Università degli Studi di Napoli Federico II

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi compilativa in relatività generale

La torsione in relatività generale e la sua classificazione geometrica

Relatore
Prof. Salvatore Capozziello
Salvatore Capozziello

Candidato
Mario Galli
N85/1336

Anno Accademico 2021–2022

Indice

Capitolo 1

Introduzione

1.1 La Torsione in Relatività Generale

Il problema di allargare lo schema classico della Relatività Generale è fortemente sentito al giorno d'oggi poiché diverse questioni dipendono strettamente dal fatto che le connessioni dello spazio tempo siano simmetriche oppure no. La Relatività Generale è infatti una teoria classica, che cioè non contempla gli effetti quantistici su scale microscopiche, i quali devono invece essere considerati da ogni teoria che cerchi di espandere la Relatività Generale al livello fondamentale. Appare chiaro che il primo passo di questo processo di allargamento della teoria consiste nell'includere nello stesso schema geometrico della Relatività Generale i campi di spin della materia: dal punto di vista matematico ciò significa passare da varietà $\mathbf{V}_4$ a varietà $\mathbf{U}_4$, cioè da una varietà di Riemann con connessioni simmetriche a una varietà di Riemann-Cartan (varietà riemanniana con torsione non nulla). La teoria Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECKS), esposta brevemente nel Cap. 4, è il tentativo più convincente in questa direzione.
Come anticipato questo rappresenta soltanto il primo step di un processo ben più lungo e complesso che non racchiude appieno il contributo della torsione, che sembra emergere in ogni teoria fondamentale (Cap. 6).
La torsione appare infatti nella teoria delle (super)stringhe se si considerano i modi fondamentali delle stringhe, mentre è evidente che qualsiasi tentativo di unificare elettromagnetismo e gravità deve prendere in considerazione la torsione in teorie a quattro e più dimensioni, come ad esempio quelle di Kaluza-Klein [12]. Ancora, la teoria della supergravità rappresenta l'arena naturale in cui torsione, curvatura e campi di materia sono trattati in maniera analoga.
Inoltre in molti concordano sul fatto che la torsione possa aver avuto un ruolo specifico nella dinamica dell'universo primordiale; ruolo che oggi produrrebbe effetti osservabili su scala macroscopica: la presenza della torsione fornisce un contributo naturale al tensore energia-impulso rendendo i modelli cosmologici privi di singolarità; ciò dipende essenzialmente dall'allineamento degli spin di particelle primordiali, fenomeno che potrebbe rappresentare la fonte della torsione. Se l'universo subisse una o più transizioni di fase la torsione potrebbe originare anomalie topologiche che oggi potrebbero tradursi in momenti intrin-

sechi di strutture cosmologiche come le galassie [10].
In seguito a questa breve carrellata di esempi si comprende allora come sia impossibile trascurare la torsione all'interno di qualsiasi teoria della gravitazione che prenda in considerazione anche la controparte non gravitazionale relativa alle altre tre interazioni fondamentali.

1.2 Le classificazioni geometriche della Torsione

Generalmente la torsione è associata alla densità di spin della materia ma spesso si incontrano esempi in cui non può essere derivata da essa e assume quindi significati fisici differenti: si può infatti dimostrare che esistono molti tensori di torsione indipendenti, ognuno avente proprietà diverse.
É appunto per distinguere tali casi che è necessaria una classificazione dei vari tensori di torsione basata sulle loro proprietà geometriche. Nei capitoli che seguono si esporranno due diverse classificazioni in cui i tensori di torsione vengono distinti secondo le proprietà dei vettori e bivettori, ampiamente compresi in Relatività Generale, in cui è possibile decomporli.

La prima classificazione si basa sulla possibilità di costruire i tensori di torsione a partire dal prodotto tensoriale di un bivettore semplice covariante e un vettore controvariante; tali oggetti sono infatti facilmente classificabili. Passando in rassegna tutte le possibili combinazioni si ottengono allora 24 tensori indipendenti, chiamati *tensori di torsione elementari*.

La seconda classificazione si basa invece sulla decomposizione in un punto dello spazio-tempo di tipo $\mathbf{U}_4$ del tensore di torsione in tre tensori irriducibili rispetto al gruppo di Lorentz. Di nuovo è possibile utilizzare vettori e bivettori per identificarne le proprietà geometriche. Si ottiene quindi che i tensori ottenuti con la seconda classificazione sono esprimibili come combinazioni di "tensori elementari di torsione" mentre generalmente questi ultimi sono irriducibili.

Uno dei principali risultati di queste classificazioni è che in molte teorie, come la ECSK, la torsione viene associata alla sua sorgente con un'equazione algebrica: queste due classificazioni chiariscono anche la natura della sorgente del campo di torsione, permettendoci di riconoscere quale particolare tensore può essere originato dallo spin, quale no e addirittura quale non ha nemmeno un significato fisico.
Da tali classificazioni si evince inoltre in che modo le differenti sorgenti della torsione possano influenzare i fenomeni fisici; a tal proposito nel Cap. 6 si discutono i contributi dei diversi tipi di torsione al tensore di energia-impulso nella teoria ECSK.

L'elaborato è organizzato nel seguente modo: nel Cap. 2 si forniscono definizioni e concetti generali riguardanti il tensore di torsione; nel Cap. 3 invece si passano in rassegna concetti di geometria differenziale che risulteranno essenziali per costruire le due classificazioni; nel Cap. 4 si espongono brevemente i tratti salienti della teoria ECSK; nel Cap. 5 si espongono gli elementi della prima classificazione (Sez. 5.1.2) e quelli della seconda (Sez. 5.2); infine, nel Cap. 6 si propongono vari esempi e applicazioni del tensore di torsione che si trovano in letteratura.

Capitolo 2

Il tensore di Torsione

2.1 Definizione del tensore di Torsione

Da un punto di vista prettamente geometrico la torsione si definisce nel seguente modo:

data una varietà differenziabile V di dimensione $n \geq 2$ e un campo vettoriale **X** su essa definito la torsione è l'applicazione

$$S : \mathbf{X}(V) \times \mathbf{X}(V) \to \mathbf{X}(V) \tag{2.1}$$

tale che

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \nabla_a \mathbf{b} - \nabla_b \mathbf{a} - [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \tag{2.2}$$

e cioè rappresenta la non chiusura del parallelogramma (fig. 2.1).

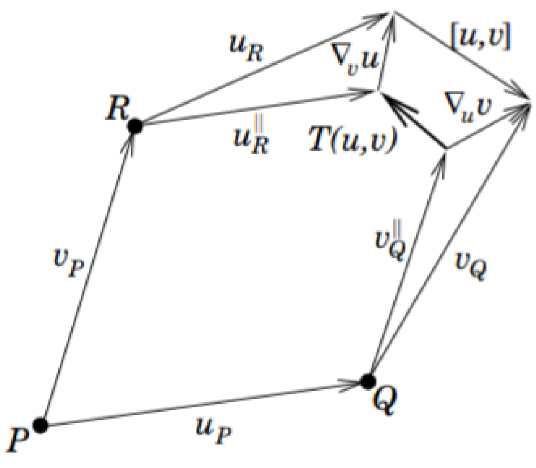

Figura 2.1: La torsione come mancata chiusura del parallelogramma.

