

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”**



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

**Il fenomeno dell’Entanglement in Meccanica
Quantistica**

Relatori:

Prof. Massimo Taronna

Candidato:

Marco Preziuso

Matr. N85001238

Anno Accademico 2021/2022

Sommario

Nel presente lavoro di tesi ci si propone di indagare la natura quantistica della realtà fisica partendo dai postulati cardine della teoria sviluppati intorno agli anni trenta del Novecento per arrivare alle moderne applicazioni.

Si studieranno dunque i concetti di operatore densità, qubit e decomposizione di Schmidt, utili ad introdurre il fenomeno più accattivante e sorprendente della teoria quantistica, ovvero il fenomeno dell'*Entanglement*, illustrandone alcuni esempi. Sarà poi discussa l'entropia di Von Neumann come strumento per quantificare l'Entanglement prima di presentare il problema del paradosso EPR e la relativa soluzione data dal teorema di Bell. Infine saranno brevemente discussi alcuni risultati della teoria dell'informazione quantistica moderna ed il suggestivo *Teletrasporto quantistico* come sua applicazione.

Indice

Introduzione	1
1 I postulati della meccanica quantistica	3
2 Le miscele statistiche e l'operatore densità	9
2.1 Miscele statistiche di stati	9
2.2 L'operatore densità negli stati puri	11
2.3 L'operatore densità nelle miscele statistiche	14
3 Il Qubit e l'Entanglement	18
3.1 Spin- $\frac{1}{2}$ e sistemi aperti	19
3.2 La correlazione quantistica: l'Entanglement	20
3.3 Matrice Densità Ridotta	23
3.4 Decomposizione di Schmidt	25
3.5 Un esempio pratico	28
3.6 Differenza tra correlazione semplice ed Entanglement	30
4 Misure di entanglement	32
4.1 Entropie di Shannon, Von Neumann e Rényi	32
4.2 Entropia di Von Neumann come misura dell'Entanglement	35
4.3 Esempi ed ulteriori proprietà	36
5 Controversie, esperimenti ed applicazioni	39
5.1 L'Articolo EPR	39
5.2 Il Teorema di Bell	41
5.3 Alcuni esperimenti sulle disuguaglianze di Bell	47
5.4 Il Teorema No-Cloning ed il Teletrasporto quantistico	50
A Differenza tra miscela statistica e sovrapposizione lineare	56
Bibliografia	58

Introduzione

Sin dai propri albori, la teoria quantistica, risultò chiaramente anacronistica, addirittura del tutto inaccettabile per alcuni fisici del tempo. Tra questi oppositori, anche il celebre A. Einstein fece la sua comparsa, rappresentando in qualche modo la classe di fisici che riteneva la meccanica quantistica una teoria non completa a causa del suo aspetto probabilistico.

Nel corso dei congressi di Solvay furono numerosi gli attacchi del fisico tedesco alla teoria dei quanti ma questi vennero tutti prontamente respinti da N. Bohr, cofondatore e sostenitore della meccanica quantistica. La più aspra e convinta opposizione fu quella presentata insieme a Podolski e Rosen: con la pubblicazione dell'articolo passato alla storia con il nome di *Paradosso EPR*, Einstein "prese per la gola il dogma della meccanica quantistica", come fece notare Bohr dopo aver letto l'articolo. Il paradosso era legato così prepotentemente ai postulati della meccanica quantistica che accettarne il contenuto significava mettere in dubbio direttamente tutta la teoria dei quanti. La risposta di Bohr coinvolse l'Entanglement, ovvero un fenomeno di correlazione a distanza tra sistemi senza nessuno scambio di particelle bosoniche, chiaramente in contrasto con la teoria della relatività di Einstein.

Fu necessario l'intervento del fisico irlandese John Bell per chiarire senza equivoci la questione: il teorema da lui formulato (e che porta il suo nome), fornisce un modo concreto per valutare la validità di una teoria a variabili nascoste locali (di cui Einstein era sostenitore) rispetto alla meccanica quantistica. È necessario chiarire che il teorema di Bell non asserisce che la teoria quantistica sia la teoria fisica ultima, né tantomeno ne garantisce la correttezza. Il merito del teorema fu quello infatti di fornire credibilità alla teoria dei quanti individuando nella teoria proposta da EPR una teoria non corretta e quindi da scartare. È importante dunque comprendere come Bell sia stato il risolutore di questa contesa senza però fraintendere il reale risultato fisico del suo lavoro.

Con questo elaborato si intende presentare al lettore il fenomeno noto col nome di Entanglement, definito come "il tratto più caratteristico della meccanica quantistica" da E. Schrödinger. Si introdurranno gli elementi matematici, par-

tendo dai postulati della meccanica quantistica, per comprendere la natura di tale fenomeno, cercando di descriverlo e, con la definizione dell'Entropia di Von Neumann, quantificarlo quando possibile. Si mostrerà poi come questo sia stato fondamentale nella risoluzione del paradosso EPR, conducendo al teorema di Bell e successivamente al fallimento della teoria a variabili nascoste locali. Si discuterà infine come tale fenomeno, debitamente maneggiato, possa essere alla base di complesse applicazioni nell'ambito dell'informazione quantistica come il teletrasporto quantistico.

Capitolo 1

I postulati della meccanica quantistica

La Meccanica Quantistica è un modello matematico del mondo fisico teorizzata e sviluppata da diversi fisici nei primi decenni del ventesimo secolo. Per quanto concerne i sistemi chiusi (ovvero perfettamente isolati), tale modello può essere completamente descritto asserendo alcuni postulati che rispettivamente specificano il modo in cui sono rappresentati stati, osservabili, misurazioni e dinamica oltre a specificare il formalismo di combinazione di due sistemi diversi per ottenere un sistema composito [2] [9].

Postulato 1 - Stati In Meccanica Quantistica, ad ogni sistema è associato uno spazio di Hilbert. Uno stato del sistema viene descritto mediante un raggio dello spazio ad esso associato ed esso contiene in sé la completa descrizione del sistema in esame.

Si ricorda brevemente cosa sia uno spazio di Hilbert:

- a) È uno spazio vettoriale sul campo dei numeri complessi \mathbb{C} . I vettori dello spazio sono denotati con $|\psi\rangle$ nella consueta notazione *bra-ket* di Dirac.
- b) È dotato di un *prodotto interno* indicato con $\langle\psi|\varphi\rangle$ che porta una coppia ordinata di vettori in \mathbb{C} e possiede le seguenti proprietà:
 - i) Positività: $\langle\psi|\psi\rangle > 0$ per $|\psi\rangle \neq 0$.
 - ii) Linearità: $\langle\psi|(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a\langle\psi|\psi_1\rangle + b\langle\psi|\psi_2\rangle$.
 - iii) Antisimmetria: $\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle^*$ (dove con * si è indicato il complesso coniugato.)
- c) È completo secondo la norma indotta dal prodotto scalare $\|\psi\| = \langle\psi|\psi\rangle^{1/2}$.

Con il termine *raggio* si intende una classe di equivalenza di vettori che differiscono tra loro per una costante moltiplicativa complessa non nulla di modulo pari a 1. Per ogni raggio non nullo è allora possibile scegliere un elemento rappresentativo della classe che abbia norma unitaria:

$$\|\psi\| = \langle \psi | \psi \rangle^{1/2} = 1. \quad (1.1)$$

Gli stati di un sistema corrispondono dunque a vettori normalizzati e la fase globale del vettore non ha in generale senso fisico: $|\psi\rangle$ e $e^{i\alpha} |\psi\rangle$ dove $|e^{i\alpha}| = 1$ descrivono lo stesso stato. Poiché ogni raggio corrisponde ad uno stato possibile, dati due stati $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$, un terzo stato può essere costruito come combinazione lineare dei due, dove questa volta è la fase complessiva ad essere fisicamente non rilevante, mentre la fase relativa è rilevante, formalmente si può scrivere:

$$a |\psi\rangle + b |\varphi\rangle = e^{i\alpha} (a |\psi\rangle + b |\varphi\rangle) \neq a |\psi\rangle + e^{i\alpha} b |\varphi\rangle. \quad (1.2)$$

Questa proprietà si esprime in maniera sintetica asserendo che la Meccanica Quantistica rispetta il *Principio di sovrapposizione*.

Viene utilizzata poi la notazione $\langle \psi |$ per indicare un *bra* (*vettore duale* o *covettore*), ossia un'applicazione lineare che porta vettori in numeri complessi, definita come:

$$\langle \psi | : |\varphi\rangle \rightarrow \langle \psi | \varphi \rangle \quad (1.3)$$

e si è già precedentemente definito il prodotto interno.

Viene infine ricordato che ogni vettore deve avere una dipendenza temporale in quanto ogni stato fisico deve dipendere verosimilmente dal tempo; nei casi in cui la dipendenza temporale è rilevante nella trattazione saranno indicati esplicitamente gli stati come $|\psi\rangle = |\psi(t)\rangle$.

Postulato 2 - Osservabili Si definisce grandezza osservabile una proprietà di un sistema fisico che può essere misurata. In Meccanica Quantistica, un'osservabile è rappresentata da un operatore auto-aggiunto nello spazio di Hilbert associato; lo spettro (sia esso discreto, continuo o misto) dell'osservabile costituisce il campo dei valori possibili per la grandezza.

Si definisce *operatore* \mathbf{A} un'applicazione lineare che porta vettori in vettori:

$$\mathbf{A} : |\psi\rangle \rightarrow \mathbf{A} |\psi\rangle, \quad \mathbf{A}(a |\psi\rangle + b |\varphi\rangle) = a \mathbf{A} |\psi\rangle + b \mathbf{A} |\varphi\rangle; \quad (1.4)$$

mentre l'operatore aggiunto \mathbf{A}^\dagger dell'operatore \mathbf{A} viene definito attraverso la relazione:

$$\langle \psi | \mathbf{A} \varphi \rangle = \langle \mathbf{A}^\dagger | \varphi \rangle \quad (1.5)$$

valida per tutti i vettori $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ e dove si è indicato con $|\mathbf{A}\psi\rangle$ il vettore $\mathbf{A}|\psi\rangle$. Un operatore viene detto allora auto-aggiunto (o autoaggiunto) se è uguale al suo aggiunto.

Il motivo fisico per cui ad una grandezza fisica viene associato un operatore autoaggiunto risiede nel teorema spettrale, secondo il quale gli autostati di un operatore autoaggiunto in uno spazio di Hilbert formano una base ortonormale completa per lo spazio. Pertanto, un operatore autoaggiunto \mathbf{A} potrà essere espresso come:

$$\mathbf{A} = \sum_n a_n \mathbf{P}_n \quad (1.6)$$

dove il simbolo di sommatoria indica la sommatoria su tutti gli autostati e viene quindi sostituito da un integrale nei casi in cui lo spettro sia continuo (e di conseguenza le successive delta di Kronecker dovranno essere sostituite da distribuzioni delta di Dirac). Gli a_n sono gli autovalori di \mathbf{A} mentre ogni \mathbf{P}_n è la proiezione ortogonale sullo spazio degli autovettori associati all'autovalore a_n . Per come sono definiti essi soddisfano le relazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n \mathbf{P}_m &= \delta_{n,m} \mathbf{P}_n \\ \mathbf{P}_n^\dagger &= \mathbf{P}_n \end{aligned} \quad (1.7)$$

In caso di autovalori non degeneri, il proiettore ortogonale sullo spazio 1-dimensionale originato dal vettore $|\psi\rangle$ può essere espresso come $|\psi\rangle\langle\psi|$ e dunque una rappresentazione spettrale alternativa per \mathbf{A} sarà:

$$\mathbf{A} = \sum_n a_n |n\rangle\langle n| \quad (1.8)$$

dove $|n\rangle$ è la base ortonormale di autostati di \mathbf{A} , con $\mathbf{A}|n\rangle = a_n |n\rangle$.

Postulato 3 - Misurazioni Una misurazione è un processo in cui un osservatore applica determinate procedure per ottenere informazioni sul determinato stato di un sistema. In Meccanica Quantistica, la misurazione di un'osservabile \mathbf{A} modifica lo stato del sistema portandolo in un suo autostato e l'osservatore acquisisce il valore dell'autovalore corrispondente. Se lo stato quantico immediatamente precedente alla misurazione è $|\psi\rangle$, allora l'autovalore a_n sarà ottenuto con una probabilità pari a:

$$\mathcal{P}(a_n) = \|\mathbf{P}_n |\psi\rangle\|^2 = \langle\psi|\mathbf{P}_n|\psi\rangle \quad (1.9)$$

Questo postulato è molto importante poiché mostra in maniera esplicita come le predizioni della Meccanica Quantistica anche per esperimenti ideali siano probabilistiche e non deterministiche.

Se una misura di \mathbf{A} effettuata sullo stato $|\psi\rangle$ fornisce il risultato a_n , allora lo stato quantico normalizzato subito dopo la misurazione sarà:

$$\frac{\mathbf{P}_n |\psi\rangle}{\|\mathbf{P}_n |\psi\rangle\|}. \quad (1.10)$$

Se la misurazione viene immediatamente ripetuta, allora secondo questa regola si dovrà ottenere lo stesso identico risultato con probabilità unitaria. Se molti sistemi preparati identicamente, ciascuno descritto dallo stato $|\psi\rangle$, subiscono una misurazione, allora il *valore di aspettazione* del risultato sarà:

$$\langle \mathbf{A} \rangle \equiv \sum_n a_n \mathcal{P}(a_n) = \sum_n a_n \langle \psi | \mathbf{P}_n | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle. \quad (1.11)$$

Postulato 4 - Dinamica La dinamica descrive come un sistema si evolve nel tempo. In Meccanica Quantistica, l'evoluzione temporale di un sistema chiuso è descritta da un operatore unitario.

Si ricorda che un operatore è definito unitario se accade che $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = 1$ o, equivalentemente, se esso conserva il prodotto interno tra due vettori.

Nella formulazione della dinamica proposta da E. Schrödinger, se lo stato iniziale del sistema al tempo t è $|\psi(t)\rangle$, lo stato finale $|\psi(t')\rangle$ al tempo t' può essere espresso come:

$$|\psi(t')\rangle = \mathbf{U}(t', t) |\psi(t)\rangle \quad (1.12)$$

dove $\mathbf{U}(t', t)$ è l'operatore unitario di evoluzione temporale. L'evoluzione temporale infinitesimale è invece descritta attraverso l'*equazione di Schrödinger*:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \mathbf{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (1.13)$$

in cui $\mathbf{H}(t)$ è un operatore autoaggiunto, chiamato *Hamiltoniano* del sistema poiché gli autovalori ad esso associato rappresentano gli stati energetici possibili del sistema, riprendendo quindi il concetto di Hamiltoniano della meccanica classica. Al primo ordine nella quantità infinitesima dt , l'equazione di Schrödinger può essere riscritta come:

$$|\psi(t + dt)\rangle = \frac{1}{\hbar} (\mathbf{I} - i\mathbf{H}(t)dt) |\psi(t)\rangle. \quad (1.14)$$

È facile verificare che l'operatore $\mathbf{U}(t + dt, t) \equiv \mathbf{I} - i\mathbf{H}(t) dt$ è dunque unitario, banalmente perché l'operatore \mathbf{H} è autoaggiunto. Dato che il prodotto di operatori unitari è esso stesso unitario, l'evoluzione temporale governata dall'equazione

di Schrödinger per un lasso di tempo finito sarà identificata da un operatore ancora unitario. Nel caso particolare in cui \mathbf{H} sia indipendente dal tempo, l'operatore di evoluzione temporale per intervalli finiti è esprimibile semplicemente nella forma $U(t', t) = e^{-i(t'-t)\mathbf{H}}$.

Postulato 5 - Sistemi composti Sia \mathcal{H}_A lo spazio di Hilbert degli stati del sistema A e sia \mathcal{H}_B lo spazio di Hilbert degli stati del sistema B . Lo spazio di Hilbert degli stati del sistema composto AB sarà il prodotto tensoriale $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Se il sistema A è preparato nello stato $|\psi\rangle_A$ ed il sistema B è preparato nello stato $|\psi\rangle_B$, allora lo stato del sistema composto sarà il prodotto tensoriale $|\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$.

Il prodotto tensoriale agisce in modo tale che se $|i\rangle_A$ denota una base ortonormale per \mathcal{H}_A e $|\mu\rangle_B$ una base ortonormale per \mathcal{H}_B , allora gli stati $|i, \mu\rangle_{AB} \equiv |i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B$ sono una base ortonormale per lo spazio $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, dove il prodotto interno su $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ è definito dalla relazione:

$$\langle i, \mu |_{AB} | j, \nu \rangle_{AB} = \delta_{i,j} \delta_{\mu,\nu}. \quad (1.15)$$

In tal senso, per indicare stati di sistemi composti, si adotterà indistintamente una delle notazioni equivalenti:

$$|i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B \equiv |i_A \mu_B\rangle \equiv |i, \mu\rangle_{AB} \equiv |i, \mu\rangle \equiv |i\mu\rangle \quad (1.16)$$

Successivamente, si può definire come prodotto tensoriale operatoriale $\mathbf{M}_A \otimes \mathbf{N}_B$ l'operatore che applica \mathbf{M}_A al sistema A e \mathbf{N}_B al sistema B . Matematicamente, dunque, l'azione di tale operatore sulla base $|i, \mu\rangle_{AB}$ è esprimibile come:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{N}_B |i, \mu\rangle_{AB} &= \mathbf{M}_A |i\rangle_A \otimes \mathbf{N}_B |\mu\rangle_B \\ &= \sum_{j,\nu} |j, \nu\rangle (\mathbf{M}_A)_{ji} (\mathbf{N}_B)_{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Seguendo le definizioni, un operatore che agisca banalmente sul sistema A può essere facilmente denotato con $\mathbf{I}_A \otimes \mathbf{N}_B$, dove \mathbf{I}_A è l'identità su \mathcal{H}_A . Allo stesso modo un operatore che agisca banalmente su B si denota con $\mathbf{M}_A \otimes \mathbf{I}_B$.

