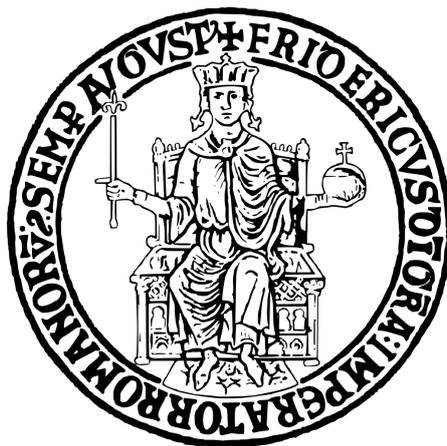


**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”**



**Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**

Laurea Triennale in Fisica

Modello a quark e teoria dei gruppi

Relatore:

Prof. Stefano Morisi

Candidato:

Marzullo Antonio

Matr. N85001452

Anno Accademico 2021/2022

Alla mia famiglia.

Indice

Introduzione	4
1 Modello Standard	5
1.1 Le particelle elementari	5
1.2 Principio di simmetria	6
1.3 Bosone di Higgs	7
2 Elementi di teoria dei gruppi	8
2.1 Cosa è un gruppo?	8
2.2 Gruppi di Lie	9
2.3 Gruppi $U(N)$ e $SU(N)$	10
2.4 $SU(2)$, $SU(3)$ ed $SU(4)$	12
3 Tableaux di Young e rappresentazioni irriducibili	15
3.1 Gruppo simmetrico	15
3.2 Tableaux di Young	15
3.3 Dimensione di una rappresentazione irriducibile	17
3.4 Rappresentazioni indotte	18
3.5 Rappresentazioni Irriducibili di un gruppo	18
3.6 Rappresentazioni prodotto	22
4 Modello a quark	24
4.1 Introduzione	24
4.2 Isospin	24
4.3 Origini del modello	26
4.4 Cosa sono i quarks?	27
4.5 Mesoni	29
4.6 Barioni	32
5 Modello elettrodebole	34
5.1 Classificazione dei fermioni nel modello elettrodebole	35
6 Accenni di teorie oltre il Modello Standard	37
6.1 Teorie di grande unificazione	37
6.2 $SU(5)$ come prototipo di GUT	37
6.3 Bosoni di gauge e generatori di $SU(5)$	38
Conclusione	41
Riferimenti Bibliografici	42

Introduzione

Il modello standard (MS) è la teoria fisica che descrive il mondo sub-nucleare ovvero la fisica al di sotto della scala del fermi, $10^{-15}m$. Il MS è l'unica teoria fisica che, conciliando meccanica quantistica e relatività ristretta riesce a descrivere tre delle quattro interazioni fondamentali, una delle più grandi sfide della fisica contemporanea è per l'appunto conciliare la gravità con la meccanica quantistica. Nella prima parte del seguente elaborato dopo aver dato una descrizione generale del Modello Standard si fa una descrizione della teoria dei gruppi, alla base della formulazione matematica del Modello Standard ed una introduzione ai tableaux di Young, uno strumento matematico molto potente associato alle rappresentazioni prodotto di un gruppo. Nella seconda parte si dà un'ampia descrizione del modello a quarks, argomento principale del seguente elaborato. Nella terza ed ultima parte di questo elaborato si estende lo studio del Modello Standard al settore elettrodebole e con l'introduzione del gruppo unitario speciale $SU(5)$ si vuole dare un'introduzione della teoria della grande unificazione, anche nota come **GUT**.

1 Modello Standard

Riferimenti bibliografici:[1].

Il Modello Standard è una teoria fisica sviluppata nella seconda metà del XX secolo che descrive i componenti primi della materia e le loro interazioni; solo tre delle quattro forze fondamentali osservate in natura sono di fatto considerate dal modello: l'interazione elettromagnetica, quella debole (unificate nella cosiddetta interazione elettrodebole) e l'interazione forte. È una teoria di campo quantistica, consistente quindi con la meccanica quantistica oltre che con la relatività speciale, in cui ciascuna interazione tra i campi di materia è regolata da un'opportuna simmetria locale (di gauge); conseguenza di ciò è che l'interazione tra campi di materia può interpretarsi in termini di scambio di bosoni che, proprio per il loro ruolo, vengono detti bosoni mediatori (o di gauge). Ad oggi, essenzialmente tutte le verifiche sperimentali del Modello Standard si sono dimostrate in accordo con le previsioni; nonostante ciò, il Modello Standard non può considerarsi una teoria completa delle interazioni fondamentali, dal momento che non include una descrizione della gravità e non è compatibile con la relatività generale. Ecco allora la necessità di cominciare a esplorare oltre la scala elettrodebole, alla ricerca di simmetrie o dimensioni più estese di quelle che oggi caratterizzano il Modello Standard.

1.1 Le particelle elementari

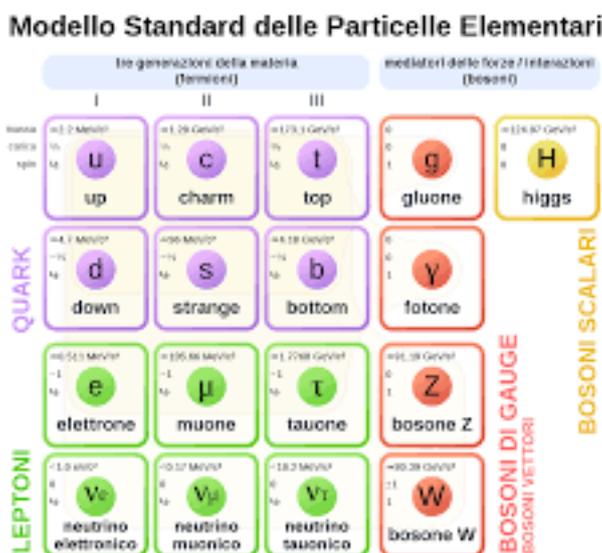


Figura 1: Particelle fondamentali descritte dal modello standard

Le particelle elementari descritte dal Modello Standard sono divise in due tipologie caratterizzate dalla statistica cui obbediscono e quindi dallo spin.

- **Fermioni:** hanno spin semintero e si dividono in quark e leptoni. Tutta la materia ordinaria è costituita da quark e leptoni. Gli atomi sono costituiti da un nucleo e da elettroni (i più leggeri leptoni carichi), il nucleo è costituito da protoni e neutroni, entrambi composti da tre quark. I fermioni sono raggruppati in tre famiglie di leptoni e tre famiglie di quark. Le tre famiglie di leptoni sono costituite da una particella carica (rispettivamente elettrone, muone e tauone) ed un corrispondente neutrino. I quark verranno ampiamente analizzati nel seguito dell'elaborato. I fermioni possono essere raggruppati in base alle proprietà di interazioni in tre generazioni. La prima generazione di fermioni, che costituiscono tutta la materia ordinaria è costituita da elettroni, neutrini elettronici, quark *up* e *down*. Le particelle delle due generazioni successive hanno una massa molto maggiore delle precedenti (le attuali misure prevedono una misura diretta dei valori assoluti delle differenze di massa e non della massa per i neutrini). A causa della massa maggiore i leptoni ed i quark della seconda e terza generazione possono decadere in particelle costituite da elementi della prima generazione. Per questo le particelle della seconda e terza generazione di fermioni sono instabili e presentano vita media breve.
- **Bosoni:** hanno spin intero e vengono suddivisi in bosoni vettoriali e bosoni scalari, poichè essi vengono introdotti in base ad un principio di simmetria detta "simmetria di Gauge". I bosoni sono i mediatori dell'interazione fondamentale, i fotoni per l'interazione elettromagnetica, i bosoni carichi *W* e *Z* mediatori dell'interazione debole ed i gluoni mediatori dell'interazione forte. Nel modello Standard era prevista la presenza di almeno un bosone di Higgs con massa non quantificata la cui presenza è stata verificata dagli esperimenti ATLAS e CMS svolti presso il Cern di Ginevra nel 2012. L'esistenza di gravitoni, ipotetici bosoni che secondo una formulazione quantistica mediano l'interazione gravitazionale non è prevista dal modello Standard.

1.2 Principio di simmetria

La formulazione del Modello Standard è basata su un principio di simmetria fondato sulla teoria di Yang Mills¹. La simmetria consiste nell'invarianza della teoria sotto opportune trasformazioni locali, dette appunto trasformazioni di gauge. Le interazioni fondamentali sono rappresentate dal gruppo unitario $SU(2) \otimes U(1) \otimes SU(3)$ costituito dal prodotto di $SU(2) \otimes U(1)$ che descrive l'interazione elettromagnetica e debole ed

¹Teoria di gauge basata su un gruppo unitario speciale

$SU(3)$ che descrive le interazioni forti. Nel seguente elaborato si considererà maggiormente il gruppo $SU(3)$ alla base della descrizione matematica del modello a quark e delle interazioni forti. La descrizione delle interazioni forti attraverso il gruppo $SU(3)$ prende il nome di *cromodinamica quantistica*, o *QCD*. I bosoni vettori, mediatori delle forze osservate in natura ed il loro numero dipende dal numero di generatori del gruppo stesso. Al sottogruppo $SU(2) \otimes U(1)$ corrispondono il fotone, mediatore dell'interazione elettromagnetica, ed i bosoni W e Z mediatori dell'interazione debole. Al sottogruppo $SU(3)$ corrispondono otto gluoni, dotati di carica di colore e per questo soggetti essi stessi alla forza forte. Questo è in relazione con il fatto che $SU(3)$ è un gruppo non abeliano. Stesso discorso vale per i bosoni W e Z che possono interagire tra loro. La seguente proprietà è stata verificata sperimentalmente, in particolare all'acceleratore LEP del CERN.

1.3 Bosone di Higgs

Le teorie di Gauge non sono in grado di descrivere bosoni vettori dotati di massa perchè ciò renderebbe la teoria non rinormalizzabile. Però questo contraddice quanto osservato sperimentalmente per i bosoni deboli W e Z . Il meccanismo di rottura spontanea di simmetria del sottogruppo $SU(2) \otimes U(1)$ è in grado di introdurre anche i bosoni massivi nel Modello Standard. Bisogna introdurre a sua volta un ulteriore bosone, anche esso massivo, il meccanismo di Higgs è in grado di spiegare, ma non prevedere quantitativamente, la massa dei fermioni. Il bosone di Higgs quindi induce la rottura spontanea della simmetria dei gruppi di gauge ed è responsabile della massa inerziale delle particelle elementari. Il 4 luglio 2012 è stato dato l'annuncio che i due esperimenti ATLAS e CMS presso il CERN hanno osservato con un elevato grado di precisione un nuovo bosone con una massa tra i 125 ed i 126 GeV e con caratteristiche compatibili con il bosone di Higgs. La scoperta è stata poi confermata ufficialmente il 6 marzo 2013, nel corso di una conferenza tenuta dai fisici del CERN a La Thuile.

2 Elementi di teoria dei gruppi

Riferimenti bibliografici:[2][3].

La teoria dei gruppi può essere vista come la descrizione matematica delle simmetrie. Poichè le simmetrie giocano un ruolo fondamentale in fisica e poichè tale teoria è alla base del modello a quark, argomento principale del seguente elaborato, segue una breve descrizione dei più importanti aspetti della teoria dei gruppi, focalizzata sui gruppi utilizzati in fisica.