Inoltre si può dimostrare che in $\mathbf{U}_4$ la torsione rappresenta la parte antisimmetrica della connesione affine, cioè

$$S_{ab}{}^{c} = \frac{1}{2}(\Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}) = \Gamma^c_{[ab]} \tag{2.3}$$

Si noti che S^c_{ab} definita in questo modo è un tensore e prende appunto il nome di *tensore di Torsione* [12]; infatti le connessioni si trasformano secondo la seguente legge

$$\tilde{\Gamma}^a_{bc} = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^d}\frac{\partial x^e}{\partial \tilde{x}^b}\frac{\partial x^f}{\partial \tilde{x}^c}\Gamma^d_{ef} + \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^d}\frac{\partial^2 x^d}{\partial \tilde{x}^b \partial \tilde{x}^c} \tag{2.4}$$

da cui si nota che esse non sono tensori poiché il secondo termine al secondo membro della (2.4) impedisce alle Γ di conservare la tensorialità. Allora è immediato verificare che la Torsione definita dalla (2.3) si trasforma con legge tensoriale poiché i due termini non omogenei delle connessioni si elidono a vicenda.

2.2 Modifiche alla teoria classica

Come discusso nell'introduzione il processo di unificazione tra la teoria quantistica e la relatività generale passa necessariamente attraverso l'inclusione in quest'ultima di teorie in cui le connessioni affini non godono della proprietà di simmetria; cioè in cui valga

$$\Gamma^c_{ab} \neq \Gamma^c_{ba} \tag{2.5}$$

Il primo passo è quindi inserire tale ipotesi nella teoria formulata da Einstein e vedere come questa si modifica. Facendo ciò si nota subito che cade la definizione del *tensore di Riemann* come *"commutatore delle derivate seconde covarianti di un vettore"*; infatti si ottiene:

$$\begin{aligned}(A^a_{;b})_{;c} - (A^a_{;c})_{;b} = {} & \cancelto{0}{(A^a_{,bc} - A^a_{,cb})} + \cancelto{0}{(\Gamma^a_{db} - \Gamma^a_{db})}A^d_{,c} + \cancelto{0}{(\Gamma^a_{dc} - \Gamma^a_{dc})}A^d_{,b} + \\ & + (\Gamma^a_{db,c} - \Gamma^a_{dc,b})A^d + (\Gamma^a_{dc}\Gamma^d_{eb} - \Gamma^a_{db}\Gamma^d_{ec})A^e + \\ & + (\Gamma^d_{cb} - \Gamma^d_{bc})A^a_{,d} + (\Gamma^d_{cb} - \Gamma^d_{bc})\Gamma^a_{ed}A^e = \\ & = R^a_{bcd}A^d + (\Gamma^d_{cb} - \Gamma^d_{bc})(A^a_{,d} + \Gamma^a_{ed}A^e) = \\ & = R^a_{bcd}A^d - (\Gamma^d_{bc} - \Gamma^d_{cb})A^a_{;d}\end{aligned} \tag{2.6}$$

Dove per ottenere R^a_{bcd} si sono rinominati gli indici.
Considerando la (2.3), la (2.6) si può scrivere:

$$(A^a_{;b})_{;c} - (A^a_{;c})_{;b} = R^a_{bcd}A^d - 2S^d_{bc}A^a_{;d} \tag{2.7}$$

Si noti che assumendo la semplice ipotesi (2.5) nella teoria appare naturalmente il *tensore di torsione*: basta questo calcolo immediato per comprendere il ruolo centrale di tale entità matematica nel processo di allargamento ad altre teorie della GR.

É inoltre possibile mettere in relazione le connessioni simmetrica e quella con torsione non nulla, considerando la derivata covariante del tensore metrico

$$g_{ab;c} = g_{ab,c} - g_{db}\tilde{\Gamma}^d_{ca} - g_{ad}\tilde{\Gamma}^d_{cb} = 0, \tag{2.8}$$

$$g_{ca;b} = g_{ca,b} - g_{da}\tilde{\Gamma}^d_{bc} - g_{cd}\tilde{\Gamma}^d_{ba} = 0, \tag{2.9}$$

$$g_{bc;a} = g_{bc,a} - g_{dc}\tilde{\Gamma}^d_{ab} - g_{bd}\tilde{\Gamma}^d_{ac} = 0. \tag{2.10}$$

Dove $\tilde{\Gamma}$ è la connessione con torsione non nulla mentre Γ sarà quella simmetrica.

Ricordando la definizione dei *simboli di Christoffel di prima specie* otteniamo:

$$\{a,bc\} = \frac{1}{2}(g_{ab,c} + g_{ca,b} - g_{bc,a}) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(g_{ab;c} + g_{ca;b} - g_{bc;a}) + \\ &+ \frac{1}{2}g_{cd}(\tilde{\Gamma}^d_{ba} - \tilde{\Gamma}^d_{ab}) + \\ &+ \frac{1}{2}g_{bd}(\tilde{\Gamma}^d_{ca} - \tilde{\Gamma}^d_{ac}) + \\ &+ \frac{1}{2}g_{ad}(\tilde{\Gamma}^d_{cb} + \tilde{\Gamma}^d_{bc}) = \\ &= g_{cd}S^d_{ba} + g_{bd}S^d_{ca} + g_{ad}\tilde{\Gamma}^d_{(cb)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dove nell'ultimo passaggio si è considerato nullo il termine contenete le derivate covarianti di g (poiché siamo su una varietà *isometrica*) e si è introdotta la *parte simmetrica* della connessione $\tilde{\Gamma}^d_{(cb)} = \frac{1}{2}(\tilde{\Gamma}^d_{cb} + \tilde{\Gamma}^d_{bc})$.

A questo punto ricordando la definizione di connessione otteniamo:

$$\Gamma^i_{bc} = g^{ia}\{a,bc\} = S_{b\ c}^{\ i} + S_{c\ b}^{\ i} + \tilde{\Gamma}^i_{(cb)} \tag{2.12}$$

Sommando e sottraendo $S^i{}_{bc}$ e osservando che $\Gamma^i_{bc} = \Gamma^i_{(bc)} + \Gamma^i_{[bc]}$ finalmente si ottiene:

$$\Gamma^i_{bc} = \tilde{\Gamma}^i_{bc} + S_{b\ c}^{\ i} + S_{c\ b}^{\ i} - S^i{}_{bc} \tag{2.13}$$

$$\Gamma^i_{bc} = \tilde{\Gamma}^i_{bc} - K_{bc}{}^i \tag{2.14}$$

Nell'ultima relazione si é definito il *tensore di contorsione* $K_{bc}{}^i$ poichè nei calcoli appaiono spesso combinazioni lineari della torsione.