I cinque assiomi appena enunciati forniscono una descrizione matematica completa della Meccanica Quantistica. Essi non sono univoci ed esistono diverse formulazioni che prevedono diversi postulati.

Lo studio attento di tali postulati porta, però, ad osservare alcune differenze rispetto alla consueta descrizione classica della Natura: la prima è che l'equazione

per la dinamica (ovverosia l'equazione di Schrödinger) sia lineare, mentre nella meccanica classica le evoluzioni temporali dei sistemi sono governate da equazioni non lineari; la seconda, e più curiosa, differenza è che vengono presentati due modi profondamente differenti di cambiare lo stato di un sistema. L'evoluzione temporale ha una forma chiaramente deterministica poiché è completamente descritto dall'applicazione di un operatore unitario, il quale fa sì che noto lo stato iniziale $|\psi(t=0)\rangle$ allora sarà esattamente deducibile lo stato $|\psi(t)\rangle$ ad un istante di tempo t successivo. Dall'altra parte tuttavia, il processo di misurazione è una procedura esclusivamente probabilistica: la teoria non permette infatti di predire i risultati di una misurazione ma soltanto di assegnare ad essi una probabilità. Chiaramente ciò è tremendamente strano, poiché non si comprende il motivo per il quale il processo di misurazione debba essere governato da leggi fisiche così diverse da quelle che prevedono altri processi, come quello di evoluzione del sistema. Questa peculiarità condusse a sentimenti contrastanti nei confronti della Meccanica Quantistica, la quale non riesce a spiegare perché il processo di misura sia soggetto ad una natura totalmente probabilistica ed addirittura introduce il concetto stesso come assioma della teoria. Questa incongruenza, raccolta ed ampliata insieme ad altri fenomeni difficilmente spiegabili sotto il nome di *problema della misura*, fu alla base delle più profonde critiche mosse contro la teoria, additata pertanto come incompleta.

Ciononostante, i dati sperimentali fino ad oggi raccolti sono nettamente in favore della teoria dei quanti, che risulta essere la teoria meglio verificata e di maggior successo nella storia della scienza e riveste un ruolo essenziale nella fisica moderna, costituendone le fondamenta.

Capitolo 2

Le miscele statistiche e l'operatore densità

I postulati finora osservati nel primo capitolo sono stati enunciati considerando solo sistemi di cui lo stato fosse perfettamente noto e di essi si è visto come effettuare misurazioni o studiarne l'evoluzione temporale. In generale, tali stati sono preparati con metodologie specifiche ed il loro vettore di stato viene ottenuto operando una misura massimale su di un set completo di osservabili compatibili (o, equivalentemente, commutanti). Più in generale lo stato fisico del sistema non è sempre perfettamente conosciuto. Ci si propone dunque in questi casi di massimizzare l'utilizzo possibile di questa informazione parziale introducendo un oggetto matematico significativamente utile, ovvero *l'operatore densità*, capace di facilitare notevolmente l'applicazione simultanea dei postulati della Meccanica Quantistica e dei risultati della teoria del calcolo probabilistico. Occorre però capire prima il formalismo con cui trattare questi sistemi non completamente definiti per comprendere il funzionamento di tale oggetto [7].

2.1 Miscele statistiche di stati

Classicamente, quando non si ha informazione completa riguardo ad un sistema, si fa riferimento al concetto di probabilità. In Meccanica Quantistica è possibile trattare sistemi in cui lo stato non sia perfettamente definito, bensì ci si trova nella configurazione in cui lo stato del sistema può essere $|\psi_1\rangle$ con probabilità p_1 , $|\psi_2\rangle$ con probabilità p_2 , etc... Chiaramente, poiché si tratta con probabilità è richiesta la condizione di normalizzazione

$$p_1 + p_2 + \dots = \sum_k p_k = 1. \quad (2.1)$$

In questa situazione si dice che si opera con una miscela statistica [21] di stati $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, ..., con probabilità p_1, p_2, \dots . Per ognuno di questi stati valgono i postulati descritti in precedenza, ma bisogna fare attenzione a come si maneggiano i risultati delle misurazioni effettuate sul sistema. Si ipotizzi ad esempio che il sistema si trovi in un certo stato $|\psi_k\rangle$: per quanto detto tale possibilità ha una probabilità pari a p_k ed è quindi logico immaginare che i risultati ottenuti da una misurazione su un siffatto sistema debbano essere pesati dai vari p_k , per poi essere sommati su tutti gli stati possibili della miscela statistica (ovverosia su tutti i valori di k).

Vanno però puntualizzate alcune caratteristiche. In primo luogo è opportuno osservare che i vari stati $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$, che compongono la miscela statistica non sono necessariamente ortogonali. Tuttavia, è sempre possibile assumere che essi siano normalizzati (per quanto detto nel primo capitolo sulle classi di equivalenza dei raggi nello spazio di Hilbert) ed in questo contesto si opera questa assunzione per semplificare la trattazione. Si nota poi come in questa configurazione di miscela le probabilità intervengono su due livelli concettualmente diversi ma non sempre separabili:

- Nell'informazione iniziale sulla "composizione" della miscela che definisce il sistema;
- Nei risultati relativi alla misurazione (i quali restituiscono esclusivamente predizioni probabilistiche anche nei casi in cui lo stato del sistema sia perfettamente noto).

Si può osservare che tutti i casi presi in esame finora in cui lo stato del sistema era completamente noto possono essere descritti mediante una miscela statistica in cui tutte le p_k sono nulle ad eccezione di una sola che sarà pari ad 1, ovvero che dia lo stato certo.

È opportuno specificare che un sistema descritto da una miscela statistica di stati $|\psi_k\rangle$ ognuno con probabilità p_k **NON È** equivalente ad un sistema il cui stato $|\psi\rangle$ è una sovrapposizione lineare di stati¹:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle. \quad (2.2)$$

In Meccanica Quantistica, quando un sistema è in uno stato descritto dalla (2.2) viene spesso detto che "il sistema ha probabilità $|c_k|^2$ di essere nello stato $|\phi_k\rangle$ ". Questa affermazione è leggermente fuorviante: in realtà $|c_k|^2$ rappresenta la probabilità che, se effettuata una serie di misurazioni su di un set completo di osservabili compatibili che abbiano $|\phi_k\rangle$ come uno dei possibili autovettori comuni, il

¹Si assume nel seguito della trattazione che gli stati $|\phi_n\rangle$ siano ortonormali. Tale ipotesi non è essenziale ma semplifica notevolmente la discussione.

risultato sia un set di autovalori corrispondenti allo stato $|\phi_k\rangle$ stesso. Ovviamente, questo non ha nulla in comune con le miscele statistiche. Separare dunque il concetto di miscela statistica da quello di sovrapposizione lineare di stati è di importanza fondamentale. Si possono riscontrare evidenze teoriche della differenza tra le due configurazioni semplicemente comparandone i risultati come proposto nell'Appendice A. Si vede facilmente, infatti, che esistono effetti di interferenza quantisticamente notevoli tra gli stati di una sovrapposizione lineare, che non sono invece presenti in una miscela statistica. Quest'ultima non potrà quindi essere descritta attraverso un *vettore di stato medio* sovrapposizione dei diversi stati $|\psi_k\rangle$.

2.2 L'operatore densità negli stati puri

Dopo aver introdotto il concetto di miscela statistica (ed aver osservato le differenze rispetto ad una sovrapposizione lineare), si scopre quanto questa sia comoda per introdurre il già presentato operatore densità.

In generale, per studiare il comportamento di una miscela, come visto, basta calcolare le predizioni sui singoli stati $|\psi\rangle$ che la compongono per poi farne la somma pesata su tutti i k , utilizzando come pesi le probabilità p_k associate ai relativi stati. Tale metodo, pur essendo corretto e semplice in linea di principio, può condurre a calcoli tediosi, particolarmente lunghi e non sempre banali.

Come già detto, però, non è possibile per una miscela introdurre un "vettore di stato medio" ed è per questo che si definisce un "*operatore medio*" che permette una descrizione più semplice e immediata della miscela statistica di stati: per l'appunto, l'operatore densità.

Risulta più semplice, prima di affrontare la trattazione completa e generale, descrivere dapprima un caso più semplice in cui lo stato del sistema sia perfettamente noto. Come già detto, questa configurazione può essere descritta attraverso il concetto di miscela statistica ipotizzando che siano nulle tutte le p_k ad eccezione di una che abbia valore unitario, e si dice in questo caso che il sistema si trova in uno *stato puro*.

Di seguito si mostrerà come la descrizione attraverso i vettori di stato è di fatto equivalente ad una descrizione che caratterizzi il sistema con un operatore agente sullo spazio degli stati, che ovviamente prenderà il nome di operatore densità, per poi osservare (nella sezione successiva) come tale operatore semplifichi notevolmente la trattazione nel caso delle miscele fornendo formule che abbiano la stessa identica forma per entrambe le casistiche.

Si ricorda brevemente che se $\{|u_n\rangle\}$ è una base ortonormale nello spazio degli

stati (assunta per semplicità discreta²), allora il sistema avrà un vettore di stato all'istante di tempo t esprimibile come:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |u_n\rangle, \quad (2.3)$$

dove i coefficienti $c_n(t)$ soddisfano la relazione:

$$\sum_n |c_n(t)|^2 = 1, \quad (2.4)$$

che semplicemente esplicita il fatto che il vettore di stato sia normalizzato.

Se \mathbf{A} è un'osservabile potrà essere descritta nella base $\{|u_n\rangle\}$ attraverso la matrice associata di elementi:

$$\langle u_n | \mathbf{A} | u_p \rangle \equiv \mathbf{A}_{np}, \quad (2.5)$$

grazie alla quale si può esprimere facilmente il valore di aspettazione di \mathbf{A} all'istante t come:

$$\langle \mathbf{A} \rangle (t) \equiv \langle \psi(t) | \mathbf{A} | \psi(t) \rangle = \sum_{n,p} c_n^*(t) c_p(t) \mathbf{A}_{np} \quad (2.6)$$

Si ricorda infine che l'evoluzione temporale del sistema è governata dall'equazione di Schrödinger (1.13) applicata allo stato $|\psi(t)\rangle$.

La relazione (2.6) mostra che i coefficienti $c_n(t)$ compaiono nel valore di aspettazione tramite espressioni quadratiche miste del tipo $c_n^*(t) c_p(t)$. Osservando questi oggetti con attenzione si può vedere come essi siano più semplicemente gli elementi di matrice dell'operatore di proiezione sul ket $|\psi(t)\rangle$, ovvero sia l'operatore $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$. Questo si nota banalmente calcolando proprio gli elementi di matrice:

$$\begin{aligned} (|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|)_{pn} &\equiv \langle u_p | (|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|) | u_n \rangle \\ &= \langle u_p | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | u_n \rangle = c_n^*(t) c_p(t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Compare, quindi, in modo abbastanza naturale, l'idea di maneggiare questo nuovo operatore, che prende il nome di *operatore densità* e viene definito dalla relazione:

$$\boldsymbol{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|. \quad (2.8)$$

In ogni determinata base $\{|u_n\rangle\}$, l'operatore densità viene rappresentato da una matrice denominata *matrice densità* la cui definizione è formalmente identica alla (2.7):

$$\boldsymbol{\rho}_{pn} \equiv \langle u_p | \boldsymbol{\rho}(t) | u_n \rangle = c_n^*(t) c_p(t). \quad (2.9)$$

²Il passaggio al caso continuo prevede che tutte le sommatorie diventino integrali e contestualmente i simboli delta di Kronecker diventino distribuzioni delta di Dirac.

Si vuole adesso mostrare che la conoscenza di $\rho(t)$ è sufficiente per caratterizzare completamente lo stato quantico del sistema, e dunque che le due trattazioni sono equivalenti. A tal fine basta dimostrare che l'operatore densità consente di calcolare tutte le predizioni fisiche ottenibili conoscendo lo stato del sistema (2.3), ovvero basta calcolare e riscrivere le equazioni (2.4), (2.6) e (1.13) in termini di $\rho(t)$.

Confrontando la (2.4) con la (2.9), risulta banale riscriverla come:

$$\sum_n |c_n(t)|^2 = \sum_n c_n^*(t)c_n(t) = \sum_n \rho_{nn}(t) \equiv \text{Tr}\{\rho(t)\} = 1, \quad (2.10)$$

(dove con $\text{Tr}\{\}$ si indica la traccia della matrice associata all'operatore tra parentesi) che mostra come la condizione di normalizzazione si traduca semplicemente nella richiesta di avere traccia unitaria per la matrice densità.

Con gli stessi accorgimenti si vede anche la (2.6) si può scrivere come³:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A} \rangle (t) &= \sum_{n,p} \langle u_p | \rho(t) | u_n \rangle \mathbf{A}_{np} \\ &= \sum_{n,p} \langle u_p | \rho(t) | u_n \rangle \langle u_n | \mathbf{A} | u_p \rangle \\ &= \sum_p \langle u_p | \rho(t) \mathbf{A} | u_p \rangle \\ &= \sum_p (\rho(t) \mathbf{A})_{pp} \\ &= \text{Tr}\{\rho(t) \mathbf{A}\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Infine, si vede anche che l'evoluzione temporale dell'operatore densità può essere ricavata molto facilmente dall'equazione di Schrödinger (1.13):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(t) &= \left(\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right) \langle \psi(t)| + |\psi(t)\rangle \left(\frac{d}{dt} \langle \psi(t)| \right) \\ &= \frac{1}{i\hbar} \mathbf{H}(t) |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| - \frac{1}{i\hbar} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \mathbf{H}(t) \\ &= \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{H}(t), \rho(t)]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Si è pertanto facilmente mostrato come si trasformano le leggi della conservazione della probabilità (2.4), del valore di aspettazione per un'osservabile \mathbf{A} (2.6) e

³Per ottenere il risultato seguente si fa uso della cosiddetta *risoluzione all'identità* che prevede che valga $\sum_k |u_k\rangle \langle u_k| = \mathcal{I}$ se $\{|u_k\rangle\}$ è una base dello spazio.

dell'evoluzione temporale (1.13), scritte finora in dipendenza al vettore di stato, in termini dell'operatore densità, riassumibili nelle equazioni:

$$\text{Tr}\{\rho(t)\} = 1, \quad (2.13)$$

$$\langle \mathbf{A}(t) \rangle = \text{Tr}\{\mathbf{A}\rho(t)\} = \text{Tr}\{\rho(t)\mathbf{A}\}, \quad (2.14)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\rho(t) = [\mathbf{H}(t), \rho(t)]. \quad (2.15)$$

Per uno stato puro, dunque, la trattazione attraverso l'operatore densità è del tutto equivalente a quella che tiene conto dei vettori di stato: come quest'ultimo, l'operatore densità contiene tutta l'informazione fisicamente significativa del sistema. Esistono poi diversi vantaggi nell'operare la prima trattazione.

Dalla definizione stessa (2.8) si vede, innanzitutto, come utilizzare l'operatore densità elimini del tutto gli strascichi numerici correlati alla presenza di una fase globale per il vettore di stato: è lampante infatti che a $|\psi(t)\rangle$ ed a $e^{i\theta}|\psi(t)\rangle$ (con θ numero reale) sia associato il medesimo operatore densità. Inoltre, dalle leggi appena riportate si può notare come esse siano lineari rispetto all'operatore stesso, mentre le rispettive leggi per l'operatore di stato sono invece quadratiche.

In questo caso specifico, infine, si presentano alcune proprietà di $\rho(t)$ immediatamente deducibili dalla sua definizione, ovvero il fatto che è Hermitiano:

$$\rho^\dagger(t) = \rho(t), \quad (2.16)$$

idempotente:

$$\rho^2(t) = \rho(t), \quad (2.17)$$

ed il suo quadrato ha traccia unitaria:

$$\text{Tr}\{\rho^2(t)\} = \text{Tr}\{\rho(t)\} = 1. \quad (2.18)$$

Queste due ultime relazioni derivano direttamente dal fatto che $\rho(t)$, nel caso di uno stato puro, è un proiettore. Si vedrà in seguito che esse non saranno verificate per le miscele statistiche di stati e pertanto il loro verificarsi è condizione necessaria e sufficiente affinché si possa definire puro lo stato in esame [21].