2.1 Cosa è un gruppo?

Un gruppo G è un insieme di elementi, con un'operazione binaria, la moltiplicazione \times , che soddisfa le seguenti proprietà:

- il prodotto di qualsiasi due elementi è di nuovo un membro del gruppo, una proprietà conosciuta come chiusura;

$$A \times B = C \in G \quad (2.1)$$

- la moltiplicazione è associativa;

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C \quad (2.2)$$

- esiste un unico elemento del gruppo, l'identità E , che lascia tutti gli elementi invariati dopo la moltiplicazione;

$$A \times E = E \times A = A \quad (2.3)$$

- e per ogni elemento del gruppo A esiste un unico inverso A^{-1} , tale che:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E. \quad (2.4)$$

Si noti che in generale la moltiplicazione è un'operazione non commutativa, il che vuol dire: $A \times B \neq B \times A$. Solo per il caso speciale di gruppo *abeliano* si ha $A \times B = B \times A$. Le proprietà della moltiplicazione tra matrici si può osservare che soddisfano le proprietà di un gruppo. Infinite rappresentazioni di un gruppo possono essere associate e differiscono nella dimensione delle matrici ad esse associate. La rappresentazione non banale di più bassa dimensione è anche indicata come rappresentazione fondamentale di un gruppo e denotata dall'indice F . Interpretare le matrici come trasformazioni di un vettore, per esempio, rotazioni e riflessioni, illustrano la connessione tra teoria dei gruppi e simmetrie. Esso mostra anche come differenti rappresentazioni di un gruppo

realizzano la stessa simmetria in spazi di differenti dimensioni. Un esempio comune sono trasformazioni che preservano ortonormalità di un insieme di N vettori di base. Lavorando sui numeri complessi, ci sono $N \times N$ matrici U , che soddisfano $U^\dagger U = 1$. Queste matrici formano la rappresentazione fondamentale del gruppo unitario di dimensione N , $U(N)$. Usando il vincolo dell'unitarietà, è facile vedere che $|\det(U)| = 1$; se in aggiunta le matrici hanno $\det(U) = +1$, abbiamo il gruppo speciale unitario, $SU(N)$, un sottogruppo di $U(N)$. $N \times N$ matrici reali O che soddisfano $O^T O = 1$ formano il gruppo ortogonale di dimensione N , $O(N)$, e se in aggiunta $\det(O) = +1$ il gruppo speciale ortogonale, $SO(N)$.

2.2 Gruppi di Lie

I gruppi unitari speciali e gruppi ortogonali sono esempi dei cosiddetti *gruppi di Lie*. Questi sono anche definiti gruppi continui, nel senso che è possibile parametrizzare ogni elemento del gruppo in termini di un insieme di parametri reali $\theta_a, a \in N$, in modo che il prodotto di due elementi del gruppo è parametrizzato da una funzione analitica dei suoi parametri. Il numero di parametri è specifico di un dato gruppo. Se imponiamo che $\theta_a = 0$ parametrizza l'identità e introduciamo le trasformazioni T^a , associate con i parametri individuali, definite come i *generatori* del gruppo, dalle proprietà di continuità si possono scrivere elementi del gruppo nell'intorno dell'identità come:

$$U(\delta\theta) = 1 + i\delta\theta T_a + O(\delta\theta^2). \quad (2.5)$$

Applicando una sequenza di trasformazioni infinitesime possiamo scrivere un elemento del gruppo come

$$U(\delta\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i\frac{\theta_a}{n} T^a\right)^n = e^{i\theta_a T^a} \quad (2.6)$$

Così, in un gruppo connesso, ogni elemento può essere raggiunto dall'identità e scritto come un esponenziale di una combinazione lineare dei generatori. Tutte le informazioni circa la struttura del gruppo e la sua simmetria possono essere estratte dai generatori. La seguente è una proprietà di notevole importanza in quanto tutte le informazioni sulla struttura del gruppo e la sua simmetria può essere estratta dai generatori. È una enorme semplificazione per lo studio delle proprietà del gruppo, poiché si ha a che fare solo con un numero finito di generatori piuttosto che con un continuo di elementi del gruppo. In termini della forma esponenziale, il prodotto di due elementi del gruppo è dato dalla formula di Baker-Campbell-Hausdorff. Possiamo quindi scrivere:

$$\exp(i\theta)\exp(i\phi) = \exp\left(i(\theta + \phi) - \frac{1}{2!}[\theta, \phi] + \dots\right). \quad (2.7)$$

θ e ϕ sono combinazioni lineari dei generatori con coefficienti reali. Il commutatore, $[\theta, \phi] = \theta\phi - \phi\theta$, sul lato destro della precedente equazione mostra il fatto che in generale due generatori di un gruppo non commutano. Affinchè il gruppo sia chiuso, il lato

destro dell'equazione deve essere espresso nella forma data dall'equazione 2.6 che vincola il commutatore di due qualsiasi generatori del gruppo ad essere una combinazione lineare dei generatori del gruppo con coefficienti reali f^{abc} ,

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (2.8)$$

I coefficienti f^{abc} sono chiamati *costanti di struttura* e servono per definire l'algebra di Lie dei generatori del gruppo. Se f^{abc} si annullano, i generatori e di conseguenza gli elementi del gruppo commutano tra loro ed il gruppo è abeliano. Espandendo i commutatori

$$[[T^a, T^b], T^c] + [[T^b, T^c], T^a] + [[T^c, T^a], T^b] = 0 \quad (2.9)$$

si può notare che le costanti di struttura soddisfano l'identità di Jacobi:

$$f^{abc} f^{dce} + f^{bcd} f^{dae} + f^{cad} f^{dbe} = 0. \quad (2.10)$$

Per costruzione, le costanti di struttura sono manifestamente antisimmetriche nei primi due indici.

2.3 Gruppi U(N) e SU(N)

Saranno analizzati in maggiore dettaglio i gruppi che compaiono frequentemente in fisica come $SU(N)$, $SO(N)$ ed i gruppi unitari che forniscono le basi per le teorie di Gauge del Modello Standard. È possibile una relazione molto stretta tra i generatori di un gruppo e la loro algebra di Lie con la struttura del gruppo stesso. L'azione dei generatori di un gruppo sulla base degli stati dello stesso è direttamente collegata all'azione di tutti gli elementi del gruppo stesso. Saranno analizzate le rappresentazioni matriciali dell'algebra di Lie. In molte applicazioni, funzioni d'onda di stati fisici sono rappresentate da vettori ed i generatori agiscono come operatori che trasformano questi stati. Supponiamo di avere una rappresentazione N -dimensionale del gruppo generata da un set di $N \times N$ matrici $T^a(R)$ che soddisfano l'equazione 2.8, l'algebra definita dall'equazione 2.8 non ha un'unica realizzazione e quindi sono possibili diverse rappresentazioni di un gruppo. Se due rappresentazioni $T^a(R)$ e $T^a(R')$ sono equivalenti, cioè esiste una matrice S non banale tale che $ST^a(R)S^{-1} = T^a(R')$ per ogni a , le seguenti vengono definite rappresentazioni reali. Per esempio, tutte le rappresentazioni di $SU(2)$ sono reali; gli autovalori di uno qualsiasi dei generatori sono presenti in coppie di segni opposti $\pm\lambda$. La rappresentazione fondamentale di $SU(3)$ e la sua complessa coniugata non sono equivalenti. Un'importante realizzazione dell'algebra è la rappresentazione aggiunta A, definita attraverso le matrici

$$[T(A)^a]_{bc} = i f^{abc}. \quad (2.11)$$

La dimensione della rappresentazione aggiunta è la stessa del numero di parametri reali richiesti per specificare un elemento del gruppo.

Per caratterizzare una rappresentazione R di un gruppo è importante l' autovalore C_R dell' operatore quadratico di Casimir,

$$T^2(R) = \sum_a T^a(R)T^{a\dagger}(R). \quad (2.12)$$

Valutando il commutatore dell'operatore di Casimir con un arbitrario generatore si può osservare che $T^2(R)$ è proporzionale alla matrice unitaria. Nel contesto della QCD gli autovalori C_F e C_A associati agli operatori quadratici di Casimi corrispondenti alla rappresentazione fondamentale (F) ed aggiunta (A) rispettivamente, sono anche conosciuti come fattori di colore. Un importantissimo risultato è:

$$T_F N_A = C_F N_F \quad (2.13)$$

dove N_A ed N_F sono le dimensioni della rappresentazione aggiunta e fondamentale, rispettivamente.

La rappresentazione fondamentale per il gruppo unitario $U(N)$ consiste di $N \times N$ matrici complesse che soddisfano

$$U^\dagger U = 1 \quad \implies \quad |det(U)| = 1 \quad (2.14)$$

Una generale matrice complessa $N \times N$ ha $2N^2$ parametri reali. L'unitarietà impone N^2 vincoli, il numero dei parametri reali che caratterizzano $U(N)$ è solo N^2 . Applicando un fattore di fase comune possiamo imporre che $det(U) = +1$. Imponendo questa condizione aggiuntiva abbiamo il gruppo speciale unitario $SU(N)$. Quindi si può decomporre il gruppo unitario nel diretto prodotto di due gruppi, $U(N) = U(1) \otimes SU(N)$. In termini dei generatori possiamo scrivere

$$U = exp(i\theta_0 + i\theta_a T^a), \quad (2.15)$$

dove l'indice a definisce gli $N^2 - 1$ generatori di $SU(N)$, uguale al numero di parametri reali per descrivere un membro di $SU(N)$. Le componenti di $U(1)$ e $SU(N)$ possono essere trattate separatamente. Dalla definizione di trasformazione infinitesima si ricava molto facilmente che

$$T^a = T^{a\dagger} \quad Tr(T^a) = 0 \quad (2.16)$$

Il gruppo $SU(N)$ ha rango $N - 1$, ci sono $N - 1$ operatori di Casimir che commutano con tutti i generatori e descrivono la rappresentazione irriducibile di $SU(N)$. Una data rappresentazione irriducibile è quindi definita da $N - 1$ numeri. Essa ha dimensione D e definisce un sottospazio invariante D -dimensionale che può essere visualizzato raccogliendo i suoi vettori di base in un multipletto. Rango $N - 1$ comporta anche che ci sono al massimo $N - 1$ generatori che commutano tra loro ed identificano gli stati all' interno di un multipletto. I multipletti sono perciò strutture geometriche in $N - 1$

dimensioni. I rimanenti generatori sono operatori ladder che connettono gli stati tra di loro. I generatori sono matrici hermitiane a traccia nulla. In generale, per $SU(N)$ noi abbiamo $N - 1$ generatori che possono essere simultaneamente diagonalizzati. In termini fisici questo significa che uno stato quantistico associato ad una simmetria $SU(N)$ è caratterizzato da $N - 1$ numeri quantici.

2.4 $SU(2)$, $SU(3)$ ed $SU(4)$

- **$SU(2)$:** nella rappresentazione fondamentale i generatori sono matrici $N \times N$. Nel caso di $SU(2)$, essi sono proporzionali alle matrici di Pauli, $T^a = \tau^a/2$

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Il seguente gruppo ha tre generatori T^a , (spesso chiamati J^a) ed esso descrive il momento angolare (spin, isospin, etc). Esso ha rango uno e presenta un unico operatore di Casimir ($t_a t_a = J^2$) i cui autovalori sono $j(j + 1)$ ed identificano le rappresentazioni irriducibili; j può assumere valori interi e semi-interi. I generatori non commutano tra loro e solo un generatore (per convenzione T^3) i cui autovalori sono nell'intervallo $-j, \dots, j$ ed etichettano gli stati all' interno di un multipletto. Le rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$ possono essere indicate con D^p , dove $p = 2j = 0, 1, 2, \dots$. La loro dimensione è quindi: $p + 1$.