Un'altra combinazione che appare spesso è quella del *tensore di torsione modificato*:

$$T_{ab}{}^c = S_{ab}{}^c + 2\delta_{[a}{}^c S_{b]} \tag{2.15}$$

La (2.14) evidenzia come la torsione rappresenti la differenza, o meglio la *"distanza"*, tra la connessione *torsionless* della varietà di Riemann e quella della varietà di Riemann-Cartan, e poichè si è già detto che essa è intrinsecamente legata al concetto di simmetria delle Γ, si può considerare la torsione come una misura della *non simmetricità* della connessione in $\mathbf{U}_4$.

Inoltre è utile ricavare la relazione che intercorre tra il tensore di Riemann *torsionless* e quello con torsione.

Per fare ciò basta considerarne la definizione

$$\tilde{R}_{abc}{}^d = \tilde{\Gamma}^d_{bc,a} - \tilde{\Gamma}^d_{ac,b} + \tilde{\Gamma}^d_{ai}\tilde{\Gamma}^i_{bc} - \tilde{\Gamma}^d_{bi}\tilde{\Gamma}^i_{ac} \tag{2.16}$$

e sostituire la relazione (2.14) nella (2.16) per ottenere il contributo della torsione al tensore di Riemann; facendo ciò si ottiene:

$$\tilde{R}_{abc}{}^{d} = R_{abc}{}^{d} - \nabla_a K_{bc}{}^{d} + \nabla_b K_{ac}{}^{d} + K_{ai}{}^{b} K_{bc}{}^{i} - K_{bi}{}^{d} K_{ac}{}^{i} \tag{2.17}$$

Dove con l'operatore ∇ si è voluto indicare la derivata covariante sulla varietà senza torsione. A partire da questa relazione, contraendo gli indici, si ottengono quelle per il tensore di Ricci e per lo *scalare di curvatura*:

$$\tilde{R}_{ab} = R_{ab} - 2\nabla_a S_c + \nabla_b K_{ac}{}^{b} + K_{ai}{}^{b} K_{bc}{}^{i} - 2S_i K_{ac}{}^{i} \tag{2.18}$$

$$\tilde{R}_{ab} = R - 4\nabla_a S^a + K_{cib} K^{bci} - 4S_a S^a \tag{2.19}$$

Si osservi come dalle relazioni (2.17), (2.18) e (2.19) si ottiene che su una varietà di Riemann-Cartan (fisicamente uno spazio-tempo con torsione) vi è un contributo aggiuntivo alla curvatura, e quindi alla dinamica del sistema, dovuto proprio al tensore di torsione [12].

Capitolo 3

Il formalismo tetradico

Al fine di classificare geometricamente la torsione è essenziale introdurre, a questo punto della trattazione, il cosiddetto *formalismo tetradico* e il concetto di *bivettore* ad esso strettamente collegato. Prima però bisogna fare necessariamente un excursus sul modello matematico che si utilizza per descrivere lo spazio-tempo e richiamare alcuni concetti di geometria differenziale, con particolare attenzione alle varietà differenziabili $\mathcal{M}$ e agli spazi tangenti ($\forall$ punto $p \in \mathcal{M}$) $T_p\mathcal{M}$ con le loro rispettive proprietà; infatti se si considerano come varietà lo spazio-tempo e $T_p\mathcal{M} = \mathbb{M}$ (dove $\mathbb{M}$ è lo spazio di Minkowski in cui vale la Relatività Speciale) [14] allora le proprietà geometriche, interpretate nell'ambito della realtà fisica, possono fornirci un ulteriore aiuto nell'indagare la struttura dell'universo.

3.1 Richiami di geometria differenziale

3.1.1 Le varietà differenziabili

Si consideri allora una varietà differenziabile quadridimensionale ($\mathcal{M}$,A) dove A è un atlante massimale di *carte* sull'insieme regolare $\mathcal{M}$; da un punto di vista estrinseco una varietà può essere considerata come una superficie nel senso inteso da Gauss: "un sottoinsieme di qualcosa di più grande".

Per ogni punto p della varietà esiste una carta ($\mathcal{U}$,ψ) dove $\mathcal{U}$ è un intorno aperto di p mentre ψ è un omeomorfismo (mappa continua e biunivoca) così definito $\psi : \mathcal{U} \to \psi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^4$. Se invece si considerano due carte ($\mathcal{U}$,ψ) e ($\mathcal{V}$,ϕ), con $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq 0$, la composizione $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \to \phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ è un diffeomorfismo di classe C^∞ detto *trasformazione di coordinate* (fig. 3.1), infatti é una mappa che permette di passare dalle coordinate $(x^a) := \psi(p) \in \mathbb{R}^4$ alle $(y^a) := \phi(p) \in \mathbb{R}^4$ (con a = 0,1,2,3) [4].

3.1.2 Lo spazio tangente

Lo spazio tangente $T_p\mathcal{M}$ si definisce invece attraverso una classe di equivalenza. Per ogni punto della varietà possiamo definire il seguente insieme

$$K_p(\mathcal{M}) = \{\gamma(t) : (-\epsilon, +\epsilon) \to \mathcal{M} \quad \text{di classe C}^\infty \quad \text{t.c.} \quad \epsilon > 0, \gamma(0) = p\}$$

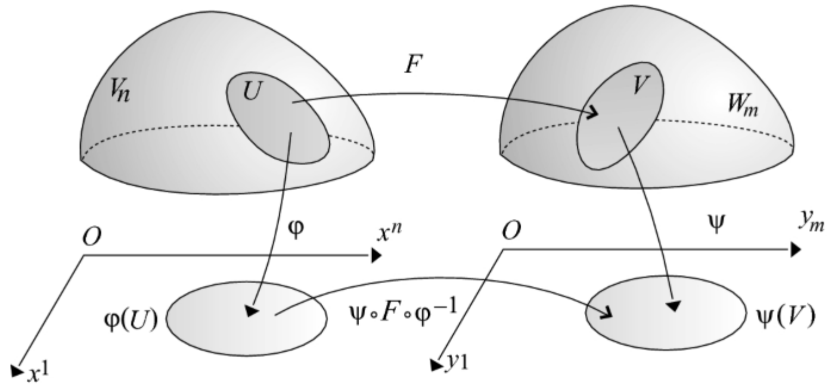

Figura 3.1: Cambiamento di coordinate su una varietà.

dove $\gamma(t)$ è una curva sulla varietà; allora in tale insieme si definisce la relazione di *equivalenza tangenziale* per due curve:

considerate due curve $\gamma, \eta \in K_p(\mathcal{M})$ tali che $\phi^{-1} = \gamma$ e $\phi^{-1} = \eta$, dove ϕ è la mappa della carta $(\mathcal{U}, \phi)$ associata a p, queste si dicono *tangenzialmente equivalenti* se sono tangenti in $\mathbb{R}^4$, cioè se in t=0 vale la seguente relazione

$$\frac{d}{dt}(\phi^{-1} \circ \gamma)(t) = \frac{d}{dt}(\phi^{-1} \circ \eta)(t).$$

In questo modo è possibile definire un vettore tangente in p come la classe di equivalenza tangenziale di elementi di $K_p(\mathcal{M})$, indicato dal simbolo $[\gamma] = \mathbf{v}$. Si osservi che la definizione di una classe di equivalenza è essenziale per evitare ridondanze, infatti più curve passanti per p potrebbero originare lo stesso vettore tangente.

