \quad (7.24)$$

Se esistono una o più simmetrie di Noether si ha che

$$\begin{aligned}\pi_1 &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^1} = i_{X_1} \theta_L = \Sigma_1 \\ \pi_n &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^n} = i_{X_n} \theta_L = \Sigma_n\end{aligned}\quad (7.25)$$

quindi

$$-i\partial_1 | \Psi \rangle = \Sigma_1 | \Psi \rangle; \dots; -i\partial_n | \Psi \rangle = \Sigma_n | \Psi \rangle. \quad (7.26)$$

Queste equazioni possono essere integrate ed essendo le Σ_j costanti si ottengono comportamenti oscillatori [13]

$$| \Psi \rangle = \sum_{j=1}^m e^{i\Sigma_j Q^j} | \chi(Q^l) \rangle, \quad m < l \leq n, \quad (7.27)$$

con m numero di simmetrie, l direzioni lungo cui non ci sono simmetrie ed n numero della dimensione totale del minisuperspazio. Le m simmetrie danno integrali primi del moto e dunque la possibilità di selezionare traiettorie classiche. Nei minisuperspazi ad una o due dimensioni una simmetria di Noether permette di ottenere la soluzione completa del problema e quindi anche il limite semiclassico della teoria. In conclusione possiamo affermare che nel limite semiclassico della cosmologia quantistica il processo di riduzione della dinamica connesso alle simmetrie di Noether ci permette di selezionare un sottoinsieme di soluzioni oscillanti dell'equazione di WDW. Questo, nella struttura di Hartle, ci dà la conservazione di momenti e traiettorie che possono essere interpretate come soluzioni cosmologiche. Viceversa, se a priori troviamo soluzioni oscillanti della WDW, allora sappiamo che deve esistere una simmetria che le giustifichi. In sostanza le simmetrie di Noether selezionano gli Universi classici, abbiamo ottenuto quindi un criterio di selezione.

Capitolo 8

Conclusioni e prospettive

In questa trattazione abbiamo percorso le basi della Cosmologia Quantistica, trovando delle condizioni al contorno per la nascita dell'Universo e identificandole in un criterio di simmetria. Se i risultati presentati sono importanti, lo sono però anche i problemi tutt'ora aperti: la possibilità di stare violando in qualche modo il principio di indeterminazione di Heisenberg, seppur in un toy model, unita all'impossibilità attuale di testare questa teoria, ci suggerisce che la strada da percorrere per risolvere il problema della Cosmologia Quantistica sia ancora lunga e che, quindi, i possibili sviluppi siano molteplici.

Tuttavia, prima di parlare di sviluppi futuri di questo campo di studi, è importante sottolineare che sussiste una moltitudine di altri risultati notevoli e di altri problemi. Ci limiteremo a citare un ulteriore problema ed un ulteriore risultato. Abbiamo solo fatto notare, senza approfondire la questione, che nell'equazione di WDW non compare il tempo. Esso può indubbiamente essere introdotto come parametro nei modi in cui lo si ritiene più opportuno ma, se nella Relatività Generale esso era definito come una coordinata, ritrovarlo come parametro potrebbe essere sinonimo di mancanza di coerenza della teoria. Questa caratteristica accomuna tutte le procedure di quantizzazione di teorie di campo che godono della proprietà di invarianza per diffeomorfismi. Non è, quindi, un problema circoscritto alla Cosmologia Quantistica ma è un problema più generale che, in realtà, in Cosmologia Quantistica potrebbe anche non rappresentare un campanello d'allarme poichè nulla ci ha ancora convinto del fatto che il tempo esistesse anche "prima" del Big Bang. Potremmo, pertanto, essere in presenza di un punto di forza della teoria. L'ulteriore risultato, invece, riguarda ancora una volta le simmetrie di Noether, sulle quali si basa la trattazione che tenta di rendere criterio l'interpretazione di Hartle e che viene messa in salvo nel caso di alcune estensioni della Relatività Generale, dal momento che questa potrebbe non essere la teoria classica definitiva della gravitazione: la dimostrazione che l'interpretazione di Hartle possa essere

in realtà un teorema poggia su una quantizzazione della gravità, ed è ovvio che se qualcosa dovesse invalidare la teoria della Relatività Generale tutta l'impalcatura potrebbe crollare di conseguenza. Come sappiamo, su scala galattica, la teoria di Einstein non funziona e questo ha portato negli ultimi decenni i fisici ad avanzare delle ipotesi che sono in sostanza di due tipi: particellare e geometrica. Se il problema dovesse essere dovuto ad una nuova particella, identificata nella materia oscura, allora la Relatività Generale sarebbe salva e con essa il Criterio di Hartle. Mentre, se il problema dovesse essere geometrico, una possibile soluzione potrebbe essere fornita dalle teorie in cui, nella lagrangiana di Einstein-Hilbert, R va sostituito con una certa $f(R)$ dipendente dal caso in esame. Si potrebbe dimostrare che in questa situazione il criterio di Hartle continua a valere [14].