2.3 L'operatore densità nelle miscele statistiche

Si può ora considerare il caso più generale, ovvero quello di un sistema per il quale le probabilità $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ siano del tutto arbitrarie, pur mantenendo le condizioni di consistenza per le probabilità:

$$0 \leq p_1, p_2, \dots, p_k, \dots \leq 1$$

$$\sum_k p_k = 1. \quad (2.19)$$

Sotto tali condizioni, per calcolare la probabilità $\mathcal{P}(a_n)$ che la misura di un'osservabile \mathbf{A} restituisca l'autovalore a_n , si procede calcolando le probabilità che il risultato della misura sia a_n per ogni stato che compone la miscela:

$$\mathcal{P}_k(a_n) = \langle \psi_k | \mathbf{P}_n | \psi_k \rangle, \quad (2.20)$$

per poi sommare su k le diverse $\mathcal{P}_k(a_n)$ pesandole con le rispettive p_k :

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_k p_k \mathcal{P}_k(a_n). \quad (2.21)$$

Ognuno dei diversi $|\psi_k\rangle$ può essere considerato come uno stato puro e pertanto, dalla (2.14) si ottiene facilmente:

$$\mathcal{P}_k(a_n) = \text{Tr}\{\rho_k \mathbf{P}_n\}, \quad (2.22)$$

dove è stato posto:

$$\rho_k = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|. \quad (2.23)$$

Sostituendo pertanto nella (2.21), si avrà:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a_n) &= \sum_k p_k \text{Tr}\{\rho_k \mathbf{P}_n\} \\ &= \text{Tr}\left\{ \sum_k p_k \rho_k \mathbf{P}_n \right\} \\ &= \text{Tr}\{\rho \mathbf{P}_n\}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

dove è stato definito l'operatore densità del sistema ρ come:

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k. \quad (2.25)$$

Si è visto quindi come la linearità delle formule che fanno uso dell'operatore densità permette di introdurre questo nuovo oggetto anche per le miscele statistiche, per le quali si rivelerà ancora più utile.

È immediato verificare che ρ è un operatore Hermitiano essendo una somma di operatori Hermitiani pesati da coefficienti reali come le p_k .

Calcolando la traccia di ρ si ottiene facilmente:

$$\text{Tr}\{\rho\} = \text{Tr}\left\{ \sum_k p_k \rho_k \right\} = \sum_k p_k \text{Tr}\{\rho_k\}, \quad (2.26)$$

ma come si è visto nella (2.13) gli operatori densità per stati puri hanno traccia unitaria e dunque la precedente (ricordando anche le (2.19)) si riduce a:

$$\text{Tr}\{\rho\} = \sum_k p_k = 1, \quad (2.27)$$

pertanto, anche nel caso generale l'operatore densità ha traccia unitaria.

Con questo nuovo oggetto è possibile anche calcolare il valore atteso di un operatore \mathbf{A} generalizzando la (2.14) al caso delle miscele statistiche:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A} \rangle &= \sum_n a_n \mathcal{P}(a_n) = \sum_n a_n \text{Tr}\{\rho \mathbf{P}_n\} \\ &= \text{Tr}\left\{ \rho \sum_n a_n \mathbf{P}_n \right\} = \text{Tr}\{\rho \mathbf{A}\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Si può, in seguito, anche calcolare l'evoluzione temporale per il caso generale. Sia assunta l'ipotesi che l'Hamiltoniano $\mathbf{H}(t)$ del sistema sia, al contrario dello stato, noto. Si può dimostrare che, se all'istante iniziale t_0 lo stato del sistema è descritto da una miscela statistica e dunque ha probabilità p_k di trovarsi nello stato $|\psi_k(t_0)\rangle = |\psi_k\rangle$, allora ad un certo istante di tempo t successivo avrà la medesima probabilità p_k di trovarsi nello stato $|\psi(t)\rangle$ dato dall'equazione di Schrödinger (1.13):

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_k(t)\rangle = \mathbf{H}(t) |\psi_k(t)\rangle. \quad (2.29)$$

L'operatore densità all'istante t sarà pertanto definito come:

$$\rho(t) = \sum_k p_k \rho_k(t), \quad (2.30)$$

dove

$$\rho_k(t) = |\psi_k(t)\rangle \langle \psi_k(t)|. \quad (2.31)$$

Riprendendo la (2.15) applicata a $\rho_k(t)$, e sfruttandone la linearità è allora banale osservare che vale:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = [\mathbf{H}(t), \rho(t)], \quad (2.32)$$

che in questa forma del tutto generale prende il nome di *equazione di Liouville-von Neumann*[9] poiché presenta la stessa forma dell'equazione del moto per la distribuzione di probabilità nello spazio delle fasi in meccanica statistica classica [18].

Si è allora mostrato che è possibile generalizzare tutti i risultati ottenuti nel caso di uno stato puro per un caso più generale di miscela statistica.

Questo dunque consente, di fatto, di eliminare la distinzione a priori tra stato puro e miscele statistiche, fornendo uno strumento unico (l'operatore densità, appunto) che consenta di rappresentare in maniera unificata sia il caso in cui lo stato iniziale del sistema sia completamente specificato, sia la situazione più generale di una miscela [9].

Osservando, però, che ρ non è più un proiettore si deduce che, per le miscele statistiche, non vale la (2.17) e pertanto si ottiene:

$$\rho^2 \neq \rho \quad (2.33)$$

In particolare risulta non vera anche la prima uguaglianza della (2.18) e si deduce conseguentemente alla precedente⁴:

$$\text{Tr}\{\rho^2\} \leq 1. \quad (2.34)$$

Come ultima proprietà, direttamente dalla definizione (2.25), si dimostra che preso un qualsiasi ket $|\phi\rangle$ si avrà:

$$\langle\phi|\rho|\phi\rangle = \sum_k p_k \langle\phi|\rho_k|\phi\rangle = \sum_k p_k |\langle\phi|\psi_k\rangle|^2, \quad (2.35)$$

e di conseguenza:

$$\langle\phi|\rho|\phi\rangle \geq 0, \quad (2.36)$$

che mostra il fatto che ρ è un operatore positivo.

⁴A sostegno delle (2.33) e (2.34) si presenta un esempio: si assuma che gli stati $|\psi_k\rangle$ siano ortonormali. In una base ortonormale per lo spazio che includa tali $|\psi_k\rangle$, l'operatore ρ è diagonale ed i suoi elementi sono proprio i p_k ; pertanto ρ^2 sarà essa stessa diagonale con elementi p_k^2 . Tali relazioni sono pertanto conseguenza del fatto che i p_k sono tutti minori di 1 (a meno di trovarsi in un caso puro in cui solo uno sia non nullo e pari dunque ad 1).

Capitolo 3

Il Qubit e l'*Entanglement*

Quanto visto finora è essenzialmente la base su cui si fonda la teoria quantistica, ma ne rappresenta solo una piccola parte. Infatti, tutto quello finora discusso è valido per sistemi chiusi, incapaci di scambiare con l'ambiente né energia né informazione. Banalmente, si comprende che i sistemi chiusi rappresentano un'idealizzazione e non sono realmente replicabili perché è impossibile isolare perfettamente un sistema.

Questo problema mostra inequivocabilmente la necessità di ampliare la discussione della Meccanica Quantistica su spazi non banali in interazione tra loro; il più "piccolo" spazio di Hilbert non banale è quello di dimensione due.

Per cercare di studiare il comportamento quantistico di un sistema aperto si discuterà dunque il comportamento di due sistemi chiusi interagenti, in cui uno dei due potrebbe rappresentare l'ambiente esterno al primo.

In analogia con la teoria dell'informazione classica, in cui l'unità di informazione è chiamata *bit*, nella teoria dell'informazione quantistica (prima storicamente a trattare determinati oggetti) un vettore in uno spazio di Hilbert bidimensionale è chiamato *qubit* (talvolta reso anche come *Q-bit*, in entrambi i casi contrazione di *Quantum-bit*) e rappresenta l'unità di informazione per tale teoria.

Il qubit è pertanto il più semplice sistema quantistico non banale. In uno spazio di Hilbert bidimensionale può essere identificata una base ortonormale, indicabile (sempre per analogia con la teoria dell'informazione classica) con la notazione $\{|0\rangle, |1\rangle\}$; il vettore di stato normalizzato più generico possibile avrà quindi la forma:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (3.1)$$

dove α e β sono due coefficienti complessi che soddisfano la relazione di normalizzazione $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Effettuando una misurazione sul sistema, lo stato verrà proiettato sui vettori della base, ottenendo il vettore $|0\rangle$ con probabilità $|\alpha|^2$ ed il vettore $|1\rangle$ con probabilità $|\beta|^2$. Ciò, come visto nei postulati, disturberà irreversibilmente il sistema (a

meno che uno dei due coefficienti non sia nullo) e misurazioni ripetute successive alla prima restituiranno il medesimo risultato di questa con probabilità unitaria.

Pertanto, se lo stato del qubit è inizialmente ignoto, non vi è alcun modo di determinare i valori dei coefficienti α e β con una singola misurazione; al massimo un qubit potrà essere preparato in uno stato noto che sia uno di quelli della base.

Si consideri un bit classico: per come è definito esso potrà assumere solo uno tra i valori 0 ed 1. Si immagini ora un bit "probabilistico" classico, ovvero sia un bit non noto ma che può assumere il valore 0 con una certa probabilità p ed il valore 1 con una probabilità $q = 1 - p$; si potrebbe pensare che questo tipo di oggetto sia identico o comunque equiparabile ad un qubit, ma così non è. Una volta osservato (alias misurato) il valore corretto del bit probabilistico classico, si acquisisce dell'informazione con assoluta certezza, senza che l'osservatore possa influenzarla in alcun modo. Misurare un qubit, invece, come si è visto, di fatto fa collassare il suo valore, rivelando in realtà nulla sulla sua effettiva natura iniziale. Per comprendere ancora meglio questa differenza si può discutere un esempio pratico di natura fisica.

3.1 Spin- $\frac{1}{2}$ e sistemi aperti

L'equazione (3.1) è formalmente identica all'equazione di stato dello spin associato ad una particella con spin- $\frac{1}{2}$ (come elettroni, protoni, etc...). Gli autostati $|0\rangle$ e $|1\rangle$ possono infatti essere interpretati come gli stati $|\uparrow\rangle$ (spin up) e $|\downarrow\rangle$ (spin down) lungo un certo asse.

Si considerino pertanto a titolo d'esempio i qubit del tipo:

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle \pm |\downarrow_z\rangle) \quad (3.2)$$

dove $|\uparrow_z\rangle$ e $|\downarrow_z\rangle$ sono gli autostati dell'operatore σ_z , l'osservabile di spin lungo l'asse z . Dalla teoria quantistica dello spin risulta che gli stati $|\pm\rangle$ sono gli autostati dell'operatore σ_x , l'osservabile di spin lungo l'asse x , con autovalori ± 1 , e pertanto la loro fase relativa ha conseguenze osservabili. In particolare, se si effettua una misurazione di σ_z su uno degli stati $|\pm\rangle$ si otterrà lo stato $|\uparrow_z\rangle$ con una probabilità $1/2$ o lo stato $|\downarrow_z\rangle$ con la stessa probabilità. Allo stesso modo, considerando uno stato del tipo:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle), \quad (3.3)$$

se si effettua una misurazione di σ_x su uno tale stato si otterrà lo stato $|+\rangle$ con una probabilità $1/2$ o lo stato $|-\rangle$ con la stessa probabilità. Risulta di particolare interesse osservare una misurazione dello spin dello stato $|\psi\rangle$ lungo l'asse z : se quelli

considerati nella trattazione fossero bit probabilistici classici, allora per ognuno dei due stati possibili lungo l'asse x si avrebbe probabilità $1/2$ che lo spin sia up e probabilità $1/2$ che lo spin sia down lungo l'asse z . Per i qubit, però, il risultato è differente: sommando le definizioni di stato $|+\rangle$ e stato $|-\rangle$ si osserva che lo stato descritto dalla (3.3) non è altro che lo stato $|\uparrow_z\rangle$. Pertanto, in tale stato, la misurazione di σ_z restituirà sempre (o, volendo, con probabilità unitaria) lo stato $|\uparrow_z\rangle$ e mai (o con probabilità nulla) lo stato $|\downarrow_z\rangle$.

In questo modo semplice si è efficacemente dimostrato che i qubit non si sommano nello stesso modo in cui, invece, si sommano i bit classici: questo fenomeno prende il nome di *interferenza quantistica*. L'insorgere di questo tipo di fenomeno può essere spiegato dal fatto che si stanno effettuando osservazioni su un sistema composto da due qubit mentre le misure sono effettuate su uno solo di essi, che di fatto costituisce un sistema aperto. In tali condizioni, gli assiomi che reggono la Meccanica Quantistica enunciati nel primo capitolo perdono di validità, poiché formulati per sistemi chiusi; in particolare:

- gli stati non sono in generale raggi;
- le misure non sono proiezioni ortogonali;
- l'evoluzione temporale non è unitaria.

Si vedrà allora come generalizzare questi concetti per sistemi composti.

3.2 La correlazione quantistica: l'Entanglement

Il singolo qubit presentato nel paragrafo precedente costituisce comunque un sistema estremamente semplice. Ai fini dell'indagine sui sistemi aperti, come già detto, bisogna studiare sistemi composti da un numero maggiore di qubit poiché possono rappresentarne una buona approssimazione teorica. Riportando l'analogia tra un qubit ed una particella con spin- $\frac{1}{2}$, è possibile costruire un sistema composto da due qubit, partendo dalla teoria della somma di momenti angolari [18]: dati due sistemi indipendenti con momenti angolari rispettivamente j_1 e j_2 , essi si compongono in un sistema di momento angolare totale j . I valori possibili per il numero quantico j appartengono all'intervallo discreto $[j_{min}, j_{min} + 1, \dots, j_{max} - 1, j_{max}]$ con $j_{min} = |j_1 - j_2|$ e $j_{max} = j_1 + j_2$.

Il sistema composto può essere completamente caratterizzato dai due numeri quantici $\{j, m_j\}$, con m_j che può assumere i valori discreti $[-j, -j+1, \dots, j-1, j]$ e pertanto ad ogni valore di j saranno associati $(2j + 1)$ valori possibili per m_j .

Un sistema composto da due qubit interagenti può, pertanto, essere costruito in completa analogia ad un sistema formato da due particelle di spin- $\frac{1}{2}$: si avrà

$j_1 = j_2 = 1/2$ e, conseguentemente, $j = 0, 1$. Calcolando allora i coefficienti di Clebsch-Gordan è possibile scrivere le configurazioni possibili dei due qubit nella nuova base $|jm_j\rangle$:

$$\begin{aligned} |\uparrow_1\uparrow_2\rangle &= |1\ 1\rangle, \\ |\downarrow_1\downarrow_2\rangle &= |1\ -1\rangle, \\ |\uparrow_1\downarrow_2\rangle &= a|1\ 0\rangle + \beta|0\ 0\rangle, \\ |\downarrow_1\uparrow_2\rangle &= a'|1\ 0\rangle + \beta'|0\ 0\rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Invertendo le relazioni appena scritte si ottengono gli stati:

$$\begin{aligned} |1\ 1\rangle &= |\uparrow_1\uparrow_2\rangle \equiv |t_1\rangle, \\ |1\ -1\rangle &= |\downarrow_1\downarrow_2\rangle \equiv |t_{-1}\rangle, \\ |1\ 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1\downarrow_2\rangle + |\downarrow_1\uparrow_2\rangle) \equiv |t_0\rangle, \\ |0\ 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\uparrow_2\rangle) \equiv |s_0\rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Gli stati con $j = 1$ vengono detti stati di *tripletto* mentre lo stato con $j = 0$ viene chiamato stato di *singoletto*. In particolare, gli stati $|t_1\rangle$ e $|t_{-1}\rangle$ non lasciano alcun dubbio sullo stato dei singoli sottosistemi, mentre invece $|t_0\rangle$ e $|s_0\rangle$ mostrano un comportamento molto particolare. Seguendo i risultati del quinto postulato del primo capitolo, infatti, si possono effettuare alcune misurazioni sullo spazio $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ che danno risultati interessanti.

Si supponga di voler effettuare la misurazione dello stato di uno dei due qubit. Questa si ottiene proiettando lo stato del sistema composto sulla base del qubit che desidera essere misurato.

Si assuma a titolo d'esempio che il sistema si trovi nello stato di tripletto $|t_1\rangle$ e che si voglia misurare lo stato del qubit identificato dal numero 1. Il processo di misura restituirà l'esito $|\uparrow_1\rangle$ con probabilità unitaria, preparando uno stato identico a quello precedente alla misura. Lo stato del secondo qubit è rimasto completamente imperturbato e tale misura non ha fornito nessuna informazione aggiuntiva sul sistema complessivo.