Conseguentemente si definisce lo spazio tangente come l'insieme di tali vettori in p; equipaggiandolo poi con le operazioni lineari di somma (+) e prodotto (•) si dimostra che la struttura matematica risultante $(T_p\mathcal{M}, +, \bullet)$ è uno spazio vettoriale [7] (fig. 3.2).

Si osservi a questo punto che la presenza della carta locale $(\mathcal{U},\psi)$ induce una base lineare su $T_p\mathcal{M}$: infatti ogni curva passante in p induce in esso un vettore tangente, cioè una derivata direzionale: allora definendo

$$[\gamma_j] = e_j|_p$$

l'insieme $\{e_j|_p\}$ con a=0,...,3 costituisce la base associata alla carta [4].

Si definisce anche lo spazio cotangente $T_p^*(\mathcal{M})$, cioè l'insieme delle mappe $\alpha : T_p(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ che ha caratteristiche analoghe allo spazio tangente.

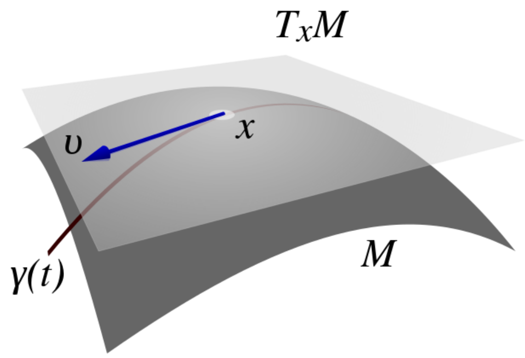

Figura 3.2: Spazio tangente in un punto della varietà.

Associando a tali strutture matematiche entità concrete come lo spazio tempo e un riferimento localmente inerziale (LIF) è possibile sfruttare le proprietà matematiche di varietà e spazi tangenti nella maniera che sarà esposta nelle seguenti sezioni.

3.2 Tetradi

Il *formalismo tetradico* non è altro che una generalizzazione del concetto di trasformazione delle coordinate.
In base alle proprietà di varietà e spazi tangenti, analizzate nella sezione precedente, un qualsiasi vettore applicato in un punto p della superficie, quindi dello spazio-tempo, è esprimibile in termini delle basi naturali degli spazi tangente e cotangente (cioè quelle indotte dalle carte) e quindi è possibile definire un insieme di vettori e covettori ortonormali che possono essere messi in relazione a tali basi tramite dei coefficienti chiamati appunto *tetradi* [12].
l'importanza di tale formalismo deriva dal fatto che esso ci permette di passare agilmente dal sistema di coordinate globali definito sulla varietà alle coordinate sullo spazio tangente locale: ossia ci consentono di instaurare una relazione tra la varietà e il suo fibrato tangente, quindi tra lo spazio-tempo e un sistema localmente inerziale. Tale aspetto è di vitale importanza poiché ci permette di sviluppare la trattazione nello spazio di Minkowski, dove i calcoli sono tendenzialmente più semplici, per poi generalizzarla al sistema globale sfruttando la natura tensoriale delle equazioni.
Di seguito si propone un esempio di tale procedimento per meglio comprendere i vantaggi che derivano dal suo utilizzo.

Si vuole ricavare la forma della derivata covariante per un campo vettoriale: la maniera più semplice per fare ciò è derivarne prima la forma nello spazio di Minkowski e poi ampliarla al sistema non inerziale.

Un qualsiasi vettore può essere decomposto rispetto alla base naturale nel seguente modo:

$$\mathbf{v} = v^a \hat{e}_a$$

allora

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^b} = \frac{\partial v^a}{\partial x^b}\hat{e}_a + v^a \frac{\partial \hat{e}_a}{\partial x^b}. \tag{3.1}$$

Si osservi che la derivazione del versore $\hat{e}_a$ è tutt'altro che banale se la si considera nel sistema globale: infatti per operare la derivazione è necessario variare il versore, cioè considerarlo prima in p e poi in un altro punto p', allora il problema nasce dal fatto che $p \in T_p(\mathcal{M})$ mentre $p' \in T_{p'}(\mathcal{M})$. Invece nello spazio di Minkowski, dove $g_{ab} \equiv \eta_{ab} = diag(-1, 1, 1, 1)$, si ha

$$\frac{\partial \hat{e}_{a'}}{\partial \xi^{c'}} = 0 \tag{3.2}$$

dove le $(\xi^{c'})$ sono le coordinate nel sistema locale.
A questo punto trasportiamo tale relazione nel sistema globale operando il cambio di coordinate $(\xi^{c'}) \to (x^b)$. Per le proprietà dei tensori si ha

$$\hat{e}_a = \Lambda^{a'}_a \hat{e}_{a'} = \frac{\partial \xi^{a'}}{\partial x^a}\hat{e}_{a'} \quad \text{e} \quad \hat{e}_{a'} = \Lambda^a_{a'} \hat{e}_a = \frac{\partial x^a}{\partial \xi^{a'}}\hat{e}_a \tag{3.3}$$

per cui, ricordando le (1.1), (3.2) e (3.3), si ottiene

$$\frac{\partial \hat{e}_a}{\partial x^b} = \frac{\partial^2 \xi^{a'}}{\partial x^a \partial x^b}\hat{e}_{a'} + \frac{\partial \xi^{a'}}{\partial x^a}\cancelto{0}{\frac{\partial \hat{e}_{a'}}{\partial \xi^{c'}}}\frac{\partial \xi^{c'}}{\partial x^b} = \frac{\partial^2 \xi^{a'}}{\partial x^a \partial x^b}\frac{\partial x^d}{\partial \xi^{a'}}\hat{e}_d = \Gamma^d_{ab}\hat{e}_d. \tag{3.4}$$

Una volta capito come varia un versore nel sistema globale la (3.1) diventa

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^b} = \frac{\partial v^a}{\partial x^b}\hat{e}_a + v^c \Gamma^a_{bc}\hat{e}_a = \left(\frac{\partial v^a}{\partial x^b} + v^c \Gamma^a_{bc}\right)\hat{e}_a = v^a_{;b}\hat{e}_a \tag{3.5}$$

cioè

$$v^a_{;b} = \frac{\partial v^a}{\partial x^b} + v^c \Gamma^a_{bc} \tag{3.6}$$

che è proprio la definizione di derivata covariante di un vettore, cioè un tensore di tipo (1,0) [13].

Ritornando all'argomento principale di questa sezione, il campo tetradico si definisce in ogni punto della varietà come una base di vettori ortonormali e^a_A dove con le lettere maiuscole ci si riferisce alle coordinate locali (A,B,C...=0,1,2,3) mentre con quelle minuscole alle coordinate globali (a,b,c...=0,1,2,3). Si dimostra che i coeficienti e^a_A sono elementi del gruppo lineare delle matrici invertibili

4x4 $GL(4,\mathbb{R})$, in quanto una varietà può essere considerata come un gruppo di Lie [6].