- **$SU(3)$:** per il seguente gruppo i generatori sono direttamente proporzionali alle matrici di Gell-Mann, $T^a = \lambda^a/2$, con

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^8 &= 1/\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & & (2.18) \end{aligned}$$

I generatori rispettano le seguenti relazioni di commutazione ed anticommutazione:

$$\{T^a, T^b\} = \frac{1}{N} \delta_{ab} + d_{abc} T^c \quad (2.19)$$

$$[T_a, T_b] = i \sum_{c=1}^8 f_{abc} T_c \quad (2.20)$$

I coefficienti f sono le costanti di struttura, che assumono i valori:

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, \\ f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} &= \frac{1}{2}, \\ f_{458} = f_{678} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

mentre tutte le altre f_{abc} che non si ottengono da queste tramite permutazioni sono nulle. I coefficienti simmetrici d assumono i valori:

$$\begin{aligned} d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} = -d_{247} = d_{146} = d_{157} = d_{256} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Le costanti di struttura sono quindi ottenute dalle tracce dei generatori nella rappresentazione fondamentale:

$$f_{abc} = -2i \text{Tr}([t_a, t_b] t_c), \quad d_{abc} = 2 \text{Tr}(\{t_a, t_b\} t_c) \quad (2.21)$$

Esso presenta otto generatori ed ha rango due, sono quindi due gli operatori di Casimir ($t_a t_b$ e $d_{abc} t_a t_b t_c$) che identificano le rappresentazioni irriducibili. Queste rappresentazioni si indicano con D^{pq} ; e dipendono da due numeri quantici $p, q = 0, 1, 2, \dots$ e la loro dimensione è:

$$D^{pq} = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2) \quad (2.22)$$

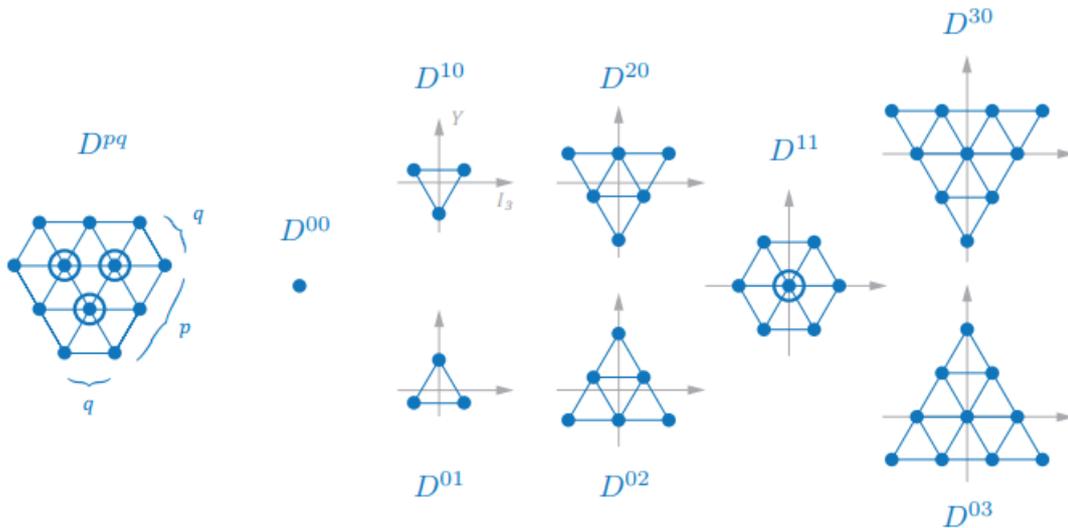
Le più basse dimensioni delle rappresentazioni irriducibili sono:

$$D^{00} = 1, \quad D^{10} = 3, \quad D^{20} = 6, \quad D^{11} = 8, \quad D^{30} = 10, \quad D^{03} = \bar{10}, \quad \dots$$

Le rappresentazioni fondamentali di tripletto e antitripletto sono D^{10} e D^{01} ; la rappresentazione aggiunta è l'ottetto D^{11} ; D^{00} è il singoletto e D^{30} il decupletto. I vari multipletti possono essere rappresentati graficamente. I generatori T^3 e $\frac{2}{\sqrt{3}}T^8$ essendo proporzionali all'identità commutano tra loro ed i loro autovalori I_3 ed Y identificano gli stati all'interno del multipletto considerato e quindi questi ultimi possono essere visti come rappresentazioni grafiche in un piano bidimensionale. I restanti generatori possono costruire operatori gradino e connettere questi stati tra di loro:

$$I_{\pm} = t_1 \pm it_2, \quad V_{\pm} = t_6 \pm it_7, \quad U_{\pm} = t_4 \pm it_5 \quad (2.23)$$

Un generico multipletto può essere rappresentato come un esagono nel piano (I_3, Y) ; per $p = 0$ o $q = 0$ gli esagoni degenerano in triangoli. Ogni esagono include ulteriori stati degeneri che si ottengono abbassando p e q di un'unità ciascuno.



Rappresentazione grafica multipletti di basse dimensioni di $SU(3)$

- **SU(4):** Il gruppo $SU(4)$ ha rango 3 e perciò si necessita di tre numeri quantici $p, q, r = 0, 1, 2, \dots$ per identificare le rappresentazioni D^{pqr} . Le loro dimensioni sono:

$$D^{pqr} = \frac{1}{12}(p+1)(q+1)(r+1)(p+r+2)(q+r+2)(p+q+r+3). \quad (2.24)$$

Le più basse dimensioni delle rappresentazioni irriducibili sono:

$$D^{000} = 1, \quad \begin{matrix} D^{100} = 4 \\ D^{001} = \bar{4} \end{matrix}, \quad D^{010} = 8, \quad \begin{matrix} D^{200} = 10 \\ D^{002} = \bar{10} \end{matrix}, \quad D^{101} = 15, \quad \dots$$

3 Tableaux di Young e rappresentazioni irriducibili

Riferimenti bibliografici:[3][4][5].

Prima di poter introdurre cosa sono i tableaux di Young va data la definizione di gruppo simmetrico

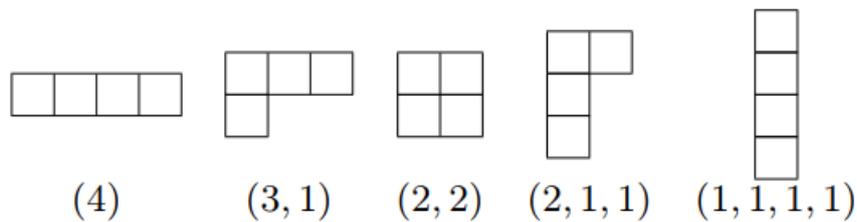
3.1 Gruppo simmetrico

In matematica, il gruppo simmetrico di un insieme è il gruppo formato dall'insieme delle permutazioni dei suoi elementi, cioè dall'insieme delle funzioni biettive di tale insieme in se stesso, munito dell'operazione binaria di composizione di funzioni. Tutti i gruppi simmetrici di insiemi aventi la stessa cardinalità sono isomorfi. Tra i gruppi simmetrici di un dato numero finito n di oggetti in genere si preferisce considerare quello costituito dalle permutazioni degli interi $1, 2, \dots, n$ e denotarlo con S_n . Questa successione di gruppi è studiata molto approfonditamente e gioca un ruolo di primaria importanza per lo studio delle simmetrie. È facile provare che il gruppo S_n ha ordine $n!$ e che non è abeliano per $n > 2$.

3.2 Tableaux di Young

Bisogna ora introdurre degli oggetti combinatori definiti come tableaux di Young e per potere fare ciò bisogna prima di tutto dare delle definizioni. Successivamente verrà mostrata la connessione tra essi e le rappresentazioni del gruppo simmetrico S_n .

- Una **partizione** di un intero positivo n è una sequenza di interi positivi $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ che soddisfano $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m > 0$ e $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m$. Si scrive $\lambda \vdash n$ per denotare che λ è una partizione di n . Per esempio il numero 4 ha cinque partizioni: $(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)$.
- Un **diagramma di Young** (diagramma di Ferrers) è un modo per rappresentare la partizione di un numero intero positivo. Questa sequenza, se ha m componenti può essere descritta dallo schema visivo formato da m righe di celle quadrate allineate sulla sinistra, con la prima riga che contiene λ_1 celle, la seconda λ_2 , etc.



Diagrammi di Young corrispondenti alle partizioni di 4

- Supponiamo $\lambda \vdash n$. Un **tableau di Young di forma t** si ottiene compilando le caselle di un diagramma di Young di λ con $1, 2, \dots, n$, con ogni numero che si verifica esattamente una volta. In questo caso diciamo che t è un λ -tableau.

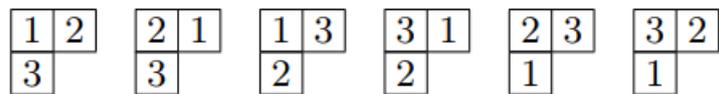


Figura 2: Tableaux di Young corrispondenti alla partizione (2,1)

- Un **tableau standard (Young)** è un tableau di Young i cui numeri identificativi delle celle sono crescenti lungo ogni riga ed ogni colonna

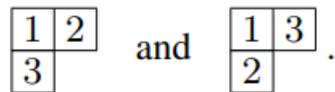


Figura 3: Tableau di Young standard per la partizione (2,1)

- É possibile costruire classi di equivalenza di tableaux conosciute come **tabloids**. Due tableaux di dimensione λ , t_1 e t_2 , sono equivalenti ($t_1 \sim t_2$), se le corrispondenti righe dei due tableaux contengono gli stessi elementi. Un tabloid di dimensione λ , è anche una classe di equivalenza, denotata da $\{t\} = \{t_1 | t_1 \sim t\}$ dove t è un tabloid di dimensione λ . Il tabloid $\{t\}$ è disegnato come il tableau t senza barre verticali che separano le entrate all'interno di ogni riga.

Si consideri il seguente:

$$t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

Dove $\{t\}$ è disegnato come:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

Tale figura rappresenta la classe di equivalenza contenente i seguenti due tableaux:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

Le rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico del campo dei numeri complessi sono in corrispondenza biunivoca con i diagrammi di Young. Diverse proprietà di una rappresentazione irriducibile come la dimensione di una rappresentazione e le rappresentazioni ristrette possono essere dedotte operando direttamente sul corrispondente diagramma di Young. In generale un tableau di Young può essere usato per poter costruire le rappresentazioni del gruppo simmetrico su un campo arbitrario e per studiare la loro struttura. Le rappresentazioni che sono ottenute da tableau non standard in generale non sono irriducibili.

3.3 Dimensione di una rappresentazione irriducibile

La dimensione di una rappresentazione irriducibile λ_π associata al diagramma di Young corrispondente alla partizione λ equivale al numero di tableaux di Young standard che si ottengono dal rispettivo diagramma di Young. Si può utilizzare la formula della **hook length**.

La hook length di una determinata cella x di un diagramma di Young λ , indicata con $hook_\lambda(x)$, è definita come il numero di celle che si trovano nella stessa riga sulla sua destra e nella stessa colonna al di sotto di essa aumentato di uno in modo da tener conto della cella x . La formula di hook length dice che la dimensione di una rappresentazione irriducibile è data da $n!$ diviso il prodotto delle hook lengths di tutte le celle del diagramma corrispondente alla rappresentazione

$$\dim \pi_\lambda = \frac{n!}{\prod_{x \in \lambda} hook_\lambda(x)}$$

3.4 Rappresentazioni indotte

Una rappresentazione di un gruppo simmetrico di n elementi, è rappresentazione del gruppo simmetrico di $n - 1$ elementi, S_{n-1} . Una rappresentazione irriducibile di S_n non è in generale una rappresentazione irriducibile di S_{n-1} . Essa può essere somma diretta di rappresentazioni che sono irriducibili per S_{n-1} . Queste vengono dette rappresentazioni indotte. Le rappresentazioni indotte sono quelle caratterizzate dai diagrammi di Young ottenuti cancellando un quadrato dal diagramma di Young corrispondente alla rappresentazione di S_n . I diagrammi di $n - 1$ celle validi sono quelli ottenuti da un diagramma di n celle cancellando solo quelle che non hanno celle nè alla loro destra nè al di sotto, ovvero celle con hook length pari a 1.