Si proceda ora, invece, ad operare la stessa procedura sullo stato di singoletto $|s_0\rangle$: si proietterà pertanto lo stato di singoletto sulla base $\{|\uparrow_1\rangle|\downarrow_1\rangle\}$. Si otterrà, dunque, l'esito $|\uparrow_1\rangle$ con probabilità $1/2$ e tale misurazione preparerà lo stato composto

$$|\uparrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle \equiv |\uparrow_1\downarrow_2\rangle, \quad (3.6)$$

oppure si presenterà il risultato $|\downarrow_1\rangle$ con probabilità $1/2$ e questa misurazione preparerà lo stato composto

$$|\downarrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle \equiv |\downarrow_1\uparrow_2\rangle, \quad (3.7)$$

Si osserva immediatamente che, in entrambi i casi, effettuare una misura sul qubit 1 prepara uno stato composto che seleziona automaticamente uno stato per il qubit 2.

Quando un sistema composto da più qubit gode di questa proprietà si dice che essi sono *correlati*. Tale correlazione non è, ovviamente, garantita per tutti gli stati, come mostrato per lo stato di tripletto $|t_1\rangle$.

Si può mostrare un'altra caratteristica tipica di questa correlazione (finora non è stato necessario specificare lungo quale asse si misurasse lo spin, sia ora per comodità di trattazione l'asse z). Considerato lo stato di singoletto $|s_0\rangle$, si potrà ad esso applicare l'operatore:

$$\tau_z \mathbf{v}_z \equiv \mathbf{I} \otimes \sigma_z (\sigma_z \otimes \mathbf{I}) \quad (3.8)$$

Questo operatore misura quindi la componente lungo l'asse z dello spin del primo qubit e poi la moltiplica per la componente lungo lo stesso asse dello spin del secondo. Non è difficile calcolare il suo valore di aspettazione sullo stato di singoletto, pari a:

$$\langle \tau_z \mathbf{v}_z \rangle = \langle s_0 | \tau_z \mathbf{v}_z | s_0 \rangle = -1. \quad (3.9)$$

Questo risultato rispecchia il fatto che se due osservatori misurano in modo indipendente lo spin lungo l'asse z dei due qubit descritti dallo stato di singoletto (immaginando ad esempio di separarli) per poi moltiplicare i risultati otterranno sempre il risultato -1 , e dunque sempre spin opposti per i due qubit. Questo risultato non dovrebbe essere troppo sorprendente: lo stato di singoletto è esplicitamente uno stato composizione lineare di due vettori entrambi con componenti z di spin opposte.

Ciò che invece risulta sorprendente è riscontrare il medesimo risultato anche per gli operatori $\tau_x \mathbf{v}_x$ e $\tau_y \mathbf{v}_y$ (la cui definizione è immediatamente generalizzabile dalla (3.8)), ovvero si ha:

$$\langle s_0 | \tau_x \mathbf{v}_x | s_0 \rangle = \langle s_0 | \tau_y \mathbf{v}_y | s_0 \rangle = \langle s_0 | \tau_z \mathbf{v}_z | s_0 \rangle = -1 \quad (3.10)$$

Questa catena di uguaglianze implica una condizione molto meno ovvia della precedente: ritrovare lo stesso risultato impone che, lungo qualsiasi direzione vengano misurate le componenti dello spin dei due qubit, esse dovranno essere sempre l'una l'opposta dell'altra [24].

È banale osservare che questa condizione non è soddisfatta dallo stato di tripletto $|t_1\rangle$.

Stati come quello di singoletto in cui emerge una correlazione non-locale vengono definiti *entangled* (o, meno frequentemente, *non-separabili*), mentre quelli in cui non è presente questo effetto sono detti *separabili*.

Studiare questo fenomeno di correlazione non-locale risulta molto più semplice introducendo alcuni concetti matematici rilevanti, quali la *matrice densità ridotta* e la *decomposizione di Schmidt*.

3.3 Matrice Densità Ridotta

Dagli esempi appena mostrati, si osserva che l'entanglement è un fenomeno che si instaura tra due sottosistemi appartenenti allo stesso sistema composito. È importante però notare che riconoscere come "entangled" o "separabile" un sistema può dipendere dalla partizione scelta: adottare diverse divisioni in sottosistemi differenti può portare all'effettivo insorgere del fenomeno o, al contrario, a rendere il sistema separabile.

Si consideri a titolo d'esempio il caso di tre particelle $\{1, 2, 3\}$ con spin nello stato:

$$|\psi\rangle = \frac{|\uparrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |\uparrow_3\rangle. \quad (3.11)$$

Si può verificare facilmente che scegliendo come sottosistemi $(1 \cup 2)$ e 3 , il sistema risulta separabile; al contrario, scegliendo come sottosistemi 1 e $(2 \cup 3)$, è immediato constatare come il sistema sia entangled.

Considerando un generico sistema $A \cup B$, suddiviso nei due sottosistemi A e B , come già visto, lo spazio di Hilbert \mathcal{H} per tale sistema sarà dato da:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \quad (3.12)$$

Utilizzando tale fattorizzazione, sarà inoltre possibile esprimere lo stato del sistema come combinazione lineare del prodotto tensoriale tra le basi dei sottosistemi:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} C_{i,j} |m_i\rangle_A \otimes |\mu_j\rangle_B, \quad (3.13)$$

dove $|m_i\rangle_A$ e $|\mu_j\rangle_B$ sono basi ortonormali complete, rispettivamente, di \mathcal{H}_A e di \mathcal{H}_B (si specifica che in questa trattazione vengono utilizzate lettere latine per i vettori e covettori del sistema A ed allo stesso modo greche per il sistema B), mentre i $C_{i,j}$ sono coefficienti complessi normalizzati:

$$\sum_{i,j} |C_{i,j}|^2 = 1. \quad (3.14)$$

Uno strumento di particolare utilità nello studio della correlazione tra sottosistemi è la *matrice densità ridotta*. Dal nome si comprende facilmente che tale oggetto sarà un operatore molto simile all'operatore densità. In particolare, la differenza principale tra i due risiede nel fatto che l'operatore ridotto sarà concentrato su un sottosistema, mentre l'operatore consueto agisce sul sistema totale.

Sia dunque M un operatore che agisce in maniera esclusiva sul sistema A , lasciando inalterato il sottosistema B . Come visto nel quinto postulato, esso potrà essere espresso come:

$$M = M_A \otimes I_B \quad (3.15)$$

Si calcola allora il valore di aspettazione associato a tale operatore:

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{I}_B | \psi \rangle &= \left(\sum_{i,j} C_{i,j}^* \langle m_i |_A \otimes \langle \mu_j |_B \right) \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{I}_B \left(\sum_{i,j} C_{k,l} |m_k\rangle_A \otimes |\mu_l\rangle_B \right) \\
&= \sum_{i,j,k,l} C_{i,j}^* C_{k,l} \langle m_i | \mathbf{M}_A | m_k \rangle \langle \mu_j | \mathbf{I}_B | \mu_l \rangle \\
&= \sum_{i,j,k,l} C_{i,j}^* C_{k,l} \langle m_i | \mathbf{M}_A | m_k \rangle \delta_{j,l} \\
&= \sum_{i,k} \left(\sum_j C_{i,j}^* C_{k,j} \right) \langle m_i | \mathbf{M}_A | m_k \rangle \\
&= \sum_{i,k} \langle m_k | \rho_A | m_i \rangle \langle m_i | \mathbf{M}_A | m_k \rangle \\
&= \sum_k \langle m_k | \rho_A \mathbf{M}_A | m_k \rangle = \text{Tr} \{ \rho_A \mathbf{M}_A \} \tag{3.16}
\end{aligned}$$

dove è stato fatto uso dell'ortonormalità della base $|\mu_j\rangle_B$ ed è stata definita la *matrice densità ridotta* ρ_A con la relazione:

$$\langle m_k | \rho_A | m_i \rangle = \sum_j C_{i,j}^* C_{k,j}. \tag{3.17}$$

La matrice densità ridotta consente quindi di focalizzarsi sul comportamento di un solo sottosistema, tenendo comunque considerazione del secondo sistema, con cui il primo interagisce. In quest'ottica, dunque, il sottosistema A può essere considerato come un sistema immerso in uno spazio esterno che lo vincoli ad essere in un determinato stato di equilibrio, dato dal sottosistema B . Per comprendere qualitativamente il concetto si può immaginare il sottosistema A come un corpo immerso in un fluido che rappresenti le condizioni indotte dal sottosistema B su A stesso interagendo con esso. Da tale esempio risulta chiarissimo come, agendo sulle caratteristiche di B , sia possibile in qualche modo manipolare anche quelle di A in un sistema entangled. Ovviamente nulla conferisce a B un ruolo privilegiato e dunque la trattazione è completamente valida anche all'inverso.

La matrice densità ridotta può essere, inoltre, ottenuta tracciando la matrice densità del sistema totale rispetto a tutti i gradi di libertà degli altri sottosistemi:

$$\rho_A = \text{Tr}_{\mathcal{H}_B} \{ \rho \}, \tag{3.18}$$

dove con $\text{Tr}_{\mathcal{V}} \{ \}$ viene indicata la cosiddetta *traccia parziale* sul sottospazio \mathcal{V} , ovvero sia la traccia eseguita rispetto a tutti gli stati appartenenti a tale sottospazio

[25]. La verifica della (3.18) è immediata se si rammenta che $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ e che $|\psi\rangle$ può essere scritto come nella (3.13). Infatti si ha:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{\mathcal{H}_B}\{\rho\} &= \sum_j \langle\mu_j|\rho|\mu_j\rangle \\
&= \sum_j \langle\mu_j|\left(\sum_{h,l} C_{h,l}|m_h\rangle\otimes|\mu_l\rangle\right)\left(\sum_{i,k} C_{i,k}^*\langle m_i|\otimes\langle\mu_k|\right)|\mu_j\rangle \\
&= \sum_{j,h,l,i,k} C_{h,l}C_{i,k}^*\langle\mu_j|\mu_l\rangle\langle\mu_k|\mu_j\rangle|m_h\rangle\langle m_i| \\
&= \sum_{j,h,l,i,k} C_{h,l}C_{i,k}^*\delta_{j,l}\delta_{k,j}|m_h\rangle\langle m_i| \\
&= \sum_{i,h}\left(\sum_j C_{h,j}C_{i,j}^*\right)|m_h\rangle\langle m_i|, \tag{3.19}
\end{aligned}$$

da cui si ricava immediatamente:

$$\langle m_h|\text{Tr}_{\mathcal{H}_B}\{\rho\}|m_i\rangle = \sum_j C_{h,j}C_{i,j}^* = \langle m_h|\rho_A|m_i\rangle \tag{3.20}$$

La matrice densità ridotta gode, infine, delle stesse proprietà delle matrici densità associate a stati misti:

- i) È autoaggiunta: $\rho_A^\dagger = \rho_A$;
- ii) È non-negativa: ${}_A\langle a|\rho_A|a\rangle_A \geq 0 \quad \forall |a\rangle_A \in \mathcal{H}_A$;
- iii) Ha traccia unitaria: $\text{Tr}\{\rho_A\} = 1$

3.4 Decomposizione di Schmidt

Per comprendere a fondo il ruolo che ricopre la matrice densità ridotta, si ritiene a questo punto necessario introdurre la *Decomposizione di Schmidt* [1].

Uno stato puro come nella (3.13) può essere facilmente riscritto come:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} C_{i,j}|m_i\rangle_A \otimes |\mu_j\rangle_B = \sum_i |m_i\rangle_A \otimes |\tilde{\mu}_i\rangle_B, \tag{3.21}$$

dove si è definito il ket $|\tilde{\mu}_i\rangle_B = \sum_j C_{i,j}|\mu_j\rangle_B$. Questi stati, per come sono definiti, non sono necessariamente ortonormali, ma nel continuo della trattazione si vuole trovare un modo per ortonormalizzarli.

Poiché ρ_A è un operatore autoaggiunto, sarà sempre possibile trovare una base ortonormale per lo spazio \mathcal{H}_A formata dagli autovettori di ρ_A ed inoltre, poiché l'operatore è definito positivo, i suoi autovalori dovranno essere necessariamente non-negativi. Pertanto, si assuma che i ket $\{|m_i\rangle_A\}$ siano proprio la base ortonormale in cui l'operatore è diagonale, con autovalori p_i ; con tale ipotesi, la matrice densità ridotta sarà data da:

$$\rho_A = \sum_i p_i |m_i\rangle_A \langle m_i|. \quad (3.22)$$

Inserendo poi la (3.22) all'interno della (3.20) è semplice provare che:

$$\langle \tilde{\mu}_i | \tilde{\mu}_j \rangle = p_i \delta_{i,j}, \quad (3.23)$$

ovvero che gli stati $\{|\tilde{\mu}_j\rangle_B\}$ sono ortogonali tra loro e, poiché sono una combinazione lineare di una base di \mathcal{H}_B , sono ancora una base di \mathcal{H}_B . Dalla relazione precedente allora si vede che essi possono essere resi ortonormali operando il riscalamento:

$$|\mu'_i\rangle_B = p_i^{-\frac{1}{2}} |\tilde{\mu}_i\rangle_B. \quad (3.24)$$

Si è mostrato, pertanto, che lo stato $|\psi\rangle$ può essere espresso come:

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |m_i\rangle_A \otimes |\mu'_i\rangle_B, \quad (3.25)$$

e tale forma prende il nome di Decomposizione di Schmidt per uno stato bipartito puro $|\psi\rangle_{AB}$.

Si osserva che nessuna ipotesi è stata assunta sullo stato iniziale, e quindi è sempre possibile espandere uno stato bipartito puro nella forma presentata nella (3.25), ma tale decomposizione dipende strettamente dalla scelta delle basi ortonormali $|m_i\rangle_A$ e $|\mu'_i\rangle_B$. Ne consegue facilmente che non è possibile espandere **simultaneamente** due stati $|\psi\rangle_{AB}$ e $|\varphi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ utilizzando le stesse basi ortonormali per \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B .

Si può successivamente osservare come i pesi p_i della matrice densità ridotta siano strettamente correlati ai coefficienti dello stato $|\psi\rangle_{AB}$ del sistema totale. In particolare si può espandere lo stato rispetto ad una generica base ortonormale

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{a,\beta} K_{a,\beta} |a\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B, \quad (3.26)$$

e considerare che le generiche basi ortonormali $\{|a\rangle_A\}$ e $\{|\beta\rangle_B\}$ sono legate alle basi della decomposizione di Schmidt da trasformazioni unitarie U_A e U_B attraverso le relazioni:

$$|m_i\rangle_A = \sum_a (U_A)_{ai} |a\rangle_A, \quad |\mu'_i\rangle_B = \sum_\beta (U_B)_{\beta i} |\beta\rangle_B. \quad (3.27)$$

Confrontando l'equazione (3.25) con le successive (3.26) e (3.27) è facile osservare che i coefficienti $K_{\alpha,\beta}$ possono essere espressi come:

$$K_{\alpha,\beta} = \sum_i (\mathbf{U}_A)_{\alpha i} \sqrt{p_i} (\mathbf{U}_B^T)_{i\beta}, \quad (3.28)$$

da cui si osserva che, applicando trasformazioni unitarie a destra ed a sinistra della matrice K dei coefficienti dello stato $|\psi\rangle_{AB}$ è possibile trasformare quest'ultima in una matrice diagonale¹ e non negativa. In particolare la (3.28) prende il nome di *Decomposizione ai valori singolari* ed i pesi p_i della decomposizione di Schmidt sono anche detti *valori singolari* della matrice K .

Utilizzando la decomposizione di Schmidt è inoltre possibile constatare che la matrice densità ridotta per il sottosistema B ha la forma:

$$\rho_B = \text{Tr}_{\mathcal{H}_A} \{\rho\} = \sum_i p_i |\mu'_i\rangle_B \langle \mu'_i|. \quad (3.29)$$

Le matrici ridotte ρ_A e ρ_B hanno dunque lo stesso numero di autovalori non nulli. In particolare questo implica che se \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B non hanno la stessa dimensionalità, allora le due matrici avranno semplicemente un diverso numero di autovalori nulli.

Nel caso in cui ρ_A (e di conseguenza anche ρ_B) non abbia alcun autovalore degenere al di fuori di 0, allora la decomposizione di Schmidt è determinata univocamente dalle matrici densità ridotte: è infatti sufficiente diagonalizzare ρ_A e ρ_B per trovare le basi $\{|m_i\rangle_A\}$ e $\{|\mu'_i\rangle_B\}$, per poi successivamente accoppiare gli autostati di ρ_A e ρ_B con gli stessi autovalori per ottenere l'equazione (3.25). In questo caso, poi, è possibile ottenere decomposizioni di Schmidt equivalenti ridefinendo le basi $\{|m_i\rangle_A\}$ e $\{|\mu'_i\rangle_B\}$ moltiplicandole rispettivamente per fasi opposte, poiché ciò lascia completamente inalterata la forma della (3.25). Se, però, ρ_A ha degli autovalori degeneri non nulli, non è sufficiente allora conoscere solo le matrici densità ridotte per scrivere la decomposizione di Schmidt: occorre infatti intuire quali $\{|m_i\rangle_A\}$ debbano essere accoppiati a quali $\{|\mu'_i\rangle_B\}$. Questo elemento di indeterminazione si traduce nell'ambiguità di scelta delle basi in modo tale che entrambe siano oggetto di trasformazioni unitarie simultanee.