Si definiscono anche le cotetradi e_a^A in modo tale che siano verificate le seguenti relazioni:

$$e_A^a e_b^A = \delta_b^a \tag{3.7}$$

$$e_a^A e_B^a = \delta_B^A \tag{3.8}$$

Invece la metrica tetradica è

$$\eta_{AB} = \eta^{AB} = diag(-1,1,1,1) \tag{3.9}$$

Dalle relazioni (3.7) e (3.8) si ottiene

$$\hat{e}_A = e_A^a \hat{e}_a \tag{3.10}$$

per cui il tensore metrico dello spazio tempo si può esprimere nel seguente modo:

$$g_{ab} = \eta_{AB} e_a^A e_b^B = \eta_{AB} \frac{\partial \xi^A}{\partial x^a} \frac{\partial \xi^B}{\partial x^b} \tag{3.11}$$

Si noti a questo punto che adoperando il formalismo tetradico è possibile esprimere in maniera quasi immediata un generico vettore nello spazio curvo attraverso la base del sistema locale[10]: proprietà che sarà utile in seguito per la scomposizione e quindi per la classificazione del tensore di torsione; dato il vettore $\mathbf{B} = B^a \hat{e}_a$ si ha:

$$B^a = e_A^a B^A \tag{3.12}$$

3.3 Bivettori

Dopo aver introdotto il formalismo tetradico è altrettanto utile definire i bivettori, in particolare i bivettori semplici, entità che saranno utilizzate nella classificazione della torsione.

In generale un bivettore può essere visto come un tensore di tipo (0,2); si definisce, invece, bivettore semplice un bivettore che si può esprimere come prodotto tensoriale antisimmetrico (prodotto esterno) di due vettori. In questo senso si può visualizzare un bivettore come un elemento d'area orientato all'interno di un piano i cui lati sono proprio i due vettori di partenza.

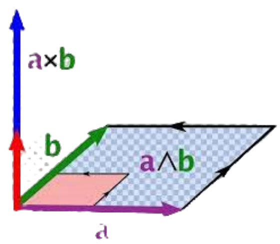

Figura 3.3: Rappresentazione grafica di un bivettore.

Si può dimostrare che in spazi a 2 o 3 dimensioni qualsiasi bivettore è semplice, mentre nello spazio-tempo quadridimensionale un bivettore si dice semplice se e solo se verifica la seguente relazione

$$A^{[ab}A^{c]d} = 0 \tag{3.13}$$

A partire dai vettori di una tetrade in una varietà n-dimensionale è possibile costruire n(n-1)/2 bivettori semplici del tipo

$$B^{ab}_{AB} = e^{[a}_{A}e^{b]}_{B} \tag{3.14}$$

E inoltre ogni bivettore può esprimersi in termini delle tetradi nel seguente modo

$$A^{ab} = A^{AB}e^{a}_{A}e^{b}_{B} \tag{3.15}$$

con $A^{AB} = -A^{BA}$ per l'antisimmetria del prodotto esterno [12].

3.4 Decomposizione della torsione e proprietà in $\mathbf{U}_4$

Per completare l'insieme di strumenti essenziali per raggiungere lo scopo di questa trattazione bisogna infine evidenziare un'importante proprietà del tensore di torsione, e cioè che esso è decomponibile in tre tensori irriducibili:

$$S_{ab}{}^{c} ={}^{T} S_{ab}{}^{c} +{}^{A} S_{ab}{}^{c} +{}^{V} S_{ab}{}^{c} \tag{3.16}$$

Dove la T sta per *traceless*, la V per *vector* e la A, che rappresenta la parte totalmente antisimmetrica del tensore, sta per *assiale*. In generale data una varietà n-dimensionale il tensore di torsione ha
$n^2(n-1)/2$ componenti, quindi in $\mathbf{U}_4$ ne ha 24, che i tre tensori irriducibili si distribuiscono in questo modo: ${}^{T}S_{ab}{}^{c}$ ne ha 16, ${}^{A}S_{ab}{}^{c}$ ne ha 4 e ${}^{V}S_{ab}{}^{c}$ ha le rimanenti 4 [12].

Questi tre tensori possono esprimersi, tenendo conto delle relazioni introdotte nella sezione 3.2, in termini delle tetradi:

$${}^{V}S_{ab}{}^{c} = \frac{1}{3}(S_a\delta^c_b - S_b\delta^c_a) \tag{3.17}$$

$${}^{A}S_{ab}{}^{c} = g^{cd}S_{[abd]} \tag{3.18}$$

E infine

$${}^{T}S_{ab}{}^{c} = S_{ab}{}^{c} -{}^{A} S_{ab}{}^{c} -{}^{V} S_{ab}{}^{c} \tag{3.19}$$

Dove con S_a si intende la contrazione del tensore di torsione tra secondo e terzo indice.

Infine si può definire l'operazione duale

$${}^{+}S_{ab}{}^{c} = \frac{1}{2}\epsilon^{de}{}_{ab}S_{de}{}^{c} \tag{3.20}$$

Che ha l'importante proprietà di mettere in relazione una A-torsione con una V-torsione e viceversa, mentre associa T-torsioni ad altre T-torsioni [12].

Capitolo 4

L'equazione di Einstein-Cartan

Entriamo adesso nel merito della teoria Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECSK), che rappresenta l'espansione più vicina alla teoria originale della GR. Anche in questo caso le equazioni di campo si ricavano attraverso un principio variazionale scegliendo come Lagrangiana

$$L = \sqrt{-g}\left(\frac{R}{2k} + \mathcal{L}_m\right) \tag{4.1}$$

Con $k = 8\pi \mathrm{G}$ in unità naturali.

Il termine in parentesi rappresenta la nuova densità di Lagrangiana mentre $\sqrt{-g}$ è l'elemento di volume invariante. Si noti l'aggiunta del termine $\mathcal{L}_m$ che rappresenta la densità di Lagrangiana per il campo di materia; dalla sua variazione si originano i seguenti contributi:

$$\mathbf{t}^{ab} = \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g_{ab}} \tag{4.2}$$

$$\tau_c{}^{ba} = \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta K_{ab}{}^c} \tag{4.3}$$

Il primo rappresenta il tensore stress-energia; se si considera la materia come un fluido perfetto assume la seguente forma:

$$\mathbf{t}^{ab} = (p+\rho)u^a u^b - p g^{ab} \tag{4.4}$$

Il secondo contributo è una novità assoluta e rappresenta la sorgente della torsione. Esso può essere associato ad una *densità di spin* ma esistono diversi casi in cui tale identificazione non è possibile, cioè quando la controparte fenomenologica è assente.