3.5 Rappresentazioni Irriducibili di un gruppo

Verranno ora illustrate le regole necessarie per potere costruire rappresentazioni irriducibili del gruppo $SU(N)$ (gruppo delle matrici complesse $N \times N$ a determinante unitario) utilizzando i diagrammi di Young.

- Il multipletto complesso $\psi_i (i = 1, 2, \dots, N)$ che appartiene alla rappresentazione fondamentale di $SU(N)$ è rappresentato da una cella:

$$\psi_i \equiv \square \equiv \mathbf{N}$$

- Ogni colonna non può contenere più di N celle.
- Ogni colonna con esattamente N celle può essere cancellata perchè essa corrisponde alla rappresentazione banale (singoletto).

$$N \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} \equiv \mathbf{1} \quad , \quad N \left\{ \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \square & & \\ \vdots & & \\ \square & & \end{array} \right\} \equiv \begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \end{array}$$

- Ogni diagramma di Young che rispetta le seguenti regole corrisponde ad una rappresentazione irriducibile di $SU(N)$ (e viceversa).
- **Rappresentazione coniugata:** in termini di diagrammi di Young, le rappresentazioni di Young possono essere ottenute in modo sistematico. Per ogni colonna, vanno rimpiazzate le j celle da $N - j$ celle, e capovolgere il diagramma attorno l'asse verticale. In $SU(4)$ si ottiene:

$$\overline{\square} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad \overline{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

Questo è concorde con quanto detto precedentemente che rappresentazioni che differiscono solo per colonne di lunghezza N attaccate alla sinistra sono equivalenti, per esempio in $SU(3)$:

$$\overline{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \overline{\square} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \square,$$

Esso implica anche che in $SU(2)$ ogni rappresentazione coniugata è identica alla rappresentazione stessa:

$$\overline{\square} = \square, \quad \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

- **Rappresentazioni di $SU(N)$ come diagrammi di Young:** considerando ora tutti i risultati appena enunciati possiamo identificare ogni rappresentazione irriducibile di $SU(N)$ direttamente con un diagramma di Young, per esempio per $SU(3)$:

$$D^{00} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad D^{10} = \square, \quad D^{20} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad D^{11} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad D^{30} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \dots$$

La corrispondenza in generale è data da:

- $SU(2) : D^p = \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}^p$
- $SU(3) : D^{pq} = \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}^q \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}^p$
- $SU(4) : D^{prq} = \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}^q \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}^r \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}^p$

Un dato diagramma di Young può identificare una rappresentazione irriducibile del gruppo $SU(N)$ e quindi da un diagramma bisogna ricavare la dimensione D della rappresentazione $SU(N)$. La dimensione D della rappresentazione può essere determinata attraverso il fattore di Hook h (prodotto delle Hook length corrispondenti ad ogni cella del diagramma): $D = F/h$ dove F può essere determinato nel modo seguente: assegnare un fattore N alla casella in alto a sinistra nel diagramma di Young: aggiungere 1 ogni volta che si va verso destra e sottrarre 1 ogni volta che si va verso il basso:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline N & N+1 & N+2 \\ \hline N-1 & N & \\ \hline N-2 & & \\ \hline \end{array} \Rightarrow F = N^2 \cdot (N+1) \cdot (N+2) \cdot (N-1) \cdot (N-2) .$$

Nel diagramma di seguito sono illustrate le dimensioni D per le irriducibili rappresentazioni di $SU(N)$, insieme ai rispettivi diagrammi di Young che hanno dimensione d .

	d	h	D	$SU(2)$	$SU(3)$	$SU(4)$
\square	1	1	N	2	3	4
$\left. \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\} N-1$	1	$(N-1)!$	N	2	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\left. \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\} N$	1	$N!$	1	1	1	1
$\left. \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\} N-1$	$N-1$	$\frac{N!}{N-1}$	N^2-1	3	8	15
$\square \square$	1	2	$\frac{N(N+1)}{2}$	3	6	10
$\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}$	1	2	$\frac{N(N-1)}{2}$	1	$\bar{3}$	6
$\square \square \square$	1	6	$\frac{N(N+1)(N+2)}{6}$	4	10	20
$\begin{array}{c} \square \square \\ \square \end{array}$	2	3	$\frac{N(N+1)(N-1)}{3}$	2	8	20
$\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array}$	1	6	$\frac{N(N-1)(N-2)}{6}$	0	1	$\bar{4}$
$\square \square \square \square$	1	24	$\frac{N(N+1)(N+2)(N+3)}{24}$	5	15	35
$\begin{array}{c} \square \square \square \\ \square \end{array}$	3	8	$\frac{N(N+1)(N+2)(N-1)}{8}$	3	15	45
$\begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \end{array}$	2	12	$\frac{N^2(N+1)(N-1)}{12}$	1	$\bar{6}$	20
$\begin{array}{c} \square \square \square \\ \square \end{array}$	3	8	$\frac{N(N+1)(N-1)(N-2)}{8}$	0	3	15
$\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}$	1	24	$\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}$	0	0	1

Identificazione delle rappresentazioni irriducibili di $SU(N)$ con diagrammi di Young. La seconda e terza colonna riportano la dimensione d del diagramma ed il fattore di Hook h . La colonna rimanente mostra la dimensione D della rappresentazione $SU(N)$, con esempi per $SU(2)$, $SU(3)$ ed $SU(4)$.

3.6 Rappresentazioni prodotto

Si possono ora costruire rappresentazioni prodotto di $SU(N)$ utilizzando diagrammi di Young. Nel caso di prodotti di rappresentazioni fondamentali si ottiene:

$$\square \otimes \square \otimes \square = (\square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}) \otimes \square = \square \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

che diviene $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$ in $SU(3)$. Il metodo utilizzato viene ora illustrato nella valutazione di un prodotto tensore generico come il seguente:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

Illustriamo ora un procedimento generale. Denotiamo il diagramma di sinistra con X ed il diagramma di destra con Y . Si inizi riempiendo le caselle nella riga superiore di Y con l'indice "a", le celle nella riga inferiore con l'indice "b", etc. Si prendano le celle "a" dalla riga superiore e si attacchino a X in tutti i modi possibili, così che il numero di celle in tutte le righe consecutive (dall'alto verso il basso) ed ogni colonna consecutiva (da destra verso sinistra) non aumenta. Quindi

- Se risulta con più di una "a" in una colonna, si cancella il diagramma
- Se un diagramma contiene una colonna con N celle, si elimina solo quella colonna (fornisce una rappresentazione equivalente). Se esso contiene una colonna con più di N celle, si elimina il diagramma.

Tutti i diagrammi identici si contano solo una volta. Si ripete questo procedimento per le altre righe del diagramma Y identificate con gli indici "b", "c", etc. Step finale consiste in:

- Nei diagrammi risultanti si vada da destra a sinistra nella prima riga, quindi nella seconda riga e così via. In ogni punto del percorso il numero di celle "b" che si incontra deve essere minore del numero di celle "a". Se questo non è il caso, si cancelli il diagramma. Si applichi la stessa logica per gli altri indici.

Di seguito viene illustrato un esempio

$$\begin{aligned} \square \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} &= \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square & a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square & b \\ \hline a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \\ &= \begin{array}{|c|} \hline \square & a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array}. \end{aligned}$$

Nel caso di $SU(3)$, questo diviene $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$, per $SU(4)$ si ha $4 \otimes \bar{4} = 20 \oplus \bar{4}$. Questa strategia è molto utile per verificare prodotti tensori più complicati. Utili risultati sono:

- $SU(2)$: La rappresentazione tensoriale può anche essere dedotta dalle regole di composizione del momento angolare:

$$(2j+1) \otimes (2j'+1) = \bigoplus_{J=|j-j'|}^{j+j'} (2J+1) \Rightarrow \begin{aligned} 2 \otimes 2 &= 1 \oplus 3, \\ 3 \otimes 3 &= 1 \oplus 3 \oplus 5, \\ 4 \otimes 4 &= 1 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 7, \\ 2 \otimes 2 \otimes 2 &= 2 \oplus 2 \oplus 4. \end{aligned} \quad \text{ù}$$

- $SU(3)$: le rappresentazioni coniugate non sono equivalenti. Decomposizioni più frequentemente usate sono:

$$\begin{aligned} 3 \otimes \bar{3} &= 1 \oplus 8, & 6 \otimes \bar{6} &= 1 \oplus 8 \oplus 27, \\ 3 \otimes 3 &= \bar{3} \oplus 6, & 8 \otimes 8 &= 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 27, \\ 3 \otimes 6 &= 8 \oplus 10, & 3 \otimes 3 \otimes 3 &= 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10. \end{aligned}$$

- $SU(6)$:

$$6 \otimes 6 \otimes 6 = 20 \oplus 70 \oplus 70 \oplus 56.$$

4 Modello a quark

Riferimenti bibliografici: [6][7][8].

4.1 Introduzione

Le basi storiche della QCD risalgono ai primi periodi di sviluppo della fisica nucleare quando si capì che l'energia di legame del nucleo era dovuta a un nuovo tipo di interazione tra protoni e neutroni. Esperimenti di scattering hanno presto mostrato che l'interazione è non solo molto forte, ma anche che essa agisce solo tra distanze molto piccole. Essi hanno anche rilevato una certa simmetria tra protoni e neutroni, la quale viene descritta dal formalismo dell'isospin introdotto da Heisenberg e descritto dal gruppo di simmetria $SU(2)$. Un'intuizione di Yukawa è stata che una forza a così breve raggio potrebbe essere compresa supponendo che l'interazione sia mediata da un bosone pesante, un cosiddetto mesone. La teoria mesonica di Yukawa spiegava molto bene la fenomenologia osservata introducendo i mesoni π come portatori di forza per interazioni forti. Il quadro teorico è stato confermato quando quei pioni sono stati effettivamente scoperti come particelle libere negli studi sui raggi cosmici e negli esperimenti con acceleratori negli anni 40. La massa è stata determinata di circa $140 MeV/c^2$ e la vita media intorno $2.6 \times 10^{-8} s$. Una sorpresa è stata la scoperta di molte altre nuove particelle che possono essere tutte prodotte in interazioni tra materia nucleare. Interessante è notare che di alcune di quelle particelle ne è stato rilevato il decadimento entro intervalli di tempo brevi come $10^{-23} s$, mentre altre hanno vita media molti ordini di grandezza più grandi. Poiché le vite brevi sono legate a una forte interazione che media il decadimento, ne consegue che le particelle di breve durata decadono tramite la forza forte e altre tramite interazioni deboli. Lo strano comportamento di queste particelle con vita media più lunga, che sono prodotte attraverso interazione forte e quindi decadono debolmente, è stato spiegato formalmente da Pais and Gell-Mann attraverso l'introduzione di un nuovo numero quantico, *stranezza*, viene conservato nelle interazioni forte e può essere violato nelle interazioni deboli. Il quadro, originariamente piuttosto semplice, del mondo delle particelle elementari, è cambiato completamente alla metà degli anni 60, quando si conoscevano così tante specie di particelle che si parlava di uno *zoo di particelle*. Informazioni sufficienti sono state raccolte per potere elaborare una struttura corretta.