La trattazione sulla decomposizione di Schmidt si rispecchia immediatamente nella descrizione del fenomeno dell'Entanglement.

La teoria della decomposizione di Schmidt fornisce, di fatti, un criterio per discriminare se un sistema bipartito sia entangled o separabile. Risulta possibile, infatti, associare ad ogni stato bipartito $|\psi\rangle_{AB}$ un numero intero positivo, che

¹In questo contesto l'aggettivo "diagonale" qualifica una matrice non necessariamente quadrata, ma semplicemente una matrice con entrate non nulle solo in corrispondenza di indici di riga e colonna uguali. Può infatti succedere che \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B abbiano dimensionalità differenti ed in tal caso K sarà una matrice diagonale rettangolare nel senso appena specificato.

prende il nome di *Numero di Schmidt*. Tale quantità coincide con il numero di autovalori non nulli delle matrici ρ_A e ρ_B . Il numero di Schmidt pertanto identifica in un certo senso il fenomeno dell'entanglement: $|\psi\rangle_{AB}$ è entangled se il numero di Schmidt ad esso associato è strettamente maggiore di 1; in caso contrario esso sarà separabile.

Risulta immediato osservare che uno stato bipartito separabile può sempre essere scritto come prodotto di stati puri di \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B :

$$|\psi\rangle_{AB} = |m\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B; \quad (3.30)$$

conseguenza immediata di ciò è il fatto che le matrici densità ridotte risultino essere:

$$\rho_A = |m\rangle\langle m|, \quad \rho_B = |\mu\rangle\langle\mu| \quad (3.31)$$

ovvero siano a loro volta *pure*. Stati non esprimibili come un prodotto tensoriale analogo a quello appena visto si dicono dunque entangled; le matrici densità ridotte riferite a sottosistemi entangled sono pertanto *miste*.

Quando due sottosistemi A e B possiedono almeno uno stato entangled, si dice che essi hanno *correlazione quantistica*.

3.5 Un esempio pratico

Si riporta, quindi, un esempio di stato separabile ed uno di stato entangled, mettendo in evidenza come le matrici densità ridotte siano proprio come descritte nei paragrafi precedenti.

Si considera come sistema composto il sistema formato da due particelle, 1 e 2, di spin- $\frac{1}{2}$ come descritto in precedenza.

Si consideri lo stato di tripletto di spin $|t_1\rangle$ come definito in (3.5). La matrice densità di tale stato è:

$$\rho = |t_1\rangle\langle t_1| = |\uparrow_1\uparrow_2\rangle\langle\uparrow_1\uparrow_2| = (|\uparrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle)(\langle\uparrow_1| \otimes \langle\uparrow_2|). \quad (3.32)$$

La matrice densità ridotta ρ_1 associata al sottosistema 1 sarà allora:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_2}\{\rho\} = \sum_i \langle\mu_i|\rho|\mu_i\rangle = \langle\uparrow_2|\rho|\uparrow_2\rangle + \langle\downarrow_2|\rho|\downarrow_2\rangle \\ &= \langle\uparrow_2|\uparrow_1\uparrow_2\rangle \langle\uparrow_1\uparrow_2|\uparrow_2\rangle + \langle\downarrow_2|\uparrow_1\uparrow_2\rangle \langle\uparrow_1\uparrow_2|\downarrow_2\rangle \\ &= |\uparrow_1\rangle\langle\uparrow_1| \end{aligned} \quad (3.33)$$

che rappresenta uno stato puro, come previsto dalla teoria. Per completezza si riportano anche le forme matriciali degli operatori appena descritti:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Si consideri ora lo stato di singoletto $|s_0\rangle$ sempre definito in (3.5). La sua matrice densità sarà:

$$\begin{aligned} \rho &= |s_0\rangle\langle s_0| = \frac{1}{2}[(|\uparrow_1\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\uparrow_2\rangle)(\langle\uparrow_1\downarrow_2| - \langle\downarrow_1\uparrow_2|)] \\ &= \frac{1}{2}(|\uparrow_1\downarrow_2\rangle\langle\uparrow_1\downarrow_2| - |\uparrow_1\downarrow_2\rangle\langle\downarrow_1\uparrow_2| - |\downarrow_1\uparrow_2\rangle\langle\uparrow_1\downarrow_2| + |\downarrow_1\uparrow_2\rangle\langle\downarrow_1\uparrow_2|). \end{aligned} \quad (3.35)$$

La matrice densità ridotta ρ_1 associata al sottosistema 1 sarà dunque in questo caso:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_2}\{\rho\} = \sum_i \langle\mu_i|\rho|\mu_i\rangle \\ &= \langle\uparrow_2|\rho|\uparrow_2\rangle + \langle\downarrow_2|\rho|\downarrow_2\rangle \\ &= \frac{1}{2}(|\downarrow_1\rangle\langle\downarrow_1| + |\uparrow_1\rangle\langle\uparrow_1|). \end{aligned} \quad (3.36)$$

che rappresenta, come previsto per uno stato entangled, uno stato misto.

Le rappresentazioni matriciali di queste ultime sono:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

In questo caso è semplice osservare che alla matrice densità ridotta viene dato contributo solo dai termini "diagonali" rispetto allo spazio degli stati \mathcal{H}_2 . Questa osservazione di fatto rende lecita l'analogia, finora assunta per vera senza particolare indagine matematica, tra il concetto di traccia di una matrice e traccia di un operatore su uno spazio di Hilbert.

Le matrici densità ridotte associate al sottosistema 2 si calcolano in modo del tutto analogo in entrambi i casi. Sebbene non sia stato mostrato in modo esplicito, per risolvere tutti i calcoli è sufficiente sfruttare l'ortogonalità degli stati spin up e spin down dei singoli sottosistemi.

Grazie a questo esempio pratico è stato possibile appurare la consistenza della teoria. Si intende nel seguito approfondire le peculiarità degli stati entangled,

introducendo inoltre un metodo coerente che permetta di quantificare, misurare e valutare l'intensità dell'entanglement di un sistema. Affinché ciò sia possibile, occorre innanzitutto chiarire il modo in cui possa essere prodotto uno stato entangled e che caratteristiche debba avere tale misura per fornire delle informazioni effettivamente utili riguardo al sistema.

A tale scopo si rivelerà utile la grandezza chiamata Entropia di Von Neumann.

3.6 Differenza tra correlazione semplice ed Entanglement

Prima di indagare le possibili misure di entanglement, occorre precisare alcuni concetti.

Come è facile vedere dalla definizione, anche lo stato di tripletto $|t_1\rangle$ è uno stato correlato: anche su questo stato, infatti, operare una misura su uno dei qubit prepara uno stato per il sistema composito in cui il secondo qubit è automaticamente selezionato. Ciò però non basta affinché lo stato di tripletto possa essere considerato non separabile. Di fatti, esso, in quanto separabile, potrà essere riscritto come:

$$|t_1\rangle = |\uparrow_1\uparrow_2\rangle = |\uparrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle, \quad (3.38)$$

ed è banale osservare che può essere preparato senza che i sistemi 1 e 2 entrino mai in contatto. Basterà, infatti, coordinare gli osservatori che preparano lo stato dei sottosistemi facendo in modo che entrambi preparino una particella con spin orientato allo stesso modo lungo un particolare asse concordato.

L'entanglement, invece, **NON PUÒ** essere creato localmente (per questo motivo solitamente si precisa che esso è frutto di una correlazione non-locale). Partendo da uno stato come in (3.38), infatti, l'unico modo per ottenere uno stato entangled come:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle) \quad (3.39)$$

è quello di applicare una trasformazione unitaria collettiva, ovverosia a tutto il sistema. Affinché sia possibile applicare una trasformazione simile, è dunque necessario portare i due qubit a contatto e permettere loro di interagire reciprocamente. Le trasformazioni unitarie locali nella forma $U_A \otimes U_B$ e le misurazioni locali effettuate da coloro che si incaricano di preparare i sistemi **NON POSSONO** aumentare il numero di Schmidt del sistema a due qubit.

Ciò mette in luce una caratteristica estremamente differente tra i due tipi di stati analizzati: uno stato separabile può essere maneggiato (ed in un certo qual senso "generato") in modo controllato dagli osservatori, mentre uno stato entangled è il prodotto di una peculiarità intrinseca della teoria quantistica, che nasce

durante la mutua interazione tra due sistemi e non può, pertanto, essere controllata in alcun modo dall'osservatore.

Questa osservazione aiuta a comprendere come l'entanglement sia realmente straordinario, ed il fatto che determinate trasformazioni unitarie non possono modificare questo fenomeno fa sì che i sottosistemi possano essere allontanati indefinitamente nello spazio, come se il sistema totale continuasse a rispondere rigidamente a tali trasformazioni.

Capitolo 4

Misure di entanglement

Dopo aver chiarito brevemente il concetto di stati entangled ed il modo in cui si differenziano da quelli separabili, come preannunciato nel capitolo precedente, si intende adesso costruire una grandezza che permetta in qualche modo di misurare l'entanglement.

4.1 Entropie di Shannon, Von Neumann e Rényi

Lo studio relativo all'entanglement ha mostrato come la trattazione matematica di tale fenomeno sia connessa alla teoria probabilistica. Le matrici densità degli stati entangled sono, infatti, formalmente identiche a matrici di miscele statistiche, le quali possono essere scritte come sovrapposizione (in senso classico) di matrici densità di stati puri, con pesi reali, non-negativi, probabilistici.

Nei precedenti capitoli si è arrivati a scrivere una matrice densità come:

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k \quad (4.1)$$

(vedere per riferimento la (2.25)).

I pesi p_k sono di natura probabilistica e dovranno, pertanto, godere delle condizioni già più volte imposte in precedenza (che vengono per comodità riportate):

- i) devono avere somma unitaria: $\sum_k p_k = 1$;
- ii) devono formare una combinazione *convessa*: $0 \leq p_k \leq 1$.

Tali pesi probabilistici sono classici e definiscono pertanto una distribuzione di probabilità classica, che associa ad ogni matrice densità ρ_k la sua probabilità p_k . Nel secondo capitolo si è mostrato ugualmente che tali coefficienti pesano anche i valori di aspettazione per qualsiasi operatore in ogni stato k (si veda la (2.28)).

Ha senso, quindi, indagare nelle teorie classiche probabilistiche al fine di scovare strumenti utili allo scopo in questione.

Nel 1948, Shannon stabilì che ad ogni distribuzione classica è possibile associare una funzione, detta pertanto *Entropia di Shannon*, che misuri quanto tale distribuzione sia non deterministica. Una distribuzione costante, ad esempio, massimizza l'Entropia di Shannon in quanto ogni risultato è equiprobabile, mentre una che si comporti come una delta di Dirac renderà minima l'Entropia, poiché ci sarà un solo esito possibile per la misurazione e la distribuzione sarà dunque fortemente deterministica [4].

L'Entropia di Shannon per una distribuzione classica p_k si definisce¹ come:

$$H = - \sum_k p_k \log p_k \quad (4.2)$$

da cui è semplice ricavare le proprietà qualitativamente descritte in precedenza: H si annulla per $p_k = \delta_{k,k_0}$ per un certo k_0 , mentre invece è massima per $p_k = \text{costante}$. L'Entropia di Shannon fornisce una misura della *mancanza di informazione* di una distribuzione probabilistica: descrive infatti quanto una previsione a priori di una misurazione sia attendibile. Una distribuzione con Entropia di Shannon minore (maggiore) di quella associata ad un'altra distribuzione sarà pertanto più (meno) deterministica della seconda. Da questa ultima proprietà deriva il nome di "Entropia", associato a questa grandezza (da Shannon dietro consiglio proprio di John Von Neumann) in analogia con l'entropia termodinamica.

È possibile generalizzare in ambito quantistico una grandezza che abbia le caratteristiche dell'entropia di Shannon. Tale oggetto è definito come:

$$S = - \text{Tr}\{\rho \log \rho\} \quad (4.3)$$

e prende il nome di *Entropia di Von Neumann*, che nel limite classico si riduce proprio a quella di Shannon per distribuzioni probabilistiche di ρ [27]. Si ricorda che il logaritmo di una determinata matrice è definito come quella matrice tale che il suo esponenziale restituisca la matrice di partenza. L'esponenziale di una matrice A viene invece definito come $e^A = \sum_k \frac{A^k}{k!}$. In seguito verrà mostrato nel dettaglio come l'Entropia di Von Neumann di un sottosistema rappresenti un ottimo strumento per quantificare l'entanglement del sistema totale in determinate situazioni (con qualche eccezione). Va' chiarito che non è di particolare interesse

¹In questa e in altre relazioni successive compare la funzione logaritmo, di cui però non si specifica la base. In questo ramo della teoria dell'informazione, fissare una base per il logaritmo di fatto equivale a fissare l'unità di misura per l'informazione. A questo livello di trattazione risulta, però, irrilevante l'unità utilizzata che sarà, dunque, non indicata. Per completezza di trattazione si ricorda che il logaritmo in base 2 fornisce la ben nota unità di misura *bit*, mentre il logaritmo naturale restituisce un'unità detta *nat*.

l'Entropia del sistema totale poiché (come si vedrà) è sempre nulla per stati puri; ciò che ha davvero rilevanza è invece l'Entropia di Von Neumann di un sottosistema interagente con un altro. Come osservato in precedenza, infatti, uno stato entangled puro, dunque nella configurazione più semplice possibile, è composto da due sottostati miscelati², i quali, secondo la chiave di lettura più volte proposta, possono essere considerati come un sistema aperto e l'ambiente in cui tale sistema si trova, la cui Entropia è chiaramente non-nulla.

A causa del logaritmo che compare nella definizione (4.3), valutare l'Entropia di Von Neumann è talvolta un compito arduo. In tali situazioni risulta utile utilizzare una nuova grandezza, introdotta da Alfred Rényi come generalizzazione dell'Entropia di Shannon, data dalla definizione:

$$S_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \log \sum_k p_k^\alpha \quad (4.4)$$

con α parametro reale positivo. Questa grandezza prende il nome di *Entropia di Rényi* o anche *Entropia di ordine α* . Tra le proprietà di tale grandezza spicca il fatto che, nel limite per α che tende ad 1, essa sia esattamente identica all'Entropia di Shannon:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} S_\alpha = H. \quad (4.5)$$

In ambito quantistico con la formulazione tramite matrice densità, l'Entropia di Rényi è data da:

$$S_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \log \text{Tr}\{\rho^\alpha\} \quad (4.6)$$

che si riduce all'Entropia di Von Neumann per il limite $\alpha \rightarrow 1$.

Visto che in alcune situazioni è più semplice valutare l'Entropia di ordine α piuttosto che quella di Von Neumann, spesso si calcola la seconda applicando il limite $\alpha \rightarrow 1$ dopo aver calcolato la prima.

Sebbene l'Entropia di Von Neumann rappresenti l'analogo quantistico dell'Entropia termodinamica, l'Entropia di Rényi non ha interpretazione fisica altrettanto immediata. Tuttavia, essa è un ottimo strumento sia per valutare l'Entropia di Von Neumann, nel caso in cui il calcolo di quest'ultima sia poco pratico, sia per estrarre altre informazioni, più sofisticate, relative all'entanglement, che però vanno ben oltre gli scopi ed i limiti di questo lavoro di tesi.

²I quali, poiché in questo caso semplice gli effetti di interferenza dei sottostati sono nulli, è possibile effettivamente considerare come una miscela statistica.

4.2 Entropia di Von Neumann come misura dell'Entanglement

Come anticipato in precedenza, in questo paragrafo ci si dedicherà ad indagare in quale modo e in quali circostanze sia possibile identificare l'Entropia di Von Neumann come "buona" grandezza per quantificare l'entanglement. Per far ciò risulta comodo soffermarsi sulle proprietà dei due oggetti trattati, per poi osservare eventuali congruenze.

Si supponga che una fantomatica grandezza $\mathcal{E}(\rho)$ sia una buona misura di entanglement per un sistema:

1. Uno stato separabile è per definizione non-entangled. Per un siffatto stato allora $\mathcal{E}(\rho)$ dovrà essere nulla:

$$\mathcal{E} \left(\rho = \sum_k c_k \rho_A^{(k)} \rho_B^{(k)} \right) = 0; \quad (4.7)$$

2. Una buona misura di entanglement non deve essere aumentata da operazioni locali, ovverosia dall'applicazione di operatori unitari locali ad un sottosistema:

$$\mathcal{E} (U \rho U^{-1}) \leq \mathcal{E}(\rho). \quad (4.8)$$

Tale condizione è dovuta al fatto che, poiché una buona misura di entanglement deve fornire informazioni quantificando la correlazione quantistica tra due sottosistemi, essa non deve poter aumentare se si agisce su un solo sottosistema o se i due sottosistemi si scambiano informazione classica (essendo quel tipo di interazione comunque locale, in quanto subordinata allo scambio di particelle bosoniche);

3. Una buona misura deve essere limitata da un valore massimo:

$$\mathcal{E}(\rho) \leq M. \quad (4.9)$$

Il valore massimo M è associato a stati completamente entangled, anche definiti *maximally entangled*;

4. Per essere considerata una buona misura di entanglement, $\mathcal{E}(\rho)$ deve essere convessa:

$$\mathcal{E}(\lambda \rho_1 + (1 - \lambda) \rho_2) \leq \lambda \mathcal{E}(\rho_1) + (1 - \lambda) \mathcal{E}(\rho_2); \quad (4.10)$$

Questa proprietà è richiesta perché, per come è fisicamente immaginato, l'entanglement non dovrebbe poter essere generato dalla miscela di due o più

matrici densità. Di fatti, se si considera la miscela come diverse preparazioni dello stato a cui sono associate diverse probabilità p_i , la statistica che si introduce è sostanzialmente di tipo classico e non genuinamente quantistico, come invece ci si aspetta nel caso del fenomeno dell'entanglement;

5. Allo stesso modo, per esser considerata una buona misura, $\mathcal{E}(\rho)$ dovrà essere anche sub-additiva:

$$\mathcal{E}(\rho_1 \otimes \rho_2) \leq \mathcal{E}(\rho_1) + \mathcal{E}(\rho_2). \quad (4.11)$$

Si procede allora enunciando le proprietà soddisfatte dall'Entropia di Von Neumann.