Introducendo un tensore energia-impulso che tenga conto del contributo della torsione

$$\Sigma^{ab} = \mathbf{t}^{ab} +^* \tilde{\nabla}_c(\tau^{abc} - \tau^{bca} + \tau^{cab}) \tag{4.5}$$

con ${}^*\tilde{\nabla}_c := \tilde{\nabla}_c + 2S_{cd}{}^d$

Allora è possibile derivare le equazioni del campo per la teoria ECSK dalla variazione della relazione (4.1):

$$\tilde{G}^{ab} = k\Sigma^{ab} \tag{4.6}$$

E anche

$$T_{ab}{}^{c} = k\tau_{ab}{}^{c} \tag{4.7}$$

Le relazioni (4.6), dette equazioni del campo di Einstein-Cartan, sono una generalizzazione delle equazioni di Einstein in $\mathbf{U}_4$: tenendo conto della (4.5) si vede che anche le equazioni del campo includono il contributo della torsione e quindi si ha un'ulteriore conferma del fatto che essa ha un ruolo nel determinare la dinamica del sistema.

Si osservi inoltre che la relazione (4.7) è algebrica e a partire da essa è possibile includere la (4.6) in un'equazione di Einstein classica sostituendo i termini della torsione con le loro sorgenti. Nel fare ciò si ottiene un tensore energia-impulso effettivo che rappresenta la sorgente della parte Riemanniana del tensore di Einstein; si ha:

$$G^{ab} = k\tilde{\mathbf{t}}^{ab} \tag{4.8}$$

Dove il tensore energia-impulso effettivo ha la seguente forma:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{t}}^{ab} = \mathbf{t}^{ab} + k\,\big[&-4\tau^{ac}{}_{[d}\tau^{bd}{}_{c]} - 2\tau^{acd}\tau^{b}_{cd} \\ &+ \tau^{cda}\tau_{cd}{}^{b} + \frac{1}{2}g^{ab}(4\tau_{e}{}^{c}{}_{[d}\tau^{ed}{}_{c]} + \tau^{ecd}\tau_{ecd})\end{aligned} \tag{4.9}$$

Si osservi infine che quando vengono considerati fluidi con spin il tensore di stress-energia deve essere modificato per tener conto del nuovo contributo, proprio come avviene nella (4.9) [12].

Capitolo 5

La classificazione dei tensori di Torsione

Dopo aver introdotto gli strumenti matematici necessari alla trattazione è possibile finalmente proporre una classificazione dei tensori di torsione introdotti nella sezione (3.4) in base alle loro proprietà geometriche.

5.1 Prima classificazione: tensori di torsione elementari

5.1.1 Il formalismo covariante

In seguito alla formulazione della relatività ristretta prima e di quella generale poi nacque l'esigenza di riscrivere le leggi della fisica in formalismo covariante, in modo tale da inserirle nel più ampio quadro della nascente teoria quantistica dei campi; fu negli stessi anni, infatti, che ebbe grande sviluppo la branca della geometria riguardante le cosiddette *forme differenziali*: affiancate a strumenti concettuali di incredibile potenza, il *lemma di Poincaré* e il *teorema di Cartan*, queste hanno sostituito il formalismo scaturito dalla più antica analisi vettoriale [3].
Bisogna allora soffermarsi un attimo sui cambiamenti portati dalla relatività ristretta: infatti l'introduzione dei quadri-vettori ha delle importanti implicazioni. La più importante fra queste è l'imposizione di una "condizione di compatibilità" che ogni campo vettoriale candidato a rappresentare una quadri-forza deve necessariamente rispettare; si osservi infatti che in base alle definizioni di tempo proprio e quadri-velocità

$$\tau(t) = \int_{t_o}^{t} \sqrt{1 - \frac{v(t')^2}{c^2}} dt' \quad \text{e} \quad u^a = \frac{dx^a}{d\tau}$$

si ottiene che

$$\|u\|^2 = \langle u|u\rangle = c^2 \tag{5.1}$$

da cui si dimostra che quadri-velocità e quadri-accelerazione sono perpendicolari:

$$0 = \frac{dc^2}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\langle u|u\rangle = \langle \frac{du}{d\tau}|u\rangle + \langle u|\frac{du}{d\tau}\rangle = 2\langle \frac{du}{d\tau}|u\rangle = 2\langle a|u\rangle. \tag{5.2}$$

Dalla (5.2) si ricava che la quadri-forza è perpendicolare alla velocità.
Principale conseguenza di tale condizione é che che ogni forza è descritta da un tensore antisimmetrico di tipo (0,2), cioè una 2-forma differenziale [8].

5.1.2 I tensori elementari

É allora possibile sviluppare una prima classificazione dei tensori di torsione ponendosi in analogia col caso elettromagnetico in cui il campo è descritto tramite il *tensore di Faraday*. Quest'ultimo può essere costruito a partire dal prodotto tensoriale di un vettore con un bivettore [14] e si osserva che anche il tensore di torsione può essere rappresentato in questo modo; introducendo il seguente *lemma*

"un generico bivettore su una varietà quadridimensionale è esprimibile, con una particolare scelta di coordinate, come la somma di due bivettori semplici"

è possibile introdurre il concetto di *tensori elementari*, cioè ottenuti dal prodotto tensoriale di un bivettore semplice e di un vettore [12].

Ricordando che un vettore e un bivettore sono ortogonali se e solo se $V^a B_{ab} = 0$, è possibile considerare solo due casi (tutti gli altri saranno combinazioni di questi due): cioè quando il quadrivettore è ortogonale al bivettore oppure quando esso è una sua componente.

In questo modo è possibile classificare i 24 tensori di torsione elementari in base alle proprietà spazio-temporali dei vettori e bivettori che li compongono.

Innanzitutto bisogna costruire praticamente il tensore elementare di torsione a partire dalle tetradi; se il tensore di torsione si esprime nel seguente modo

$$\begin{aligned} S_{ab}{}^{c} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \xi^A}{\partial x^a \partial x^b}\frac{\partial x^c}{\partial \xi^A} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^b \partial x^a}\frac{\partial x^c}{\partial \xi^A}\right) = \\ &= \frac{1}{2} e^c_A (a^A_{a,b} - e^A_{b,a}) \end{aligned} \tag{5.3}$$

allora un generico tensore elementare può definirsi nel modo seguente:

$$\begin{aligned} S^{(el)c}_{ABCab} &= \left(\frac{\partial \xi^A}{\partial x^a}\frac{\partial \xi^B}{\partial x^b}\frac{\partial x^c}{\partial \xi^C} - \frac{\partial \xi^A}{\partial x^b}\frac{\partial \xi^B}{\partial x^a}\frac{\partial x^c}{\partial \xi^C}\right) = \\ &= e^c_A (e^A_a e^B_b - e^A_b e^B_a) = \\ &= e^c_C e^A_{[a} e^B_{b]} \end{aligned} \tag{5.4}$$

In base a questa definizione un qualsiasi tensore di torsione si può esprimere nel seguente modo:

$$S_{ab}{}^{c} = S_{AB}{}^{C} e^{c}_{C} e^{A}_{[a} e^{B}_{b]} \tag{5.5}$$

Dove i coefficienti sono

$$S_{AB}{}^{C} = S_{ab}{}^{c} e^{c}_{C} e^{A}_{[a} e^{B}_{b]} \tag{5.6}$$

Considerando il caso in cui il vettore V^a è ortogonale al piano individuato dal bivettore B_{ab} si possono classificare i tensori di torsione nei seguenti tre sotto-casi, nuovamente in analogia col caso elettromagnetico:

a) *Caso puramente elettrico:* se B_{ab} è ottenuto dal prodotto tensore antisimmetrico di un covettore time-like per un covettore space-like, allora V^a dev'essere un qualsiasi vettore space-like ortogonale a B_{ab}. Questo caso è rappresentato da un'unica famiglia di tensori etichettata con il simbolo *Es*;

b) *Caso puramente magnetico:* V^a può essere sia time-like, space-like o nullo, per cui tale caso è rappresentato da tre diverse famiglie: rispettivamente *Bt*, *Bs*, *Bn*;

c) *Caso nullo:* V^a può essere sia space-like che nullo, per cui avremo due le due famiglie *Ns*, *Nn*.