4.2 Isospin

L'isospin in fisica delle particelle è una grandezza fisica, descritta da un numero quantico, associata all'interazione forte. Studiando il nucleo atomico ci si chiese come mai esso fosse stabile invece di sfaldarsi a causa della repulsione coulombiana, visto che i

suoi componenti carichi hanno solo carica positiva. Si ipotizzò quindi una nuova forza per potere spiegare questo comportamento, la *forza nucleare forte*, responsabile di un'attrazione tra nucleoni che supera la repulsione elettrica. Nel 1932 Heisenberg introdusse il concetto di isospin per spiegare la simmetria di neutrone e protone rispetto a questa nuova forza. Il termine isospin venne introdotto nel 1937 da Eugene Wigner. L'idea di Heisenberg era che protoni e neutroni fossero due stati della stessa particella, il nucleone, analoghi agli stati *up* e *down* di una particella con spin $1/2$. I protoni erano considerati analoghi allo stato *spin-up* e i neutroni a quello *spin-down*. Un gruppo di simmetria di trasformazioni sugli stati di nucleone lascia invariato l'Hamiltoniana delle interazioni forti, i due nucleoni sono indistinguibili rispetto all'interazione forte, ovvero si può passare dall'uno all'altro indifferentemente. Viene considerato il gruppo di trasformazioni unitarie speciali $SU(2)$ (unimodulari) ed esso viene definito "gruppo dell'isospin". Da ciò si deduce che la grandezza fisica appena descritta deve il nome all'analogia della struttura matematica, basata sul gruppo $SU(2)$ con quella dello spin, anche se si hanno caratteristiche fisiche completamente diverse. Come già detto precedentemente le matrici $N \times N$ costituiscono la rappresentazione fondamentale di $SU(N)$ ed in particolare le matrici 2×2 $\sigma_i/2$ (matrici di Pauli) costituiscono la rappresentazione fondamentale di $SU(2)$. Si possono introdurre rappresentazioni di ordine più elevato del gruppo $SU(2)$, descritte sempre da 3 generatori di isospin T_i rappresentati da matrici S_i $N \times N$.

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k \quad (4.1)$$

La seguente relazione di commutazione descrive l'algebra del gruppo.

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = C \quad (4.2)$$

Il seguente è l'operatore di Casimir associato al gruppo $SU(2)$. Gli autovalori dell'operatore di Casimir identificano le rappresentazioni di $SU(2)$. La rappresentazione fondamentale di $SU(2)$ è caratterizzata dall'autovalore $3/4$. In analogia con le regole di commutazione delle tre componenti del momento angolare per convenzione i singoli stati descritti da una rappresentazione sono identificati dall'autovalore di S_3 . Se I è il massimo autovalore di S_3 , la rappresentazione ha dimensione $2I + 1$. Ogni stato della rappresentazione viene descritto dall'autovalore I_3 di S_3 che assume i valori:

$$I_3 = -I, -I + 1, \dots, I - 1, I \quad (4.3)$$

I multipletti di stati di isospin caratterizzano le rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$, nel senso che gli operatori del gruppo non consentono di passare da uno stato di una rappresentazione ad uno di un'altra. La rappresentazione di dimensione 3 di $SU(2)$ viene definita rappresentazione regolare e le matrici S_i sono matrici 3×3 .

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Gli autostati corrispondenti agli autovalori di S_3 , $I_3 = +1, 0, -1$ possono essere associati per esempio a tre stati di carica come nel caso del pione.

$$\pi^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \pi^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \pi^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Il concetto di isospin è molto importante in quanto attraverso di esso è possibile osservare se determinati processi sono possibili:

- le interazioni forti conservano l' isospin totale e la terza componente;
- le interazioni elettromagnetiche conservano solo la terza componente.

Gli adroni (particelle che interagiscono per interazione forte) sono descritti da multipletti di isospin. I membri di un multipletto di isospin hanno tutti lo stesso spin e la stessa parità. In assenza di interazioni che rompano la simmetria di isospin, essi sarebbero anche degeneri in massa. Le interazioni elettromagnetiche rimuovono la degenerazione in quanto non rispettano la simmetria di isospin e ciò comporta una differenza nelle masse dei membri di un multipletto dell'ordine del percento. Le differenze di massa non vengono però completamente spiegate dall' interazione elettromagnetica ma bisogna anche tenere conto delle forze tra quark.

4.3 Origini del modello

Nel 1947 è stato scoperto il pione teorizzato da Hideki Yukawa nel 1935. Esso è stato rilevato nei raggi cosmici dagli scienziati César Lattes, Giuseppe Occhialini e Cecil Powell. Da quell'anno il nucleone perde il suo ruolo principe nella fisica delle particelle. Successivamente, molte particelle che interagiscono fortemente (adroni) sono state identificate. Molte di queste nuove particelle erano sorprendentemente longeve sulla scala temporale delle interazioni forti, nonostante fossero abbastanza massicce da decadere in oggetti più leggeri senza violare la conservazione della carica o del numero barionico. Gell-Mann e indipendentemente Nishijima hanno considerato ciò come una manifestazione di un nuovo numero quantico additivo, che è stato chiamato "stranezza", S . Essi assegnarono ad ogni adrone un valore intero di stranezza, con le rispettive antiparticelle che hanno stranezza $-S$. Hanno inoltre affermato che interazioni forti ed elettromagnetiche sono vietate a meno che S non sia conservato nella reazione. Lo schema di Gell-Mann e Nishijima è stato confermato dalle osservazioni delle proprietà di un grande numero di particelle strane che sono state successivamente scoperte. Con l'esistenza di un nuovo numero quantico S , in aggiunta ad I_3 , è stato naturale tentare di allargare la simmetria di isospin ad un gruppo più grande, vale a dire, un gruppo di rango 2. Questo nuovo gruppo di simmetria doveva adattare naturalmente gli adroni

con proprietà simili nei multipletti associati alle sue rappresentazioni. Questo compito è stato svolto dal gruppo $SU(2)$ di isospin: il neutrone e protone, che sono quasi identici nella massa sono stati associati ad un doppietto di $SU(2)$. Tuttavia, non vi sono strane particelle che sono vicine alla massa del nucleone, quindi il raggruppamento appropriato è difficile da identificare e la scelta del gruppo appare tutt'altro che scontata. Originariamente è stato proposto $SU(3)$ nel 1961 e dopo attente discussioni ed analisi la simmetria $SU(3)$ è stata confermata. La struttura del multipletto di $SU(3)$ delle cosiddette particelle "elementari" ricordava il raggruppamento degli elementi chimici nella tavola di Mendeleev. Come la tavola periodica, la classificazione rispetto $SU(3)$ ha fortemente accennato all' esistenza di una sottostruttura. Il ruolo del gruppo $SU(3)$ di isospin e stranezza è principalmente storico: ha impostato la scena per l' entrata dei quarks nella fisica delle particelle. Si comprende successivamente che il successo della simmetria di isospin è dovuto essenzialmente all' uguale massa dei quark costituenti u, d . Tuttavia $SU(3)$, che incorpora il più pesante quark s non è una buona simmetria; piuttosto, noi usiamo esso per enumerare gli stati adronici. Noi chiamiamo il seguente " $SU(3)$ di sapore", il quale è completamente scorrelato ad " $SU(3)$ di colore", che si ritiene essere una simmetria esatta di origine fondamentale.

4.4 Cosa sono i quarks?

I quarks sono fermioni che interagiscono fortemente con spin $1/2$ ed hanno per convenzione parità, mentre gli antiquarks hanno parità negativa. I quarks hanno numero barionico $1/3$ mentre gli antiquarks $-1/3$. Nella seguente tabella sono indicati i numeri quantici per le tre generazioni di quarks (vengono anche considerati i quarks c, b, t successivamente scoperti e non considerati inizialmente). Nella tabella 4 sono raffigurati

	d	u	s	c	b	t
Q - electric charge	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$
I - isospin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
I_z - isospin z -component	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	0	0	0
S - strangeness	0	0	-1	0	0	0
C - charm	0	0	0	+1	0	0
B - bottomness	0	0	0	0	-1	0
T - topness	0	0	0	0	0	+1

Figura 4: Lista quark e loro numeri quantici.

tutti i numeri quantici associati a tutte le grandezze fisiche che caratterizzano i quark. Quindi in accordo con il modello a quark , tutti gli adroni conosciuti sono costituiti da

una piccola varietà di entità più elementari, chiamate per l'appunto quarks, legati insieme in modi diversi. Gli adroni (particelle che interagiscono per interazione forte) si dividono in due categorie principali: *barioni*, stati legati di tre quarks e *mesoni*, composti da un quark ed un antiquark. La giustificazione teorica del modello a quark discende dal fatto che gli adroni vengono classificati in multipletti di $SU_C(3)$ associati a rappresentazioni del seguente gruppo di ordine superiori alla rappresentazione fondamentale. Il multipletto associato alla rappresentazione fondamentale di $SU_C(3)$, da cui tutte le altre rappresentazioni possono essere costruite attraverso le tecniche abbondantemente descritte nella prima parte del seguente elaborato è un tripletto. Nella seguente figura viene rappresentato graficamente la rappresentazione fondamentale di tripletto associata ai quark ed essa mostra anche la rappresentazione fondamentale di antitripletto associata agli antiquarks caratterizzati da valori opposti dei numeri quantici I_3 ed Y .

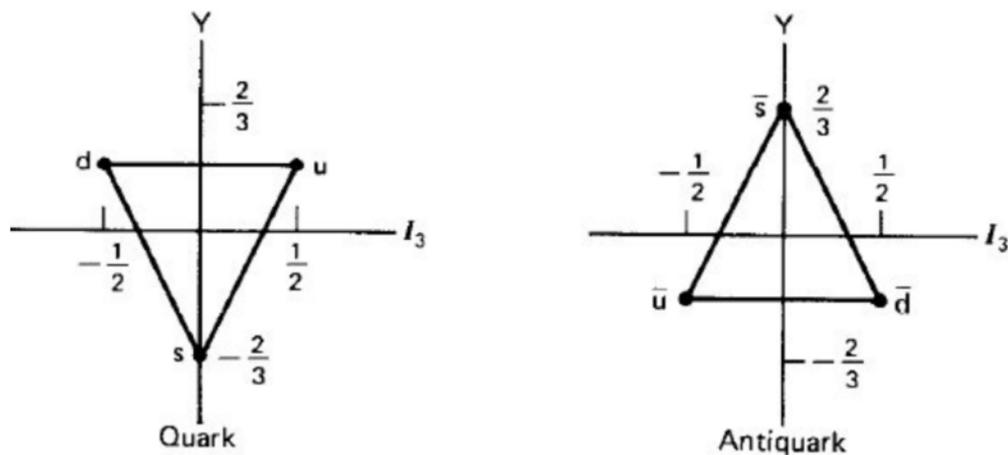


Figura 5: Rappresentazione grafica dei quarks ed antiquarks associate al tripletto fondamentale di $SU(3)$ ed al rispettivo antitripletto

Una ampia descrizione matematica del gruppo $SU(3)$ viene data nel paragrafo 2.4 Il numero quantico Y della figura è nominato "iper carica" ed è definito come ²:

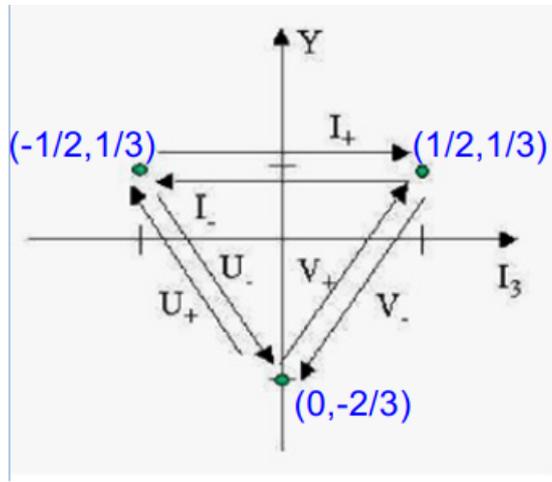
$$Y = B + S \quad (4.6)$$

ed esso viene utilizzato al posto della stranezza S . Questa scelta non ha significato fisico; essa semplicemente centra il multipletto nell'origine. La carica Q_e , (e carica dell'elettrone) equivale a:

$$Q = I_3 + Y/2. \quad (4.7)$$

²Con B si indica il numero barionico

Come nel caso di $SU(2)$, tutti gli stati di una determinata rappresentazione "irriducibile" possono essere raggiunti a partire da uno di essi con un'applicazione ripetuta di opportuni operatori a gradino e quindi è possibile passare da un quark all'altro tramite applicazione di operatori come indicato in figura