1. Uno stato puro ha Entropia di Von Neumann nulla, banalmente perché la sua probabilità è unitaria;
2. L'Entropia di Von Neumann è invariante sotto l'effetto di trasformazioni unitarie (ovvero per cambiamento di base);
3. L'Entropia di Von Neumann è limitata superiormente, ed in particolare vale $S \leq \log D$, dove D è la dimensione del sistema considerato.
4. L'Entropia di Von Neumann è una funzione concava.
5. L'Entropia di Von Neumann è una funzione sub-additiva.

Risulta immediato dal confronto incrociato che l'Entropia di Von Neumann soddisfa tutte le richieste per una buona misura di entanglement eccetto per il punto (4). Da questa discrepanza consegue che l'Entropia di Von Neumann quantifica bene l'entanglement solamente nel caso in cui si trattino stati puri, per i quali la decomposizione di Schmidt è unica.

Per completezza di trattazione, si fa presente che per ciò che concerne gli stati misti, vengono proposte in letteratura grandezze più complesse come l'*Entanglement di Formazione*, la cui trattazione esula dagli obiettivi di questa tesi[20].

4.3 Esempi ed ulteriori proprietà

Viene ripreso l'esempio proposto nel terzo capitolo per mostrare un'applicazione pratica dell'Entropia di Von Neumann ad un caso concreto. Ricordando che lo stato di singoletto $|s_0\rangle$ è uno stato entangled, mentre quello di tripletto $|t_1\rangle$ è separabile, è possibile utilizzare rispettivamente le espressioni (3.36) e (3.33) delle

matrici densità ridotte per calcolare l'Entropia di Von Neumann associata:

$$S_{t_1} = 0 \quad (4.12)$$

$$S_{s_0} = - \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2} \right) \right) = \log 2. \quad (4.13)$$

Come previsto, lo stato entangled ha Entropia di Von Neumann maggiore rispetto allo stato separabile.

In particolare si può notare un'altra proprietà attraverso tale esempio. Il calcolo dell'entropia di Von Neumann ha infatti stabilito che lo stato di singoletto è uno stato maximally entangled, poiché essa è pari al logaritmo della dimensione dei sistemi in esame. Osservando poi le matrici (3.37) si nota che per lo stato di singoletto, la matrice densità ridotta è un multiplo della matrice identità (in questo caso specifico $\rho_1 = 1/2\mathbf{I}$). Ciò è valido per qualsiasi stato maximally entangled.

Risulta poi possibile calcolare l'Entropia di Von Neumann nel caso generale in cui i pesi probabilistici non siano fissati, in modo da ottenere un grafico che mostri l'andamento di quest'ultima in funzione dei pesi associati ai sottostati. Per un sistema composito formato da due sottostati, poiché la somma dei pesi deve essere unitaria, è sufficiente fissare uno dei due per conoscere anche l'altro; è dunque indifferente quale dei due venga utilizzato per parametrizzare la relazione.

Si consideri allora lo stato:

$$|\psi\rangle = \sqrt{p} |\uparrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle + \sqrt{1-p} |\downarrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle \quad (4.14)$$

Esso rappresenta il generico stato di un sistema con due particelle di spin opposto, con pesi probabilistici non fissati. È facile osservare che per $p = 1/2$ si ottiene lo stato di singoletto $|s_0\rangle$, mentre per i valori estremali $p = 0, 1$ lo stato $|\psi\rangle$ si riconduce invece ad uno stato separabile analogo a quelli di tripletto (non esattamente uno di essi, ma con comportamento equivalente per ciò che interessa mostrare).

Il calcolo della matrice densità ridotta per il primo sottosistema è immediato, perché la decomposizione di Schmidt è in questo caso banale:

$$\rho_1 = p |\uparrow_1\rangle\langle\uparrow_1| + (1-p) |\downarrow_1\rangle\langle\downarrow_1|. \quad (4.15)$$

L'Entropia di Von Neumann per questo stato risulta quindi essere:

$$S = -p \log p - (1-p) \log (1-p). \quad (4.16)$$

In Figura 4.1 è rappresentato l'andamento di S descritto dall'equazione (4.16). Banalmente, si riscontrano le proprietà descritte in precedenza per la funzione: in particolare si vede che, nei casi estremali (in cui si è detto che lo stato si riduce a

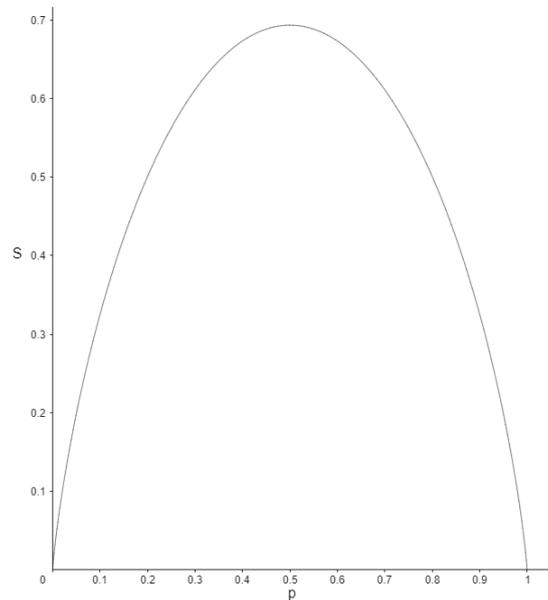


Figura 4.1: Dipendenza dell'Entropia di Von Neumann dal parametro probabilistico p (in *nat*).

sati analoghi a quelli di tripletto) l'Entropia si annulla, mentre presenta un massimo per $p = 1/2$ (in cui si è specificato che lo stato è praticamente lo stato di singoletto).

Confrontando le Entropie di Von Neumann associate ai sottosistemi di stati differenti, è dunque possibile classificare tali stati quantificandone l'entanglement.

Capitolo 5

Controversie, esperimenti ed applicazioni

Nei capitoli precedenti, si è definito il fenomeno dell'entanglement come fenomeno derivante dall'interazione di due sistemi quantistici differenti, unitamente a strumenti matematici come il numero di Schmidt o l'entropia di Von Neumann capaci di riconoscerlo o quantificarlo. Si mostrerà in questo capitolo cosa implica questa interazione e come sia collegata agli aspetti fondamentali della realtà fisica dell'universo.

5.1 L'Articolo EPR

Classicamente, quando si considera un oggetto, ad esempio una pallina da tennis, si assume che le proprietà fisiche di tale oggetto esistano indipendentemente dall'osservazione. La misurazione, quindi, consiste nel mero processo di *rivelare* tali proprietà.

Tra il 1920 ed il 1930 però, con la nascita della Meccanica Quantistica, si sviluppò una nuova corrente di pensiero riguardo alle proprietà dei sistemi, che era intrinsecamente differente rispetto a quello della fisica classica. Come descritto precedentemente in questo elaborato, in Meccanica Quantistica una particella non possiede proprietà che esistano indipendentemente dall'osservazione ma piuttosto tali proprietà si presentano come conseguenza di misurazioni effettuate sul sistema considerato. La Meccanica Quantistica fornisce, pertanto, solo le regole (i postulati proposti nel primo capitolo) che specificano, dato un vettore di stato, le probabilità da associare ai possibili risultati ottenibili dalla misurazione di un'osservabile.

Ovviamente, non tutti gli alti esponenti della Fisica dell'epoca accolsero di buon grado questa nuova visione della Natura.

Nel 1935 venne pubblicato un famoso articolo, redatto da Albert Einstein, Boris Podolski e Nathan Rosen [3], in cui venne messa in discussione la completezza della Meccanica Quantistica. I tre fisici sostenevano con forza che, affinché una teoria fisica si potesse considerare di successo, essa doveva essere *corretta*, ossia le sue previsioni dovevano essere in accordo con i risultati sperimentali, e doveva essere allo stesso modo *completa*, ovvero sia la pretesa che ogni elemento della realtà fisica della Natura dovesse avere una controparte nella teoria fisica. Siccome è impossibile conoscere a priori gli elementi della realtà fisica, bisogna enunciare un criterio per determinarli, il cosiddetto *criterio di realismo*. Quest'ultimo prevede che se è possibile predire con certezza, ovvero con probabilità unitaria, senza in alcun modo disturbare il sistema, il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento della realtà fisica corrispondente a tale quantità fisica.

È facile notare che la Meccanica Quantistica (almeno nella consueta e finora adottata interpretazione di Copenaghen) non rispetta questo criterio. Di fatti, non è sempre possibile predire il valore di un'osservabile senza effettivamente misurarla e la misura, quantisticamente intesa, nasce dall'interazione tra apparato di misura e sistema da misurare; prima di tale interazione il risultato della misura non esiste. Si può altresì definire questa condizione sostenendo che la Meccanica Quantistica non possiede la cosiddetta *counterfactual definiteness*, ovvero non è possibile discutere la determinatezza di un risultato di una misura che non è stata ancora effettuata.

Nell'articolo, i tre fisici proposero un esperimento mentale che, a loro avviso, avrebbe dimostrato che la Meccanica Quantistica non era completa. Secondo i postulati della teoria, un sistema fisico è completamente determinato dal suo stato, o equivalentemente dalla sua matrice densità. La funzione d'onda associata allo stato deve, seguendo i postulati, fornire una descrizione completa del sistema, nel senso di completezza espresso in precedenza. Presi, però, due operatori non commutanti A e B , in base al principio di indeterminazione di Heisenberg, non sarà possibile conoscere allo stesso istante con arbitraria precisione i valori delle quantità fisiche corrispondenti ai due operatori. Inoltre, una misura di A altererebbe irreversibilmente lo stato e non ci sarebbe modo alcuno di conoscere il risultato della misura su B dello stato iniziale inalterato.

Partendo da queste assunzioni, esistono solo due conseguenze logiche:

- (1) o la funzione d'onda non fornisce realmente una descrizione completa della realtà;
- (2) o le quantità fisiche associate ai due operatori non esistono simultaneamente, ossia non viene rispettato il criterio di realismo.

Di fatti, se le due quantità esistessero contemporaneamente e la funzione d'onda offrisse una descrizione completa, allora quest'ultima dovrebbe comprendere la

descrizione di tali quantità e, per rispettare il criterio di realismo, i due valori di tali grandezze dovrebbero essere prevedibili, condizione che però non si verifica.

Dopo aver espresso questa ipotesi di base, EPR proseguirono il loro esperimento mentale cercando di scoprire quale delle due conseguenze fosse quella esatta. Considerarono dunque la funzione d'onda di due sistemi fisici che hanno interagito per un certo intervallo di tempo T , per poi essere separati: fu supposto che essa descrivesse completamente il sistema composito. A meno di accettare una teoria non locale e di azioni a distanza (assumendo quindi il cosiddetto *principio di località Einsteiniana*, secondo cui la trasmissione istantanea di un segnale è impossibile), quindi, i due sistemi, dopo la separazione descritti dallo stesso stato fisico, non avrebbero potuto più influenzarsi a vicenda.

Dopodiché, EPR immaginarono di effettuare una misurazione sul primo sottosistema di una certa osservabile P senza perturbare il secondo e, contemporaneamente, di misurare un'osservabile Q non commutante con P sul secondo sottosistema. Così facendo, erano convinti di poter misurare con precisione arbitraria due grandezze vincolate dal principio di indeterminazione di Heisenberg, provando l'inconsistenza della teoria. Ma ciò era stato ottenuto partendo dall'ipotesi che la funzione d'onda fornisse una descrizione completa della realtà, ovvero si è negata la (1) e si è arrivati a negare la (2) misurando due osservabili non compatibili, che era stata presentata come unica alternativa logica valida alla (1).

Seguendo questa trattazione, Einstein, Podolski e Rosen arrivarono alla conclusione che la funzione d'onda non potesse realmente fornire una descrizione completa della realtà, e che dunque la Meccanica Quantistica non fosse una teoria completa. I tre fisici conclusero l'articolo con l'auspicio che una teoria completa che accogliesse tutte le loro ipotesi, ovvero il criterio di realismo e il principio di località Einsteiniana, potesse essere presto formulata.

Nel prossimo paragrafo si vedrà come Bell ha dimostrato che una tale teoria è incompatibile con il funzionamento della Natura.

5.2 Il Teorema di Bell

La pubblicazione dell'articolo EPR scosse profondamente la comunità scientifica dell'epoca. Seguendo la tesi dell'incompletezza della Meccanica Quantistica, furono proposte diverse teorie a variabili nascoste, ovverosia teorie che includessero più variabili rispetto alla formulazione classica della teoria dei quanti, nella speranza che esse potessero risolvere il paradosso proposto dai tre fisici. Una teoria a variabili nascoste divenuta popolare in quegli anni è la teoria di De Broglie-Bohm, i quali avevano postulato l'esistenza di una "*onda pilota*" che, insieme alla funzione d'onda consueta, caratterizzasse completamente un sistema e che avesse la particolarità di esistere anche quando non fosse osservata. Nel 1964, quasi tren-

t'anni dopo la pubblicazione EPR, il fisico irlandese John Bell [5] pose fine alla questione, dimostrando che nessuna teoria locale e realistica¹ a variabili nascoste può riprodurre gli stessi risultati della Meccanica Quantistica. Per dimostrare questo importantissimo risultato si parte dalla formulazione di Bohm [12] della posizione EPR, ovvero la descrizione di un caso concreto a cui fare riferimento per l'esposizione del paradosso.

Si considera il decadimento del mesone neutro π_0 in un elettrone ed un positrone:

$$\pi_0 \longrightarrow e^- + e^+ \quad (5.1)$$

Si assume che il pione sia inizialmente a riposo, per cui dopo il decadimento l'elettrone ed il positrone volano in direzioni opposte.

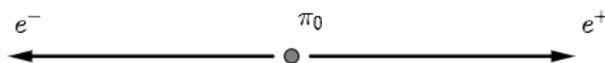


Figura 5.1: Decadimento di un pione neutro a riposo in elettrone/positrone.

Il pione ha spin nullo, pertanto la conservazione del momento angolare impone che elettrone e positrone si trovino nello stato di singoletto:

$$|\psi_{e^-,e^+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_-\downarrow_+\rangle - |\downarrow_-\uparrow_+\rangle). \quad (5.2)$$

Si effettua dunque la misura lungo un determinato asse: se l'elettrone sarà trovato con spin up, il positrone avrà necessariamente spin down e viceversa.

Si supponga poi di lasciar allontanare *notevolmente* le due particelle, ad esempio 10 metri in un esperimento pratico, o 10 anni luce in un esperimento ideale, per poi misurare lo spin dell'elettrone. Qualunque sia il risultato, l'osservatore che effettua la misura conosce immediatamente anche il valore (ovvero l'opposto del suo) che un altro osservatore troverebbe se esaminasse il positrone, a qualsiasi distanza esso sia arrivato.

Per i realisti, sostenitori della teoria di EPR, tale risultato non è una sorpresa. Nella visione dei tre fisici, infatti, l'elettrone possiede *realmente* un dato valore di spin, sia ad esempio spin up, e ritrovare quindi il positrone in spin down immediatamente non era un risultato incredibile.

Nella visione quantistica, invece, nessuna delle due particelle possiede né spin up né spin down fintantoché la misurazione non viene effettuata: è infatti tale operazione a far collassare la funzione d'onda del sistema e "produrre" lo spin anche a 10 metri (o 10 anni luce) di distanza.

¹Con "locale e realistica" si intende una teoria che rispetti sia l'ipotesi di località Einsteiniana sia il criterio di realismo descritti nel precedente paragrafo.

Einstein, Podolski e Rosen assegnarono a questo fenomeno la definizione di "*spooky action at a distance*" (letteralmente "spaventosa azione a distanza", utilizzata soprattutto in tono di scherno) e lo consideravano assurdo poiché in chiara contraddizione con il principio di località, per loro inattaccabile. Ancora una volta questo confermava la salda posizione di EPR in forte opposizione alla visione quantistica: per i tre fisici, che la Meccanica Quantistica fosse in grado di calcolarlo o meno, elettrone e positrone **DOVEVANO** avere un valore di spin ben definito.