Gli sviluppi di questo campo di studi sono legati alla natura del problema che tratta, che lo rende un caso investigativo tortuoso: abbiamo un solo ente fisico da cui ricavare indizi, l'Universo nella sua totalità, su come si è svolto l'evento da indagare, cioè la sua nascita, ma molti aspetti di tale evento sono inaccessibili: non abbiamo nessuna informazione su ciò che è successo "prima" o "durante" l'evento (a causa del tempo di Planck), né tanto meno ci è chiaro completamente cosa sia successo negli istanti immediatamente successivi, cioè nel periodo inflazionario. Abbiamo, infine, tante possibili teorie unificatrici che risolverebbero l'enigma, seppur ognuna con i suoi problemi. Come procedere in questa situazione? È ovvio che, finché quello di Planck sarà un limite invalicabile, il prima e il durante sono da considerarsi di poco aiuto per risolvere il problema. Quello che si fa è dunque cercare di ricostruire il dopo e di perfezionare le teorie unificatrici: nel primo caso si cerca di comprendere in misura maggiore ciò che è accaduto durante il periodo inflazionario, lavorando sugli aspetti teorici ed osservativi. Una parte dell'aspetto teorico di questo tentativo è stata vista quando abbiamo accennato al modello perturbativo dei minisuperspazi, mentre per quanto riguarda le osservazioni si cerca di guardare più "lontano" nel tempo. Un progresso in questo senso si spera possa giungere dallo sviluppo della fisica delle onde gravitazionali [15], le quali, si ipotizza, potrebbero darci informazioni sul fondo stocastico dell'Universo. Nel secondo caso è ovvio che, avendo bisogno di capire quale teoria unificatrice risolva meglio il problema della Cosmologia Quantistica, tutti i tentativi sono gli stessi che vengono fatti nell'ambito della Gravità Quantistica, che è un campo di studi a parte, con l'unica differenza che la preoccupazione principale nel nostro caso è quella di confrontare i risultati ottenuti, teorici o sperimentali che siano, con le osservazioni cosmologiche. Sotto questo punto di vista, infatti, la Cosmologia Quantistica non è fine a sé stessa ma, unita allo studio dei buchi neri ([16] [17]) e delle altre singolarità gravitazionali in genere, caratterizza quello che è il problema originale da cui poi derivano tutti gli altri: l'assenza di una teoria quantistica della gravità.

Bibliografia

- [1] D. Atkatz, “Quantum cosmology for pedestrians,” Am. J. Phys. **62** (1994), 619-627
- [2] Kolb E.W., Turner M.S. "The Early Universe", Westview Press, A Member of the Perseus Books Group (1990)
- [3] R. L. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, “The Dynamics of general relativity,” Gen. Rel. Grav. **40** (2008), 1997-2027
- [4] B. S. DeWitt, “Quantum Theory of Gravity. 1. The Canonical Theory,” Phys. Rev. **160** (1967), 1113-1148
- [5] S. Capozziello, M. Funaro, "Introduzione alla relatività generale con applicazioni all’astrofisica relativistica e alla cosmologia", Liguori Editore (2006).
- [6] Vaidman, Lev, "Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2021 Edition), Edward N. Zalta
- [7] B. Carter and J. B. Hartle, “Gravitation in astrophysics: proceedings, NATO advanced study institute, Cargese, France, July 15-31, 1986,” NATO Sci. Ser. B **156** (1987)
- [8] P. Caldirola - R. Cirelli - G. M. Prosperi, "Introduzione alla Fisica Teorica", UTET (1982)
- [9] N. A. Chernikov and E. A. Tagirov, “Quantum theory of scalar fields in de Sitter space-time,” Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. A **9** (1968), 109
- [10] A. Vilenkin, “Creation of Universes from Nothing,” Phys. Lett. B **117** (1982), 25-28
- [11] A. H. Guth, “Speculations on the origin of the matter, energy, and entropy of the Universe” MIT-CTP-978.

- [12] Sean M. Carroll. "Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity". Cambridge University Press, 2019.
- [13] S. Capozziello, M. De Laurentis and S. D. Odintsov, "Hamiltonian dynamics and Noether symmetries in Extended Gravity Cosmology," *Eur. Phys. J. C* **72** (2012), 2068
- [14] S. Capozziello and F. Bajardi, "Minisuperspace Quantum Cosmology in Metric and Affine Theories of Gravity," *Universe* **8** (2022) no.3, 177
- [15] B. P. Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo], "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger," *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) no.6, 061102
- [16] K. Akiyama *et al.* [Event Horizon Telescope], "First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole," *Astrophys. J. Lett.* **875** (2019), L1
- [17] K. Akiyama *et al.* [Event Horizon Telescope], "First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way," *Astrophys. J. Lett.* **930** (2022) no.2, L12