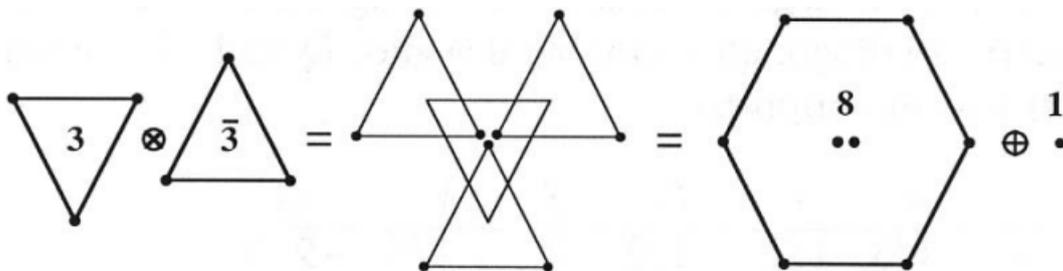
La definizione degli operatori indicati in figura viene data sempre nel paragrafo 2.4. [7][8]

4.5 Mesoni

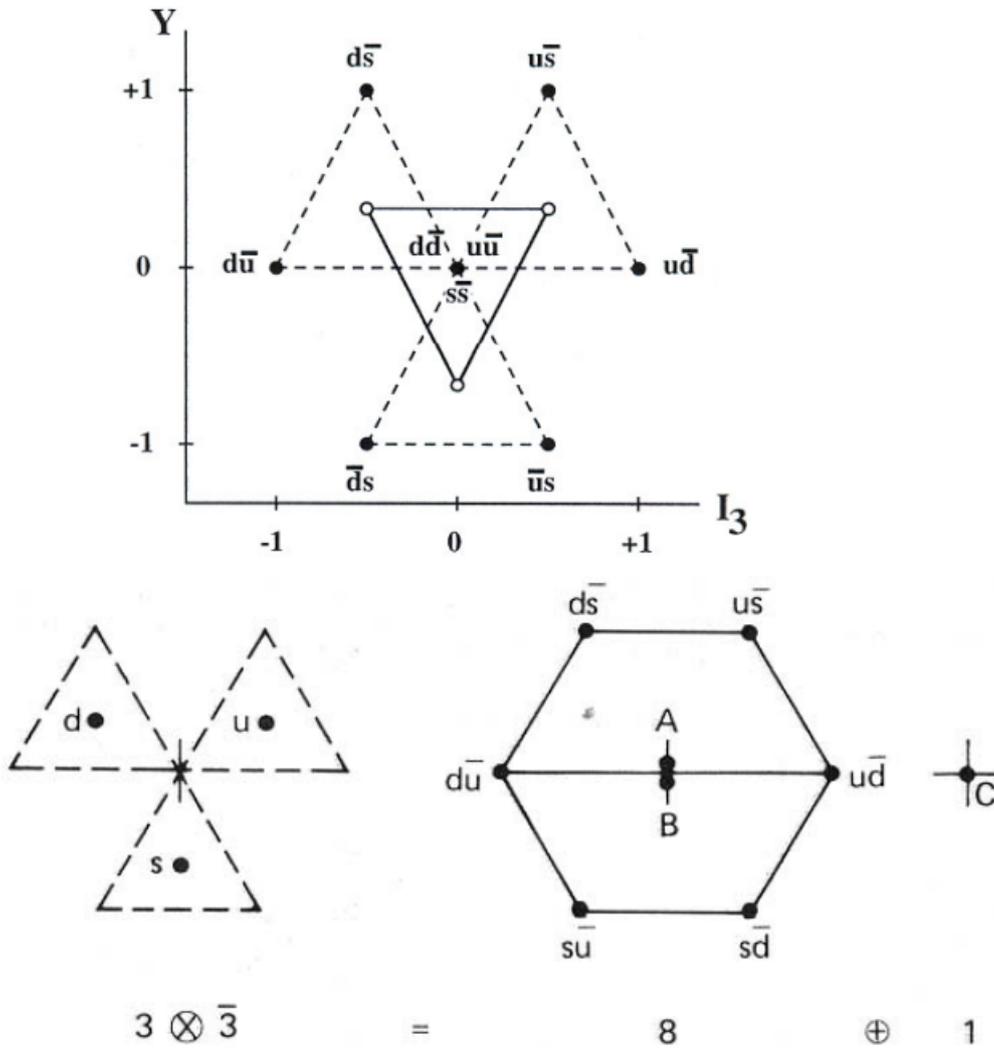
Nel modello a quark, i mesoni sono costituiti da un quark ed un antiquark legati tra di loro. Essi hanno spin intero e numero barionico nullo. Considerando solo i quark leggeri (u, d, s) si hanno nove possibili combinazioni quark-antiquark. Utilizzando la simmetria $SU(3)$ le nove possibili combinazioni q-antq sono raggruppate in un otetto ed un singoletto di mesoni di quark leggeri:

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1 .$$

La rappresentazione grafica dell'ottetto e del singoletto sono illustrate nella seguente figura:



Per costruire graficamente l'ottetto ed il singoletto si può procedere nel seguente modo (una dimostrazione rigorosa viene data nella teoria dei gruppi): partire dal grafico del tripletto fondamentale e sostituire ad ogni sito occupato il grafico del tripletto coniugato come illustrato di seguito



Notiamo che ci sono tre stati, indicati con A , B , C che hanno $I_3 = Y = 0$. Questi sono combinazioni lineari di stati $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$. La combinazione di singoletto C deve contenere ogni tipo di quark in egual modo, e così normalizzando:

$$C = \sqrt{\frac{1}{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \quad (4.8)$$

Lo stato A è associato al tripletto di isospin ($d\bar{u}, A, -u\bar{d}$) e così:

$$A = \sqrt{\frac{1}{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \quad (4.9)$$

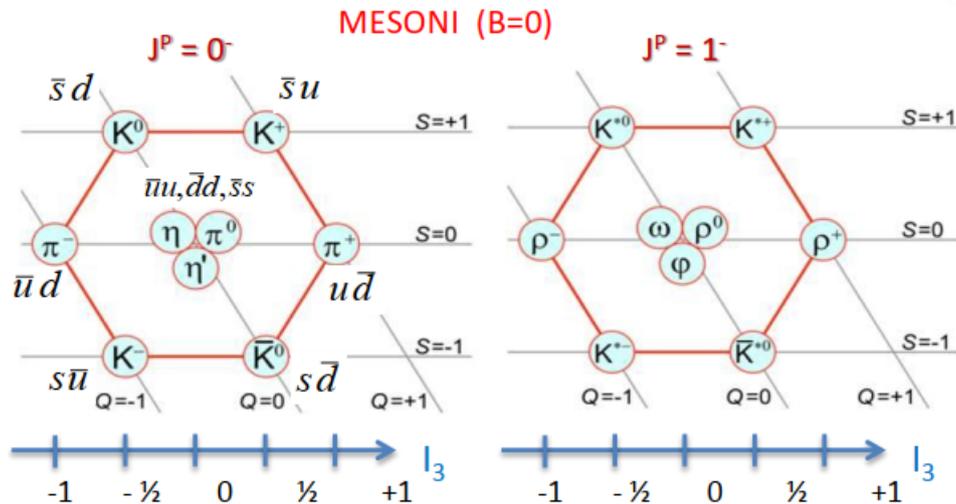
Richiedendo l'ortogonalità sia ad A che C , lo stato di singoletto di isospin B si definisce:

$$B = \sqrt{\frac{1}{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \quad (4.10)$$

Come ogni sistema quanto-meccanico legato, la coppia $q\bar{q}$ deve avere uno spettro energetico discreto. Anche in assenza di conoscenza sul potenziale che lega quark ed anti-quark, il modello è molto predittivo. Ricordiamo che i quark hanno spin $1/2$ e lo spin della coppia $q\bar{q}$ può essere $S = 0$ o 1 . Avendo spin intero sono bosoni. I mesoni vengono classificati secondo il momento angolare totale, la parità e la coniugazione di carica. In base al contenuto di quark e alla simmetria di sapore essi sono suddivisi in multipletti di masse quasi degeneri. Il momento angolare totale J equivale alla somma dello spin S della coppia $q\bar{q}$ ed il momento angolare orbitale totale L . Inoltre la parità del mesone è:

$$P = -(-1)^L \quad (4.11)$$

Il segno meno indica che q e \bar{q} hanno parità opposta essendo rispettivamente un fermione ed un antifermione. La principale divisione dei mesoni è quella in mesoni pseudoscalari ($J^P = 0^-$) e mesoni vettoriali ($J^P = 1^-$). Vengono riportati nei seguenti multipletti sia quelli sperimentalmente osservati che solo previsti a livello teorico. Vengono anche riportate le principali grandezze fisiche ad essi associati.



4.6 Barioni

Il barione è una particella subatomica non elementare costituita da 3 quark. I barioni essendo costituiti da quark appartengono alla famiglia degli adroni e prendono parte all'interazione forte. Avendo spin semintero essi sono fermioni. La decomposizione di $SU(3)$ di sapore delle 27 possibili combinazioni qqq è più complicato rispetto a quanto fatto per i mesoni; tuttavia il contenuto in quark dei barioni può essere facilmente ottenuto utilizzando la stessa tecnica. Combinando i due quarks si ottiene $3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$. Possiamo ora aggiungere il terzo tripletto di quark ed ottenere la decomposizione finale di $SU(3)$:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \otimes 3) \oplus (\bar{3} \otimes 3) = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1. \quad (4.12)$$

Si ottengono quindi un decupletto, due rappresentazioni equivalenti di ottetto ed un singoletto. I quark hanno numero barionico $B = 1/3$ quindi i barioni hanno numero barionico uguale ad 1 essendo combinazione di 3 quarks. nella seguente immagine viene illustrata la costruzione grafica dei multipletti barionici.