Bell dunque suggerì una generalizzazione della versione di Bohm del paradosso EPR in cui i rilevatori di elettrone e positrone possono ruotare liberamente invece di essere fissati ed allineati lungo la stessa direzione. Il primo rilevatore, dunque, misura la componente dello spin dell'elettrone lungo la direzione di un vettore \hat{a} , mentre il secondo misura la componente dello spin del positrone lungo la direzione di un vettore \hat{b} , generalmente diverso da \hat{a} .

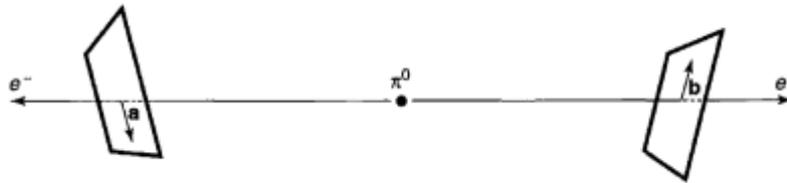


Figura 5.2: Versione generalizzata dell'esperimento EPR-Bohm

Per semplicità, si denoteranno di seguito gli spin in unità di $\hbar/2$: ogni rilevatore misurerà pertanto $+1$ per i risultati spin up e -1 per i risultati spin down lungo la direzione considerata. Bell propose di calcolare il valor medio $P(\hat{a}, \hat{b})$ del prodotto degli spin per un determinato set di orientazioni (\hat{a}, \hat{b}) . Se i rilevatori sono allineati ($\hat{b} = \hat{a}$) si riottiene la versione originale della configurazione EPR-Bohm: come già visto, in questo caso un risultato sarà sempre spin up mentre l'altro sempre spin down, il che implica che il prodotto sarà sempre pari a -1 . Di conseguenza la media sarà:

$$P(\hat{a}, \hat{a}) = -1. \quad (5.3)$$

In maniera analoga, se le direzioni sono anti-parallele ($\hat{b} = -\hat{a}$) ogni prodotto sarà $+1$, e quindi:

$$P(\hat{a}, -\hat{a}) = +1. \quad (5.4)$$

Per orientazioni arbitrarie, la Meccanica Quantistica in generale predice:

$$\boxed{P(\hat{a}, \hat{b}) = -\hat{a} \cdot \hat{b}}. \quad (5.5)$$

Il grande risultato di Bell, passato alla storia col nome di *Teorema di Bell*, consiste nel dimostrare che *questa condizione è incompatibile con qualsiasi teoria a variabili nascoste locali*.

L'argomentazione è sorprendentemente semplice. Si supponga che lo stato completo del sistema composito elettrone/positrone sia caratterizzato dalla variabile nascosta λ (o anche da un sistema di variabili nascoste, la cui somma dei contributi al sistema sia sempre esprimibile attraverso la sola λ). In quanto variabile nascosta, λ varia in un modo che non si comprende minimamente, né tantomeno si può manipolare, dal decadimento di un pione ad un altro. Si supponga poi che il risultato della misurazione effettuata sull'elettrone non dipenda in alcun modo dall'orientazione \hat{b} del rivelatore associato al positrone, il quale potrebbe anche essere scelto da uno sperimentatore al lato del positrone immediatamente prima che la misurazione sia effettuata. In tal modo, sarà dunque troppo tardi, per qualsiasi segnale che si muova a velocità inferiore o pari rispetto a quella della luce, per giungere al rivelatore associato all'elettrone. Così facendo si assume per assicurato il principio di località Einsteiniana.

Esisteranno allora una qualche funzione $A(\hat{a}, \lambda)$, che restituisca il risultato della misurazione effettuata sull'elettrone, ed una qualche funzione $B(\hat{b}, \lambda)$, che dia, invece, il risultato della misurazione effettuata sul positrone. Queste funzioni possono assumere esclusivamente i valori ± 1 :

$$A(\hat{a}, \lambda) = \pm 1; \quad B(\hat{b}, \lambda) = \pm 1. \quad (5.6)$$

Quando i rivelatori sono allineati, i risultati delle misurazioni saranno perfettamente anti-correlati:

$$B(\hat{b}, \lambda) = -A(\hat{b}, \lambda) \quad (5.7)$$

per qualsiasi λ .

Assumere l'esistenza di tali funzioni è formalmente equivalente all'assumere per assicurato il criterio di realismo. Tali funzioni, infatti, esprimono con certezza ed in ogni istante che lo spin sia ben definito e perfettamente prevedibile, sebbene non sia stato misurato. Inoltre, l'assunzione che esse siano l'una l'opposta dell'altra nel caso in cui i versori siano paralleli è una applicazione del precedentemente citato concetto di counterfactual definiteness, poiché si è assunta la determinatezza di un risultato senza che esso sia stato effettivamente misurato.

Se la variabile nascosta λ ha una densità di probabilità indicabile con $\varrho(\lambda)$, la media del prodotto delle misurazioni sarà data dalla relazione:

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = \int \varrho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda) d\lambda. \quad (5.8)$$

Le uniche ipotesi assunte sulla forma di $\varrho(\lambda)$ sono quelle che essa sia effettivamente una densità di probabilità classica, ovvero si richiede che sia non-negativa

e che soddisfi la condizione di normalizzazione:

$$\int \varrho(\lambda) d\lambda = 1. \quad (5.9)$$

Nessuna altra assunzione o congettura è necessaria su tale oggetto.

Data la (5.7), la precedente diventa:

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = - \int \varrho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) A(\hat{b}, \lambda) d\lambda. \quad (5.10)$$

Dalla linearità delle leggi appena trovate, è facile osservare che, dato un qualsiasi altro versore \hat{c} , si ottiene:

$$P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c}) = - \int \varrho(\lambda) \left[A(\hat{a}, \lambda) A(\hat{b}, \lambda) - A(\hat{a}, \lambda) A(\hat{c}, \lambda) \right] d\lambda, \quad (5.11)$$

che può essere facilmente riscritta considerando che $[A(\hat{b}, \lambda)]^2 = 1$:

$$P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c}) = - \int \varrho(\lambda) \left[1 - A(\hat{b}, \lambda) A(\hat{c}, \lambda) \right] A(\hat{a}, \lambda) A(\hat{b}, \lambda) d\lambda. \quad (5.12)$$

Dalle condizioni (5.6) segue però che il prodotto di due funzioni di questo tipo è pari anch'esso a ± 1 e dunque formalmente si può scrivere:

$$-1 \leq \left[A(\hat{a}, \lambda) A(\hat{b}, \lambda) \right] \leq +1; \quad \left| A(\hat{a}, \lambda) A(\hat{b}, \lambda) \right| = 1. \quad (5.13)$$

Per la stessa ragione, considerando anche la non-negatività della distribuzione di probabilità, si può scrivere ulteriormente:

$$\varrho(\lambda) \left[1 - A(\hat{b}, \lambda) A(\hat{c}, \lambda) \right] \geq 0. \quad (5.14)$$

Dal confronto, si ottiene facilmente:

$$\left| P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c}) \right| \leq \int \varrho(\lambda) \left[1 - A(\hat{b}, \lambda) A(\hat{c}, \lambda) \right] d\lambda, \quad (5.15)$$

che utilizzando l'ipotesi (5.9) può essere riscritta nella più semplice forma:

$$\boxed{\left| P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c}) \right| \leq 1 + P(\hat{b}, \hat{c})}. \quad (5.16)$$

Quest'ultimo risultato è una delle possibili relazioni che prendono il nome di **Disuguaglianze di Bell**. Questa in particolare è valida per *qualsiasi* teoria a variabili

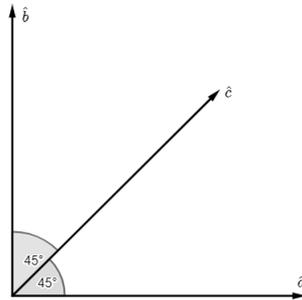


Figura 5.3: Un'orientazione dei vettori che dimostra la violazione della disuguaglianza di Bell da parte della Meccanica Quantistica.

nascoste locali, soggetta ai requisiti minimi posti dalle equazioni (5.6) e (5.7), dato che nessuna particolare assunzione è stata presa in considerazione riguardo alla variabile nascosta λ od alla sua distribuzione $\varrho(\lambda)$.

Risulta semplicissimo mostrare che le previsioni della Meccanica Quantistica sono incompatibili con la disuguaglianza di Bell. Si supponga a tal fine che i tre vettori giacciono su un solo piano, con \hat{c} che forma un angolo di 45° con \hat{a} e \hat{b} come in Figura 5.3.

In questo caso, la Meccanica quantistica fornisce le seguenti previsioni:

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = 0; P(\hat{a}, \hat{c}) = P(\hat{b}, \hat{c}) = -\cos(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq -0.707, \quad (5.17)$$

i quali risultano chiaramente inconsistenti con la disuguaglianza di Bell:

$$|-0.707| = 0.707 \not\leq 0.293 = 1 - 0.707. \quad (5.18)$$

Pertanto, risulta dimostrato che non può esistere una teoria a variabili nascoste locali che rispetti le previsioni della Meccanica Quantistica.

Essendo queste confermate da un grandissimo numero di evidenze sperimentali, se ne deduce che bisogna abbandonare o l'ipotesi di località o il criterio di realismo.

Preferendo il criterio di realismo, si parla di *nonlocalità quantistica* e di azioni a distanza. È possibile dimostrare che, tramite queste azioni a distanza, non è possibile comunicare informazioni, quindi vengono rispettati i postulati della relatività speciale di Einstein.

I fisici tendono a preferire il principio di località al criterio di realismo. La teoria quantistica dei campi è basata sulla località e si è dimostrata una teoria fisica di successo.

Grazie ai risultati di Bell, si comprende che il paradosso EPR prova addirittura qualcosa di molto più radicale e profondo rispetto a ciò che i suoi autori immagina-

vano: se la loro ipotesi fosse stata corretta, la Meccanica Quantistica non sarebbe stata semplicemente incompleta, ma sarebbe stata assolutamente sbagliata!

Pertanto, a fronte delle evidenze scientifiche, che prepotentemente confermano le previsioni della teoria dei quanti, si è costretti ad abbandonare l'idea di variabili nascoste che permettano di determinare in un momento qualsiasi il valore di una grandezza fisica, ed accettare l'indeterminatezza quantistica non come una mancanza di conoscenza o come un'incompletezza della teoria stessa, ma come una caratteristica intrinseca nella Natura.

5.3 Alcuni esperimenti sulle disuguaglianze di Bell

Dal momento della sua pubblicazione, il teorema di Bell ha concentrato gli sforzi ed i lavori di innumerevoli fisici sperimentali. Tra i primi spiccano Clauser e Freedman [6] che utilizzarono i fotoni emessi dalla diseccitazione degli atomi di calcio. Quest'ultimi, infatti, dopo essere stati eccitati ad alti livelli energetici, si diseccitano spontaneamente emettendo radiazione. Fu scelto proprio questo elemento perché, affinché si ottenessero misurazioni valide, occorreva che la radiazione emessa fosse nello spettro del visibile, ed il calcio emette in tale spettro. L'emissione spontanea da parte del calcio è solitamente un'emissione a singolo fotone, con alcuni eventi rari di emissione a due fotoni. I due fisici statunitensi volevano sfruttare proprio questi eventi di doppia emissione, poiché, dato che lo stato iniziale e lo stato finale del processo di emissione a cascata hanno momento angolare nullo, allora i due fotoni dovranno avere momento angolare nullo, e ciò garantisce che la coppia di fotoni sia entangled.

Venne allora costruito un apparato comprendente una sorgente, che eccitava gli atomi di calcio ad alti livelli energetici, e due polarizzatori orientati in direzioni differenti, verso i quali venivano indirizzati i due fotoni componenti di una coppia. Ai capi opposti dei polarizzatori erano presenti due rilevatori che raccoglievano i fotoni che riuscivano a passare attraverso i polarizzatori e li inviavano ad un contatore di incidenze che registrava i risultati.

L'esperimento, pur essendo ben progettato, non fu un grande successo: i decadimenti che producevano coppie di fotoni non correlati erano di gran lunga i più frequenti (senza considerare i decadimenti ad un fotone, che come detto in precedenza è il decadimento principale), e, allorquando venisse prodotta una coppia entangled, il segnale luminoso risultava troppo debole. Secondo i risultati raccolti, si riusciva a registrare una sola coppia di fotoni entangled ogni milione di coppie prodotte, numeri che avrebbero facilmente reso possibili polemiche e contestazioni dei risultati ottenuti. Clauser e Freedman si adoperarono dunque per parecchio tempo per ottenere un numero comunque esiguo di dati, che però mostrarono un risultato inequivocabilmente concorde con le predizioni quantistiche.

Con l'avvento di nuove tecnologie, nel corso degli anni, gli esperimenti vennero notevolmente migliorati, in modo da limitare al minimo le possibili contestazioni. In particolare, ricopre un ruolo fondamentale in tal senso Alain Aspect [8], il quale, dopo aver osservato i risultati dei predecessori, progettò una serie di 3 tipi di esperimento:

1. il primo tipo riprendeva uno schema a canale singolo e si proponeva di replicare i risultati ottenuti da Clauser e Freedman, in modo più preciso, ottimizzando la produzione delle coppie di fotoni;
2. il secondo tipo di esperimento sarebbe stato un esperimento a due canali, più vicino ad un esperimento ideale. La presenza di un secondo canale consente di controllare più efficacemente il passaggio dei fotoni attraverso i polarizzatori e permette all'osservatore di ricevere più dati, con la certezza che il fotone in esame sia uscito da uno dei due canali;
3. infine, nella terza tipologia di esperimento si sarebbero scelte le direzioni degli analizzatori durante la fase di volo dei fotoni. Con questo accorgimento si impediva qualsiasi possibile scambio di informazione tra i due fotoni che avrebbe potuto in qualche modo modificarli così da fornire un risultato concorde. Gli analizzatori, dunque, venivano orientati in modo casuale e il tipo di esperimento viene detto *a scelta ritardata*.

Con queste serie di esperimenti, Aspect tentava di ottenere una violazione definitiva alle disuguaglianze di Bell, operando dei protocolli che dovessero essere inattaccabili oltre ogni ragionevole dubbio.

Per i suoi esperimenti Aspect adoperò il laser per eccitare gli atomi di calcio, il quale migliorò notevolmente, in termini di velocità e di efficienza, la produzione di coppie di fotoni entangled. In questo modo, gli esperimenti a canale singolo portarono a risultati molto precisi, in cui la violazione della disuguaglianza di Bell presentava uno scarto di 9 deviazioni standard. Come negli esperimenti di Clauser e Freedman, però, quando un fotone arrivava ad un polarizzatore con una polarizzazione sbagliata, esso veniva completamente perso.

Nelle esperienze a doppio canale (Figura 5.4) veniva superato questo ostacolo: un fotone con polarizzazione non congruente veniva riflesso dal polarizzatore e quindi rianalizzato. La presenza del secondo canale aumentava, dunque, ancora di più la precisione dell'apparato e in tale configurazione la disuguaglianza di Bell era violata con uno scarto di ben 40 deviazioni standard.

Le esperienze della terza tipologia erano però le più importanti, perché avrebbero fornito una vera e propria conferma empirica della non località a cui la descrizione fisica della Natura doveva sottostare. Aspect quindi preparò un apparato simile a quello in Figura 5.4, con i polarizzatori collegati ognuno ad un interruttore, capace di determinare rapidamente a quale di essi inviare il fotone in entrata. Si

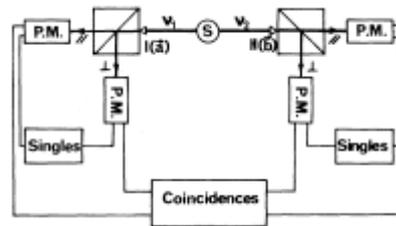


Figura 5.4: Schema della configurazione a due canali negli esperimenti di Aspect (direttamente dalle sue pubblicazioni [8]).

utilizzò, per gestire l'orientazione dei polarizzatori, uno strumento acustico-ottico che sfruttava la rifrazione della luce attraverso un'onda stazionaria di ultrasuoni in acqua: se l'onda cambiava, la luce veniva deflessa e ciò modificava la regolazione degli strumenti. Con la strumentazione in dotazione ad Aspect, la deflessione luminosa faceva scambiare i polarizzatori ad intervalli compresi tra 6.7 e 13.3 nanosecondi. Il fisico, pertanto, posizionò i polarizzatori ognuno ad una distanza di 6.5 metri dalla sorgente, in modo tale da ottenere una distanza totale tra i polarizzatori di 13 metri, la quale consentiva di operare la scelta dell'orientazione del polarizzatore più rapidamente di quanto potessero scambiare informazioni i due fotoni (un'ipotetica informazione di questo tipo avrebbe viaggiato da un polarizzatore all'altro in circa $13 m / c \simeq 43 ns$).

Come nelle altre tipologie, la terza serie di esperimenti ottenne risultati mai prima d'allora così precisi e profondamente concordi ai precedenti: le disuguaglianze di Bell venivano regolarmente violate.