Per quanto riguarda il caso in cui V^a giace nel piani definito dal bivettore si noti soltanto che se $B \equiv$C allora il tensore di torsione elementare, così com'è stato definito nella (5.4), diventa una V-torsione [12].

5.2 Classificazione in termini di tensori irriducibili in quattro dimensioni

In questa sezione si classificheranno i tensori di torsione in base alle loro proprietà irriducibili.

Si inizia col considerare la V-torsione e si osserva immediatamente dalla (3.17) che essa è caratterizzata dal covettore

$$S_a = S_{ab}{}^{b} \tag{5.7}$$

e osservando che S_a può essere sia time-like, space-like oppure light-like (nullo) otteniamo tre differenti tipi di V-torsioni identificati dai simboli *Vt*, *Vs* e *Vl*. Si noti inoltre che la V-torsione si esprime come combinazione di tensori elementari; infatti dalle relazioni (3.7) e (3.17) si ottiene:

$${}^{V}S_{ab}{}^{c} = \frac{2}{3} S_{[a} e^{A}_{b]} e^{c}_{A} \tag{5.8}$$

Invece ricordando la (3.18) la A-torsione può esprimersi nel seguente modo introducendo il simbolo di Levi-Civita per la permutazione degli indici

$${}^{A}S_{abc} = \epsilon_{abcd} V^{d} \tag{5.9}$$

per cui le sue proprietà sono determinate dalle proprietà spazio temporali del vettore $\mathbf{V}$.

In analogia con il caso della V-torsione identifichiamo tre famiglie di T-torsioni At, As e Al in base alla natura del vettore $\mathbf{V}$ [11].

Si osservi che in base a questa classificazione è possibile dare prova dell'osservazione seguita alla relazione (3.20) operando un calcolo diretto: si vede infatti che

$$\epsilon^{de}{}_{ab}S_{[d}\delta^c_{e]} = \epsilon^{dc}{}_{ab}S_d \tag{5.10}$$

che in base alla classificazione (5.9) è una A-torsione. D'altro canto, ricordando le proprietà del simbolo di levi-Civita

$$\epsilon_{abc}\epsilon_{ade} = \delta_{bd}\delta_{ce} - \delta_{be}\delta_{cd} \tag{5.11}$$

si ottiene

$$\epsilon^{ef}{}_{ab}\epsilon_{def}{}^{c}S^d = S_{[a}\delta^c_{b]} \tag{5.12}$$

cioè una V-torsione, per cui effettivamente l'operazione duale definita dalla (3.20) trasforma V-torsioni in A-torsioni e viceversa.

A questo punto è possibile esprimere anche la T-torsione attraverso una combinazione di tensori elementari:

$$^{T}S_{ab}{}^{c} = V_{[a}e^A_{b]}C_A{}^B e^c_B \tag{5.13}$$

o analogamente

$$^{T}S_{ab}{}^{c} = \epsilon^{ef}{}_{ab}V_{[e}e^A_{f]}C_A{}^B e^c_B \tag{5.14}$$

Dove $C_A{}^B$ è una matrice arbitraria i cui elementi possono essere determinati imponendo dei vincoli.

La condizione di traccia nulla impone che

$$V_{[a}e^A_{b]}C_A{}^B e^b_B = 0 \tag{5.15}$$

$$\epsilon^{ef}{}_{ab}V_{[e}e^A_{f]}C_A{}^B e^b_B = 0 \tag{5.16}$$

allora fissando V_a nelle relazioni (5.13) e (5.14) si ottengono 7 vincoli su $C_A{}^B$, per cui la matrice $C_A{}^B$ avrà solo 9 componenti indipendenti; ma poiché la T-torsione di componenti ne ha 16, bisogna imporre delle ulteriori condizioni. Supponendo che $V^2 = V^aV_a \neq 0$ si può imporre che

$$C_A{}^B e^A_a e^b_B V^a V_b = 0 \tag{5.17}$$

e in questo modo uno dei vincoli determinati dalla (5.15) si riduce alla condizione di traccia nulla per la matrice C

$$C_A{}^A = 0 \tag{5.18}$$

Si può concludere allora che anche i tensori di T-torsione possono essere classificati in base alla natura del vettore $\mathbf{V}$ ottenendo tre differenti tipi di T-torsione indicati dai simboli Tt, Ts e Tl [12].

Capitolo 6

Conclusioni

Come anticipato diverse volte nei capitoli precedenti, la torsione appare in un ampio ventaglio di occasioni; allora una classificazione in termini geometrici della torsione é utile per districarsi in un tale dedalo di situazioni e in particolare per distinguere quelle in cui essa assume significati fisici diversi.

Di seguito si elencano alcuni esempi in cui appaiono diversi tensori di torsione in base alla classificazione proposta in questo elaborato:

1. Il primo esempio proposto è quello delle teorie in $\mathbf{U}_4$ in cui lo scalare di Ricci è R^2 cioè R per se stesso. In tali teorie si osserva che la torsione è collegata al gradiente del campo scalare: per esempio nelle cosmologie omogenee si ottiene un tensore di tipo *Vt*, mentre nella soluzione di Schwartzchild si ha un tensore *Vs*.

2. Rimanendo sempre in ambito cosmologico, si dimostra che gli unici tensori di torsione compatibili con un universo di Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker sono quelli di tipo *Vt* e *At*.

3. É anche possibile discutere il contributo di tensori di torsione di tipo *At* sulle perturbazioni cosmologiche

4. Nella *supergravità semplice* si può trovare un tensore di T-torsione dato in termini degli spinori di Rarita-Schwinger.

5. Si possono descrivere onde piane elettromagnetiche nulle attraverso tensori di torsione di tipo *Vl* e *Al*.

6. Poichè i vettori space-like indicano una direzione privilegiata i tensori del tipo *Vs* e *As* introducono anisotropie nello spazio tempo.

7. Lo spin di particelle classiche di Dirac dà origine a delle torsioni di tipo *As* per particelle massive, a delle torsioni di tipo *An* per neutrini senza massa, mentre le particelle tachioniche di Dirac generano delle torsioni di tipo *At*.