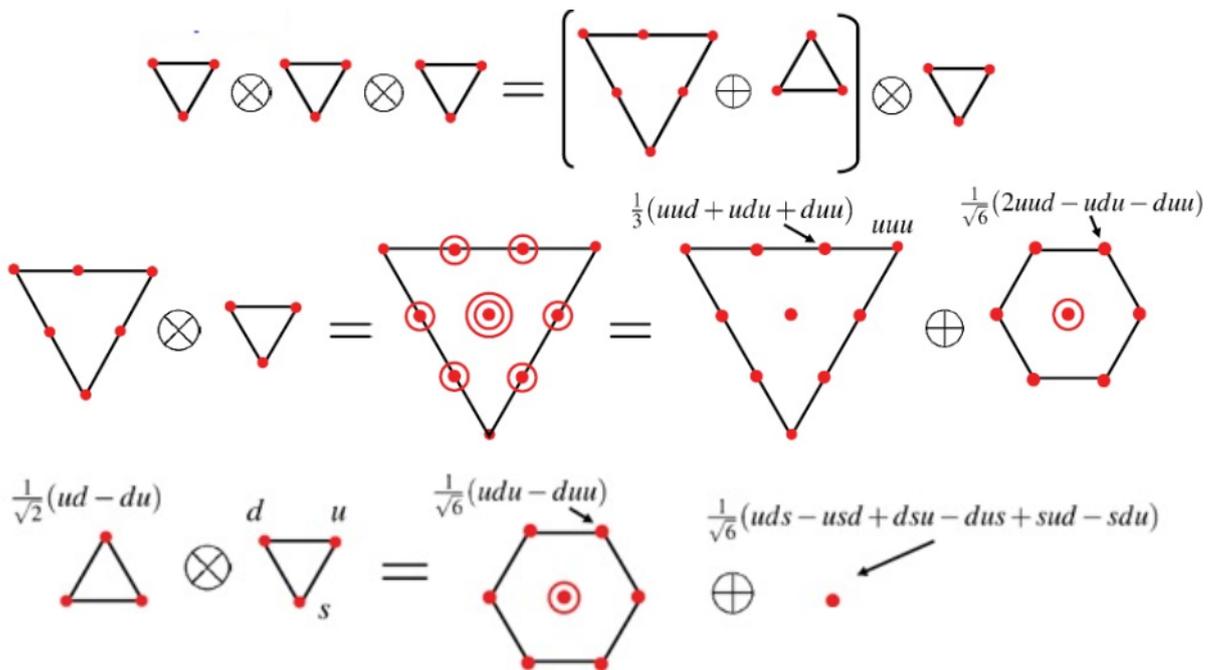
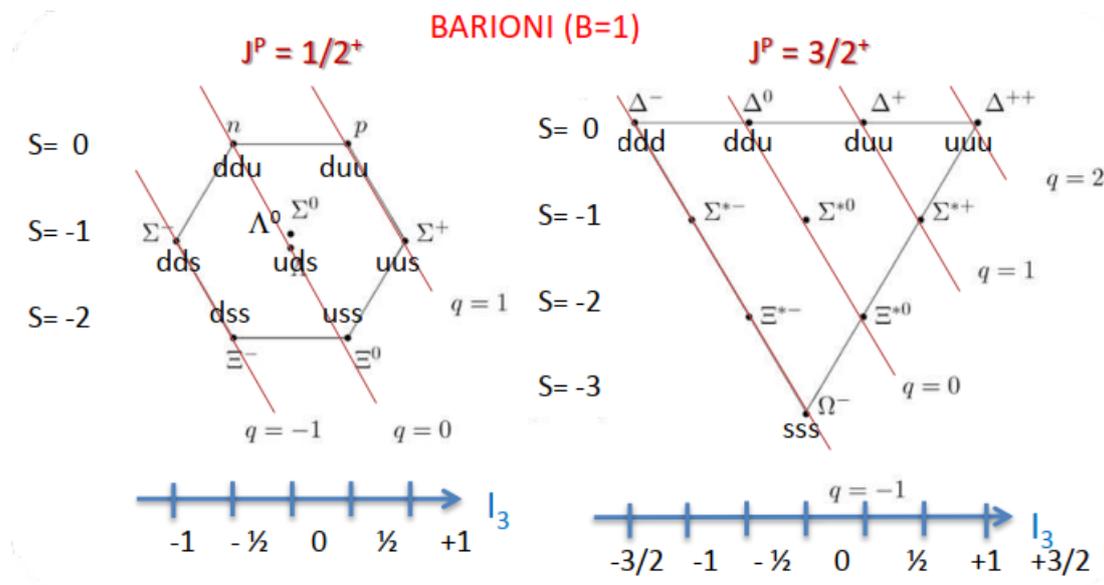


Figura 6: costruzione grafica dei multipletti barionici

Ogni barione ha un' antiparticella formata dagli antiquark corrispondenti. Con il termine barione si riferisce solitamente ai "triquark" ovvero i barioni composti da tre quark

come ad esempio il protone ed il neutrone. Sono stati proposti barioni esotici, come il pentaquark, formato da quattro quark ed un antiquark ($B = 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 - 1/3 = 1$) ma la loro esistenza non è generalmente accettata. Tra il 2006 ed il 2008 la comunità dei fisici delle particelle si esprimeva per la maggior parte contro la loro esistenza. Tuttavia nel luglio 2015 l'esperimento *LHCb* osservò due risonanze compatibile con stati di pentaquark. I barioni leggeri, composti dai quark u , d , s , si compongono in un otteetto $J^P = 1/2^+$ e un decupletto $J^P = 3/2^+$



Nei risultati ottenuti vengono considerati solamente i tre quark leggeri u , d , s (unici conosciuti all'epoca dell'affermarsi del modello a quark).

5 Modello elettrodebole

Riferimenti bibliografici: [9].

Come introduzione a questo capitolo bisogna dare due definizioni molto importanti per potere estendere lo studio al settore elettrodebole, ossia al gruppo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ e di come le particelle del Modello Standard sono classificate in termini dei numeri quantici di tale gruppo.

- **Elicità:** componente dello spin \vec{S} di una particella quantistica secondo la direzione del suo impulso \vec{p} (vettore quantità di moto). L'elicità e può scriversi come: $e = \vec{s} \cdot \vec{p} / |\vec{s} \cdot \vec{p}|$ ed assume (in unità \hbar) valori interi o semi-interi nell'intervallo $-s, -s+1, \dots, s-1, s$; per particelle di massa nulla solo i due valori estremi sono possibili e l'elicità coincide con la chiralità. L'elicità è invariante per rotazioni ed è uno pseudoscalare (cambia di segno per trasformazioni di inversioni di spazio o parità); per particelle di massa nulla l'elicità è anche invariante per trasformazioni di Lorentz.
- **Chiralità:** la chiralità è una proprietà che distingue i sistemi fisici in destrorsi e sinistrorsi: un sistema fisico possiede una chiralità se sotto una trasformazione di parità si trasforma nel sistema con la chiralità opposta. Le forze che agiscono su di un sistema fisico possono modificare o meno la chiralità; l'interazione che trasforma un sistema con chiralità definita in un altro con la stessa chiralità si dice trasformazione chirale. Per particelle con spin $s\hbar$ e massa nulla, se si misura la componente dello spin di una tale particella nella direzione dell' impulso (elicità) si possono ottenere i due soli valori $+S\hbar, -S\hbar$ (a differenza del caso di una particella a massa non nulla per la quale sono possibili tutti i $2S + 1$ valori dell'elicità spazati di un intero, in unità \hbar , e compresi tra $-S\hbar$ e $+S\hbar$). Le uniche particelle che hanno chiralità assolutamente definita sono quelle a massa nulla. Dal momento che gli esperimenti Super-Kamiokande e OPERA (assieme ad altri) hanno dimostrato che anche i neutrini hanno una massa diversa da zero, non si conoscono particelle di spin $1/2$ a massa nulla, e quindi con chiralità assolutamente definita. Una particella a massa nulla si dice averè chiralità destrorsa (o destrogira) oppure sinistrorsa (o levogira) se l'elicità è uguale rispettivamente a $+Sh$ o $-Sh$. Le proprietà dell'invarianza dell'elicità sono proprie anche della chiralità che è uguale in tutti i sistemi di riferimento. Per inversione delle coordinate (parità) l'elicità cambia di segno e conseguentemente la chiralità si trasforma da levogira in destrogira e viceversa. Un'interazione che conserva la parità agisce nello stesso modo sulle particelle levogire e destrogire, mentre ciò non è vero in generale se la parità è violata. Ciò è connesso al fatto che i neutrini che hanno interazioni deboli (violano la parità) esistono in natura solo con chiralità levogira e gli antineutrini solo con chiralità destrogira. La chiralità opposta per neutrini e

antineutrini è imposta dall'invarianza per CPT (coniugazione di carica per parità per inversione di tempo).

5.1 Classificazione dei fermioni nel modello elettrodebole

Ora bisogna assegnare i fermioni conosciuti alle rappresentazioni del gruppo di gauge in un modo che risulterà dalle interazioni deboli osservate. Le particelle di spin $1/2$ descritte dal modello standard si dividono in leptoni e quarks.

L'assegnazione dei *leptoni* è dettata dal fatto che le correnti di interazione debole accoppiano la componente left-handed del leptone carico all'associato (left-handed) neutrino. I leptoni sono particelle di spin $1/2$ che non sentono la forza forte e si suddividono in tre famiglie:

- la prima contenente l'elettrone ed il neutrino elettronico (e, ν_e) ,
- la seconda con il muone ed il neutrino muonico (μ, ν_μ) ,
- la terza contenente la particella tau ed il corrispondente neutrino tau (τ, ν_τ) .

Similmente i quarks che sentono anche l'interazione forte, si dividono in tre famiglie:

- la prima famiglia contiene il quark *up* ed il quark *down* (u, d) ,
- la seconda famiglia contiene il quark charm ed il quark strange (c, s) ,
- la terza famiglia contiene il quark top ed il quark bottom (t, b) .

Come è stato indicato nella definizione di chiralità, prove sperimentali mostrano che le interazioni deboli cariche accoppiano la componente left-handed di un leptone carico all'associato neutrino left-handed. Così gli stati left-handed devono trasformarsi in modo non banale attraverso il gruppo di isospin debole, $SU_L(2)$, la più semplice possibilità consiste nell'assegnare essi un doppietto (generalmente indicato da L_i , $i = e, \mu, \tau$)

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L \quad (5.1)$$

Allo stesso modo dei neutrini che esistono solo in forma left-handed si ha che le componenti right-handed dei leptoni non si accoppiano a bosoni deboli carichi ed essi vengono rappresentati da singoletti di $SU(2)$ (indicati da ℓ_R , $\ell = e, \mu, \tau$). Nel Modello Standard, oltre il gruppo $SU_L(2)$ sopra menzionato è presente anche il gruppo $U_Y(1)$ di ipercarica Y tale che la carica elettrica di ogni fermione descritto dal gruppo possa essere così definita:

$$Q = e \left(S_3 + \frac{Y}{2} \right) \quad (5.2)$$

	I_3	Y	Q
ν_L	1/2	-1	0
e_L	-1/2	-1	-1
e_R	0	-2	-1
u_L	1/2	1/3	2/3
d_L	-1/2	1/3	-1/3
u_R	0	4/3	2/3
d_R	0	-2/3	-1/3

Tabella 1: numeri quantici dei fermioni nel modello elettrodebole. Solo la prima famiglia è mostrata, i numeri associati alle altre sono semplicemente copie di questo modello.

dove il fattore 2 viene incluso per convenzione. Tutti i leptoni si trasformano attraverso rappresentazioni di $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$.

L'assegnazione degli adroni alle rappresentazioni di $SU(2) \otimes U(1)$ è complicato per via della complessa natura degli adroni. Risulta conveniente descrivere le loro interazioni deboli in termini di stati dei quark fondamentali. L'assegnazione dei *quarks* alle rappresentazioni di $SU(2) \otimes U(1)$ è svolta in un modo analogo a quanto è svolto per i leptoni. Poichè le correnti deboli adroniche cariche osservate sono left-handed noi scegliamo doppietti left-handed (indicati da $Q_i, i = u, c, t$).

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \quad (5.3)$$

Le componenti right-handed associate ai quarks (indicati generalmente con q) sono singoli di $SU(2)$ e l'ipercarica Y può essere facilmente ottenuta tramite l'equazione 5.2. È stata completata l'assegnazione dei fermioni conosciuti alla teoria $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ ed i numeri quantici associati ad essa vengono riportati nella tabella 1.

6 Accenni di teorie oltre il Modello Standard

Riferimenti bibliografici: [10][9].

Il Modello Standard è incredibilmente accurato nel descrivere la fisica del microcosmo. Tuttavia si pensa che sia una teoria efficace, valida ad energie più basse di qualche TeV , che necessita di modifiche per risolvere alcuni problemi teorici e di principio. In prima istanza esso non è completo, in quanto per esempio non include la gravità, interazione fondamentale trascurabile nella fisica delle particelle quando le energie in gioco sono sufficientemente più basse della massa di Planck $M_P \sim 10^{19} GeV$, e quindi sappiamo che è necessaria un' estensione del Modello Standard. Si suppone che potrebbero esistere delle teorie di unificazione tra le diverse forze del Modello Standard, proprio come l'elettromagnetismo unifica fenomeni elettrici e magnetici. Verrà illustrato un breve esempio di teoria che estende il Modello Standard basata sul gruppo $SU(5)$, che descrive l'unificazione delle tre forze di gauge basata sul gruppo $SU(5)$.

6.1 Teorie di grande unificazione

La “fisica delle alte energie” è descritta dalla QCD , la teoria di gauge di $SU_C(3)$ di colore per le interazioni forti e dalla teoria di gauge di Glashow-Weinberg-Salam $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ delle interazioni deboli ed elettromagnetiche. Sebbene abbiano successo fenomenologico, queste teorie sono chiaramente incomplete ed inadeguate come teoria fisica completa. . Vengono lasciate senza risposta fondamentali questioni come la ragione della quantizzazione della carica, la carica elettrica frazionaria dei quarks , l'origine degli apparenti angoli di mixing di “Cabibbo” della corrente di carica debole, le differenti masse di quarks, leptoni e bosoni vettori, il problema dell'asimmetria barionica e la materia oscura. Nelle teorie di Grande Unificazione si cerca di rimediare ad alcuni di questi quesiti considerando la teoria basata sul gruppo $SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ come risultato alle basse energie di una teoria unificata basata su un semplice gruppo G che incorpora QCD e Glashow-Weinberg-Salam come sottogruppo:

$$G \xrightarrow{10^{15} GeV} SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1). \quad (6.1)$$

6.2 $SU(5)$ come prototipo di GUT

Attualmente i più interessanti candidati per G sono $SU(5)$, $SO(10)$, E_6 ed $[SU(3)]^3$. Poichè il Modello Standard è descritto da un gruppo di rango 4, tutti i gruppi candidati devono avere almeno rango $N - 1 = 4$ e devono anche comportare rappresentazioni complesse. Applicando queste considerazioni il più semplice modello possibile di grande unificazione è basato sul gruppo $SU(5)$ ed è stato originariamente proposto da Georgi e Glashow . Tale modello è molto importante anche perchè le sue implicazioni

fenomenologiche sono state ampiamente studiate. Il seguente modello combina leptoni e quarks in singole rappresentazioni irriducibili, dunque potrebbero esserci interazioni che non conservano il numero barionico, ma conservano la differenza tra il numero barionico ed il numero leptonico ($B - L$). Ciò consente la possibilità del decadimento del protone mediato dal processo:

$$u + u \rightarrow (X) \rightarrow e^+ + \bar{d}. \quad (6.2)$$

Sperimentalmente, però, la non osservazione del decadimento del protone risulta una contraddizione di questo semplice modello. L'andamento delle costanti di accoppiamento associate ad $SU_L(2)$ ed $U_Y(1)$ varia con il momento della particella, con g_1 crescente e g_2 intermedia tra esso e g_3 . Questa evoluzione delle costanti di accoppiamento suggerisce che esse diventino tutte uguali ad un certo valore dell'energia alla quale avviene la grande unificazione come mostrato nella figura seguente.

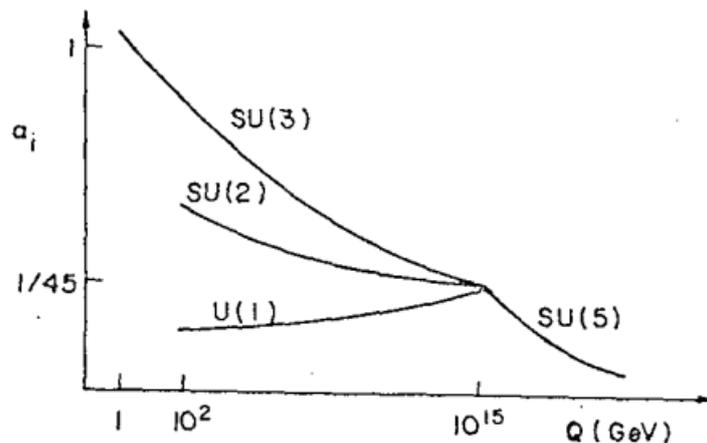


Figura 7: andamento costanti di accoppiamento in funzione dell' energia

Le lente variazioni logarithmiche delle differenti costanti di accoppiamento fanno sì che tale unificazione avvenga intorno ai $10^{15} GeV$. Tale andamento in funzione dell'energia è apprezzabile fino ad un valore di circa $10^{19} GeV$ dove effetti quanto gravitazionali iniziano a diventare forti.

6.3 Bosoni di gauge e generatori di $SU(5)$

Come ulteriore esempio di applicazione della teoria dei gruppi esposta nella prima parte di questo elaborato si riporta il gruppo $SU(5)$ definito dalla sua rappresentazione aggiunta, che è il gruppo delle matrici 5×5 unitarie complesse con determinante 1. Ci

sono 25 indipendenti matrici reali 5×5 e 50 matrici complesse indipendenti U . La condizione di unitarietà, $UU^\dagger = 1$, e la condizione di determinante pari ad 1, $\det U = 1$, danno 25+1 vincoli che rendono 24 le matrici indipendenti che definiscono $SU(5)$. U può essere scritto nella forma:

$$U = \exp \left(-i \sum_{i=1}^{24} \beta^i L^i \right) \quad (6.3)$$

dove i 24 generatori L^i sono Hermitiani ed a traccia nulla. La trasformazione di un' arbitraria rappresentazione di $SU(5)$ deve essere descritta in termini di L^i ed è utile, a questo punto, scegliere una conveniente base per L , permettendoci di identificare i 24 bosoni vettori di $SU(5)$ (v_v^a , con $a = 1, 2, 3, \dots, 24$). Le matrici 5×5 L^i vengono scelte in modo che il gruppo di colore $SU_C(3)$ venga rappresentato dalle prime tre righe e colonne, mentre il gruppo $SU_L(2)$ viene rappresentato dalle ultime due righe e colonne. Ricaviamo la struttura del sottogruppo $SU(3) \otimes SU(2)$ di $SU(5)$. Quindi abbiamo:

$$L^a = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & T^a & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } a = 1, 2, \dots, 8. \quad (6.4)$$

T^a sono le matrici di Gell-Mann Zweig che identificano i generatori di $SU(3)$. v_v^a (con $a = 1, 2, 3, \dots, 8$) rappresentano i bosoni di gauge associati ai seguenti generatori e possono essere identificati con gli 8 gluoni.

$$L^9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Le ultime due righe e le ultime due colonne delle matrici L^9 ed L^{10} corrispondono alle matrici di Pauli di spin non diagonali $\sigma_{1,2}$. I bosoni di gauge associati alle seguenti matrici sono v_v^9 e v_v^{10} e dai seguenti otteniamo:

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_v^9 \pm v_v^{10}) \quad (6.6)$$

bosoni del Modello Standard. $SU(5)$ è un gruppo di rango 4 a cui corrispondono quindi 4 generatori diagonali che identificano i numeri quantici necessari per descrivere il gruppo. In aggiunta ai due generatori diagonali, L^3 ed L^8 , associati al gruppo di

colore $SU_C(3)$, ci sono due ulteriori generatori di $SU(5)$ che è conveniente scegliere proporzionali alla terza componente dell' isospin debole e l' ipercarica debole.

$$L^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L^{12} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

v_v^{11} ed v_v^{12} , bosoni di Gauge associati ai due precedenti generatori di $SU(5)$, che sono i bosoni di gauge del Modello Standard Z e γ . Ci sono 12 generatori Hermitiani di $SU(5)$ che non corrispondono a nessuno dei generatori di $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. Essi sono rappresentati dalle matrici L^{13}, \dots, L^{18} ed L^{19}, \dots, L^{24} dove:

$$L^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L^{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

$$L^{19} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L^{20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Gli altri sono ottenuti mettendo 1 ed $\pm i$ nello stesso schema. I bosoni vettori di gauge associati ai seguenti generatori v_v^a (con $a = 13, \dots, 18$) ed v_v^a (con $a = 19, \dots, 24$) sono i dodici nuovi bosoni di gauge introdotti nella teoria di Grande Unificazione descritta dal gruppo $SU(5)$. Essi vengono denominati bosoni X ed Y^3 . Il bosone X è il teorico bosone responsabile dell' ipotizzato decadimento del protone come indicato nell' equazione 6.2 .

³Tali bosoni vengono anche definiti leptoquark perchè teoricamente essi accoppiano nelle interazioni quarks con leptoni

Conclusione

In questo lavoro di tesi è stata svolta una dissertazione matematica sulla teoria dei gruppi, con particolare attenzione ai gruppi fisicamente significativi. Successivamente sono stati introdotti i tableaux di Young, oggetti combinatori molto utili soprattutto nella trattazione di gruppi simmetrici ed è stata mostrata la corrispondenza dei seguenti con le rappresentazioni irriducibili di $SU(N)$. Dopo questa introduzione matematica si ha una descrizione del modello a quark, argomento fondante del lavoro di tesi con una classificazione di mesoni e barioni in multipletti di $SU(3)$. In particolare il modello a quark classifica mesoni e barioni in multipletti di $SU(3)$ di sapore, simmetria valida nel limite di quarks non massivi e sono stati dati come esempi Σ , Λ , Δ , Ξ ed Ω . Sotto tale simmetria si assume che i tre quarks leggeri u, d, s si trasformino come un tripletto di $SU(3)$. Successivamente è stato esteso lo studio del Modello Standard al settore elettrodebole ed è stato osservato come le particelle elementari descritte dal Modello Standard vengono classificate rispetto al gruppo $SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$. Dopo essere stati evidenziati alcuni problemi lasciati aperti dal Modello Standard come la quantizzazione della carica, la materia oscura, l'asimmetria barionica, è stata effettuata una descrizione qualitativa del gruppo $SU(5)$, gruppo candidato per una nuova teoria di Grande Unificazione (**GUT**). Seguendo le nozioni di teoria dei gruppi introdotte è stata data una descrizione matematica del gruppo $SU(5)$. Estensione del seguente elaborato può essere svolta effettuando una classificazione delle particelle descritte dal Modello Standard rispetto ai multipletti di $SU(5)$ ed evidenziando come in questa nuova teoria viene data una spiegazione della carica elettrica frazionaria dei quarks.

Riferimenti bibliografici

- [1] Paul Langacker. Introduction to the standard model and electroweak physics. *arXiv preprint arXiv:0901.0241*, 2009.
- [2] Michael Schmelling Gunter Dissertori, Ian Knowles. *Quantum Chromodynamics High Energy Experiments and Theory*. Oxford Science Publications, 2009.
- [3] Gernot Eichmann. Qcd and hadron physics, 2020.
- [4] Donald E. Knuth. Permutations, matrices and generalized young tableaux. *Pacific Journal of Mathematics*, 1970.
- [5] Yufei Zhao. Young tableaux and the representations of the symmetric group, 2013.
- [6] Alan D. Martin Francis Halzen. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley Sons, Inc., 1984.
- [7] Leonardo Merola. Dispense del corso di "elementi di fisica nucleare e subnucleare", 2020.
- [8] B.Krusche C. Amsler, T. DeGrand. *Quark Model*, 2019.
- [9] Graham Ross. *Grand Unified Theories (Frontiers in Physics)*. Benjamin-Cummings Pub Co, 1984.
- [10] John Ellis. Grand unified theories, 1980.