Si propone adesso un'analisi del contributo della torsione al tensore di energia-impulso introdotto nel capitolo 4, in base alla classificazione dei tensori irriducibili proposta nel capitolo 5.

Si ottiene che i contributi della parte antisimmetrica e di quella vettoriale del tensore di torsione sono proporzionali alle seguenti relazioni:

$$ {}^{A}\mathbf{t}_a^b = 2\sigma^b\sigma_a + \delta_a^b\sigma^a\sigma_c \tag{6.1} $$

$$ {}^{V}\mathbf{t}_a^b = \frac{8}{3}S^bS_a - \frac{4}{3}\delta_a^bS^cS_c \tag{6.2} $$

Invece per quanto riguarda il contributo della T-torsione, espressa attraverso la relazione (5.13), si ottiene:

$$ \begin{aligned} {}^{T}\mathbf{t}^{ab} = &-C^{cd}C_{(cd)}V^aV^b - V^cC_{cd}V^{(a}C^{b)d} + \frac{1}{2}V^cV_c({C_f}^aC^{fb} - {C^a}_fC^{bf}) \\ &-\frac{1}{2}V^cV^d{C_c}^a{C_d}^b + \frac{1}{2}g^{ab}(C^{cd}C_{(cd)}V^fV_f - \frac{1}{2}V^cC_{cd}V^f{C_f}^d \end{aligned} \tag{6.3} $$

Se invece si considera la T-torsione espressa dalla relazione (5.14) si ha:

$$ \begin{aligned} {}^{T}\mathbf{t}^{ab} = &\,C^{cd}C_{cd}V^aV^b + V^dV_d({C_f}^aC^{fb} + {C^a}_fC^{bf}) - V^cV^d{C_c}^a{C_d}^b \\ &-V^fC_{fd}(V^aC^{bd} + V^bC^{ad}) + \frac{1}{2}(V^cV^dC_{cf}{C^f}_d - V^fV_fC^{cd}C_{cd}) \end{aligned} \tag{6.4} $$

Dove si intende ${C_a}^b = {C_A}^B{e^A}_a{e_B}^b$.

Infine vi è anche il contributo di un tensore di torsione elementare del tipo ${S_{ab}}^c = F_{ab}\Sigma^c$ attraverso un tensore simmetrico proporzionale alla seguente relazione:

$$ {}^{e}\mathbf{t}_a^b = -2\Sigma^2F^{bc}F_{ac} + F^2\Sigma^b\Sigma_a - \frac{1}{2}F^2\Sigma^2\delta_a^b \tag{6.5} $$

Con $\Sigma^2 = \Sigma_a\Sigma^a$ e $F^2 = F^{ab}F_{ab}$ [11].

Nonostante fino a questo punto si siano discussi i contributi della torsione a svariati campi d'interesse della fisica moderna, tutti quelli sopracitati sono ascrivibili all'ambito prettamente teorico. Si vuole allora concludere questo elaborato con una breve discussione su come la torsione possa contribuire a spiegare una discrepanza tra il *Modello Standard* (teoria attualmente utilizzato per descrivere tre interazioni fondamentali su quattro) e le recenti evidenze sperimentali nello studio delle particelle ad alte energie. Secondo il modello teorico, infatti, la particella denominata muone ha un fattore giromagnetico uguale a 2, ma recenti test svolti in diversi acceleratori di particelle, l'ultimo relativo all'esperimento *muon g-2*, hanno rivelato che g potrebbe differire da tale valore con uno scarto dell'ordine di 10^{-10} [9].

La cosiddetta *anomalia del muone*, che potrebbe aprire nuove prospettive per la fisica moderna, sia teorica che sperimentale, si può spiegare tramite il contributo del campo di torsione. In particolare attraverso due contributi distinti, uno

relativo alla A-Torsione ${}^{A}S$ ed uno relativo alla T-Torsione ${}^{T}S$.
Sotto determinate ipotesi questi due contributi possono essere trattati separatamente [9].
Entrando del dettaglio, il campo della A-Torsione appare come un grado di libertà di propagazione il cui contributo, sempre negativo, è visibile dal diagramma a loop riportato in Fig. 6.1, rappresentato dall'arco tratteggiato.
Per quanto riguarda la T-Torsione, invece, essa costituisce un campo dinamico di propagazione il cui contributo, sempre positivo, è anch'esso rappresentato graficamente in Fig. 6.1 tramite la curva tratteggiata.

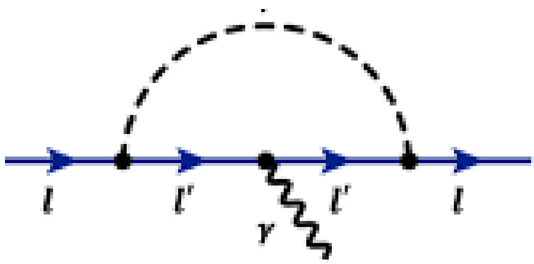

Figura 6.1: Diagramma a loop rappresentante l'anomalia del muone.

Se tali previsioni dovessero essere corrette e si accertasse un'effettiva correlazione tra l'anomalia del muone e la presenza del campo di torsione allora i risultati sperimentali potrebbero essere utilizzati per calcolare una prima stima dei vincoli ai parametri spaziali dell'azione del campo di torsione [9].

Bibliografia

[1] J. A. Wheeler C. W. Misner K. S. Thorne. *Gravitation*. Princeton: Princeton Univ Pr, 2017.

[2] S. Capozziello e V. Faraoni. *Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*. Dordrecht: Springer, 2011.

[3] M. P. Do Carmo. *Differential Forms and Applications*. Dordrecht: Springer, 1998.

[4] M. P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. London: Dover Pubns, 2017.

[5] S. Carroll. *Space-Time and Geometry: an introduction to general relativity*. London: Addison-Wesley, 2004.

[6] B. C. Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations*. New York: Springer, 2015.

[7] K. Jaenich. *Vector Analisys*. Dordrecht: Springer, 2001.

[8] D. V. Schroeder M. E. Peskin. *An Introduction To Quantum Field Theory*. Boca Raton: CRC Press, 2019.

[9] P. Das U. Mahanta S. Raychaudhuri. *Torsion contraints from the recent precision measurement of the muon anomaly*. URL: `arXiv:hep-ph/0211137v1`. (accessed: 10.11.2002).

[10] Y. F. Cai S. Capozziello M. De Laurentis E. N. Saridakis. *f(T) teleparallel gravity and cosmology*. Rept. Prog. Phys. 79. (2016), p. 106901.

[11] S. Capozziello C. Stornaiolo. *Torsion tensor and its geometric interpretation*. Annales Fond. Broglie 32. (2007), p. 196.

[12] S. Capozziello G. Lambiase C. Stornaiolo. *Geometric classification of torsion tensor of space-time*. Ann. Phys. 10. (2001), p. 713.

[13] P. Pani V. Ferrari L. Gualtieri. *General Relativity and its Applications*. Boca Raton: CRC Press, 2021.

[14] C. von Westenholz. *Differential Forms in Mathematical Physics*. Amsterdam: North-Holland, 1978.