Negli anni successivi, gli esperimenti di Aspect, direttamente ispirati alle idee di Clauser e Freedman, furono ripetuti e ulteriormente migliorati. Un esempio degno di nota è quello condotto da Anton Zeilinger [17], capace di utilizzare la luce emessa dalle galassie rifratta su cristalli speciali (sviluppati per esperimenti di ottica non lineare) come sorgente sostitutiva degli atomi di calcio per le coppie entangled di fotoni. Usando questi cristalli, poi, Zeilinger riuscì a generare, a partire da due coppie di fotoni entangled, un entanglement che comprendesse tre (o addirittura tutti e quattro) fotoni, espandendo le potenzialità del fenomeno dell'entanglement e contribuendo alla creazione di una "*quantum communication web*", un Internet quantistico, alla base delle moderne applicazioni di Fisica Quantistica Computazionale.

Nel 2022, John Clauser, Alain Aspect e Anton Zeilinger sono stati insigniti del Premio Nobel per la Fisica (purtroppo, Stuart Freedman non ha avuto l'onore di ricevere lo stesso riconoscimento a causa della prematura scomparsa nel 2012 e delle regole del premio che non permettono assegnazioni postume) per l'immenso lavoro sperimentale da loro eseguito sui fotoni entangled che, come visto, ha

confermato la violazione delle disuguaglianze di Bell e si è rivelato pionieristico nell'ambito dell'informazione Quantistica [28].

5.4 Il Teorema No-Cloning ed il Teletrasporto quantistico

Successivamente al lavoro di Bell, l'Entanglement quantistico diventò oggetto di numerosi ed intensi studi tra coloro i quali fossero interessati ai fondamenti della Meccanica Quantistica. Gradualmente, quindi, si comprese che esso non era solo un efficace strumento di risposta alle critiche mosse contro la teoria, ma poteva essere una vera e propria risorsa, capace di permettere o semplificare nuovi obiettivi altrimenti impossibili o troppo difficili da ottenere. In un clima del genere si sviluppò il cosiddetto *protocollo del teletrasporto* [10] [14]. Esso, più generalmente detto Teletrasporto quantistico, è un insieme di procedure tramite il quale è possibile trasmettere informazione quantistica da un luogo all'altro, sfruttando una trasmissione di informazione classica.

Tale protocollo assume importanza ancora più elevata considerando il celebre *Teorema No-Cloning* [11], il quale afferma che non è possibile generare una copia esatta di uno stato quantistico sconosciuto a priori. Una formulazione semplificata di tale teorema può essere analizzata considerando due vettori normalizzati, $|\phi\rangle$ e $|e\rangle$, appartenenti ad un certo spazio di Hilbert \mathcal{H} , ed un operatore unitario U "di clonazione" agente su $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ tale che:

$$U(|\phi\rangle |e\rangle) = |\phi\rangle |\phi\rangle. \quad (5.19)$$

L'azione di U è pertanto quella di clonare lo stato $|\phi\rangle$, "copiando" e "trasferendo" l'informazione fisica in esso contenuto sul vettore $|e\rangle$. Il risultato del Teorema No-Cloning è dunque quello di dimostrare che un tale operatore non può esistere, a meno che lo stato da clonare non faccia parte di un set ortonormale di stati (e quindi sia in una certa misura noto a priori). Trascurando eventuali fasi complesse che potrebbero matematicamente comparire senza alterare il significato fisico dei vettori, è semplice vedere che, preso un terzo vettore normalizzato $|\psi\rangle$ di \mathcal{H} si avrà:

$$\begin{aligned} \langle\phi|\psi\rangle &= \langle\phi|\psi\rangle \langle e|e\rangle = \langle\phi|\langle e|\psi\rangle |e\rangle \\ &= \langle\phi|\langle e|U^\dagger U|\psi\rangle |e\rangle = \langle\phi|\langle\phi|\psi\rangle |\psi\rangle \\ &= \langle\phi|\psi\rangle^2, \end{aligned} \quad (5.20)$$

da cui si ottiene immediatamente:

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi|\psi\rangle| \quad (5.21)$$

che implica $|\langle\phi|\psi\rangle| = 1$ oppure $|\langle\phi|\psi\rangle| = 0$. Tali condizioni corrispondono rispettivamente a richiedere che gli stati $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ siano uguali (a meno di una fase) o che siano ortogonali; è ovvio che tali condizioni non sono soddisfatte da una generica coppia di vettori normalizzati in un generico spazio di Hilbert e pertanto si conclude che un tale operatore non può esistere, provando il teorema. Questo teorema trova applicazione non solo nell'ambito dell'Informazione quantistica, ma anche in altri campi di studio relativi alla teoria dei quanti, come ad esempio gli studi che coinvolgono il problema della misura.

Tornando ai modi in cui l'entanglement possa essere usato come una risorsa, si immagini una coppia di osservatori, Alice e Bob, capaci di trasmettersi informazione classica ma collegati anche da un canale quantistico. In una condizione così generale, l'invio di un bit classico e l'invio di un qubit (accuratamente preparato da Alice e poi misurato da Bob, ad esempio) sono completamente equivalenti: ogni Qubit potrà, infatti, trasmettere, lungo il canale quantistico, un solo bit di informazione classica.

Si supponga, invece, che Alice e Bob condividano una coppia di qubit in uno stato entangled. Per semplicità di trattazione si utilizzano, ad esempio, i cosiddetti *stati di Bell* (o più precisamente la *base di Bell*, talvolta detti anche *coppie EPR* per ragioni storiche), ovvero quattro specifici stati quantistici di due qubit maximally entangled:

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \quad (5.22)$$

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \quad (5.23)$$

Si supponga allora che un osservatore esterno abbia preparato lo stato $|\phi^+\rangle$, ed abbia poi successivamente separato i due qubit, inviandone uno ad Alice ed uno a Bob, e che loro abbiano preventivamente stabilito un codice. Per semplicità di trattazione si può supporre, senza ledere la generalità, che Alice abbia il "primo" qubit, mentre a Bob sia stato affidato il "secondo" qubit; quando sarà necessario distinguere gli spazi di tali qubit si indicherà con A lo spazio del qubit di Alice e con B lo spazio del qubit di Bob. Alice potrà, allora, effettuare sul suo qubit, membro della coppia entangled, una di quattro possibili trasformazioni unitarie (che pertanto operano solo sul primo qubit della coppia):

1. I , l'operatore identità, senza modificare nulla;
2. σ_x , producendo una rotazione di 180° rispetto l'asse x ;
3. σ_y , producendo una rotazione di 180° rispetto l'asse y ;
4. σ_z , producendo una rotazione di 180° rispetto l'asse z ;

È facile vedere che, successivamente alle operazioni di Alice che modificano il primo qubit, lo stato entangled totale si trasformerà di conseguenza in un nuovo stato, sempre appartenente alla base di Bell:

1. $\mathbf{I}^{(A)} \otimes \mathbf{I}^{(B)} |\phi^+\rangle = |\phi^+\rangle$;
2. $\sigma_x^{(A)} \otimes \mathbf{I}^{(B)} |\phi^+\rangle = |\psi^+\rangle$;
3. $\sigma_y^{(A)} \otimes \mathbf{I}^{(B)} |\phi^+\rangle = |\psi^-\rangle$ (a meno di una fase);
4. $\sigma_z^{(A)} \otimes \mathbf{I}^{(B)} |\phi^+\rangle = |\phi^-\rangle$;

Alice potrà dunque adesso inviare a Bob, attraverso il canale quantistico, il suo qubit. Bob, dopo averlo ricevuto, opererà una misura ortogonale collettiva sulla coppia entangled di qubit, rivelando il nuovo stato e, senza alcuna ambiguità, anche l'operazione effettuata da Alice. Prendendo come esempio di codice pre-stabilito:

1. $|\phi^+\rangle \implies 00$;
2. $|\psi^+\rangle \implies 01$;
3. $|\psi^-\rangle \implies 10$;
4. $|\phi^-\rangle \implies 11$;

si comprende come in questo modo, l'invio di un solo qubit trasmette due bit classici. Questa particolare procedura prende il nome di *dense coding* [13] e mostra attivamente come l'entanglement quantistico possa essere una valida risorsa nelle comunicazioni ed in generale nella teoria dell'Informazione, migliorandone notevolmente l'efficienza.

Inoltre, il dense coding è alla base delle nuove teorie sulla criptazione dei messaggi: il qubit trasmesso, infatti, non trasporta nessuna informazione. Quest'ultima risiede in realtà nella correlazione dei due qubit e, pertanto, anche se il primo qubit fosse in qualche modo intercettato, il messaggio non potrebbe comunque in alcun modo essere accessibile a nessun altro che non sia il destinatario, in possesso del secondo qubit.

Il dense coding appena descritto può essere considerato come la procedura inversa del teletrasporto quantistico: in esso infatti viene utilizzata la trasmissione di un qubit per trasmettere due bit di informazione classica. Nel protocollo del teletrasporto, invece, si vuole sfruttare la trasmissione di bit classici per ottenere il passaggio di un qubit.

Si immagini allora un terzo sperimentatore, Charlie, che prepara il qubit $|\chi_C\rangle$, ignoto sia ad Alice che a Bob, per poi affidarlo ad Alice. Nella forma più generale

possibile (esplicitando gli spazi di definizione dei diversi qubit, affidando a questo ignoto lo spazio C), il qubit ignoto sarà:

$$|\chi_C\rangle = a|0_C\rangle + b|1_C\rangle; \quad (5.24)$$

con naturalmente $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Alice e Bob, invece, siano ancora ciascuno in possesso di un qubit della coppia EPR $|\phi^+\rangle$, indicata esplicitamente ora come:

$$|\phi_{AB}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A\rangle|0_B\rangle + |1_A\rangle|1_B\rangle). \quad (5.25)$$

Il protocollo del teletrasporto prevede che Alice possa inviare il qubit ignoto $|\chi_C\rangle$ a Bob sfruttando lo stato di Bell $|\phi_{AB}^+\rangle$ unitamente alla trasmissione di due bit classici. Alice dovrà far interagire il qubit incognito $|\chi_C\rangle$ con la sua metà della coppia $|\phi_{AB}^+\rangle$. In questo modo si formerà un nuovo stato intermedio, il quale, per le proprietà delle basi di Bell, potrà essere espresso nella base $\{|\phi_{CA}^\pm\rangle, |\psi_{CA}^\pm\rangle\}$. Alice allora potrà effettuare una cosiddetta *misurazione di Bell* sullo stato intermedio, ovvero dovrà proiettarlo sulla base $\{|\phi_{CA}^\pm\rangle, |\psi_{CA}^\pm\rangle\}$, per poi inviare il risultato di tale misurazione a Bob attraverso due bit classici. Bob, dopo aver acquisito il risultato della misurazione di Bell condotta da Alice, opererà sulla propria metà della coppia $|\phi_{AB}^+\rangle$ una certa trasformazione unitaria dipendente proprio dal risultato di Alice, ottenendo infine esattamente il qubit ignoto $|\chi_C\rangle$. Per mostrare la validità del protocollo basta osservare lo stato che si ottiene considerando i tre qubit insieme:

$$\begin{aligned} |\chi_C\rangle |\phi_{AB}^+\rangle &= (a|0_C\rangle + b|1_C\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A\rangle|0_B\rangle + |1_A\rangle|1_B\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a|0_C\rangle|0_A\rangle|0_B\rangle + a|0_C\rangle|1_A\rangle|1_B\rangle) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(b|1_C\rangle|0_A\rangle|0_B\rangle + b|1_C\rangle|1_A\rangle|1_B\rangle) \\ &= \frac{1}{2}a(|\phi_{CA}^+\rangle + |\phi_{CA}^-\rangle)|0_B\rangle + \frac{1}{2}a(|\psi_{CA}^+\rangle + |\psi_{CA}^-\rangle)|1_B\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}b(|\psi_{CA}^+\rangle - |\psi_{CA}^-\rangle)|0_B\rangle + \frac{1}{2}b(|\phi_{CA}^+\rangle - |\phi_{CA}^-\rangle)|1_B\rangle \\ &= \frac{1}{2}|\phi_{CA}^+\rangle(a|0_B\rangle + b|1_B\rangle) + \frac{1}{2}|\psi_{CA}^+\rangle(a|1_B\rangle + b|0_B\rangle) \\ &\quad + \frac{1}{2}|\psi_{CA}^-\rangle(a|1_B\rangle - b|0_B\rangle) + \frac{1}{2}|\phi_{CA}^-\rangle(a|0_B\rangle - b|1_B\rangle) \\ &= \frac{1}{2}|\phi_{CA}^+\rangle|\chi_B\rangle + \frac{1}{2}|\psi_{CA}^+\rangle\sigma_x|\chi_B\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}|\psi_{CA}^-\rangle(-i)\sigma_y|\chi_B\rangle + \frac{1}{2}|\phi_{CA}^-\rangle\sigma_z|\chi_B\rangle \end{aligned} \quad (5.26)$$

Quindi, quando Alice compie la misurazione di Bell proiettando questo stato sulla base $\{|\phi_{CA}^{\pm}\rangle, |\psi_{CA}^{\pm}\rangle\}$, ognuno dei vettori di base ha la stessa probabilità di essere osservato. Questo, matematicamente, comporta che, a seguito dell'interazione tra il qubit ignoto e il suo qubit entangled, Alice misurerà uno dei vettori della base di Bell appena scritta, mentre Bob avrà tra le mani uno stato puro del tipo $\sigma|\chi\rangle$, dove σ è uno dei noti operatori di Pauli $\{\mathbf{I}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$. Utilizzando il medesimo codice descritto nel processo del dense coding, si avranno quattro diversi possibili esiti:

1. Alice misura $|\phi_{CA}^+\rangle \implies$ Alice comunica 00 \implies Bob applica \mathbf{I} ;
2. Alice misura $|\psi_{CA}^+\rangle \implies$ Alice comunica 01 \implies Bob applica σ_x ;
3. Alice misura $|\psi_{CA}^-\rangle \implies$ Alice comunica 10 \implies Bob applica σ_y ;
4. Alice misura $|\phi_{CA}^-\rangle \implies$ Alice comunica 11 \implies Bob applica σ_z ;

Al termine di questo protocollo, quindi, Bob avrà esattamente una copia del qubit ignoto iniziale $|\chi_C\rangle$ e quindi, come previsto, sfruttando la trasmissione di due bit classici e una coppia di qubit entangled si è riusciti a "teletrasportare" un qubit da un luogo fisico ad un altro.

Si vuole specificare che, come mostrato, sebbene il nome suggestivo possa trarre in inganno, il teletrasporto quantistico è in realtà solo una forma di comunicazione e non un effettivo trasporto di energia o materia.

Si vuole altresì osservare che la procedura del teletrasporto è consistente con il Teorema No-Cloning. Di fatti, una copia dello stato $|\chi_B\rangle$ sembra comparsa nelle mani di Bob, ma affinché ciò sia possibile, il qubit originario $|\chi_C\rangle$ deve essere distrutto dall'interazione e la successiva misurazione operate da Alice.

Poiché il qubit in possesso di Bob è inizialmente completamente scorrelato dal qubit ignoto $|\chi_C\rangle$, poiché il risultato della misura di Alice è del tutto casuale e non rivela nessuna informazione rispetto al qubit ignoto (che altrimenti disturberebbe irrimediabilmente lo stato da teletrasportare), poiché allo stesso modo i bit di informazione classica sono casuali (in quanto conseguenza della misurazione), allora è banale comprendere che è il fenomeno dell'entanglement a permettere il funzionamento del protocollo. Questa però non è un'osservazione banale: la coppia entangled può essere preparata anche parecchio in precedenza che il teletrasporto venga operato, anche prima addirittura che si scelga di effettuarlo: questa è la grande potenza di questo fenomeno e delle sue applicazioni.

Il dense coding è stato introdotto da Charles Bennett per la prima volta in un articolo del 1992 [13], per poi essere osservato praticamente con un esperimento del 1996 [15], e tra i suoi esecutori compare anche Anton Zeilinger.

Il teletrasporto quantistico, invece, fu introdotto teoricamente dallo stesso Bennett in un articolo del 1993 [14], per poi essere realizzato nel 1997 [16]. Più recentemente, nel 2017 [26] si è arrivati a teletrasportare uno stato quantistico ad una distanza record di 1400 *km*, impiegando un sistema di comunicazione tra la Terra ed un satellite.

Quanto visto in quest'ultimo paragrafo sono solo alcune delle innovative applicazioni del fenomeno dell'entanglement. Nell'ultimo trentennio si sono sviluppate innumerevoli teorie e proposte di applicazione, soprattutto nell'ambito dell'Informazione quantistica [22], che, se correttamente messe in atto, potrebbero portare a futuristici miglioramenti nella crittografia, nella simulazione di sistemi complessi (con applicazioni fondamentali in biologia), ed in generale nell'ingegneria informatica.

Sfruttare a pieno le potenzialità di tale fenomeno potrebbe quindi portare all'avvento di un computer quantistico completo, consentendo all'umanità lo sviluppo di nuove e più efficienti tecnologie.

Appendice A

Differenza tra miscela statistica e sovrapposizione lineare

Esistono numerose evidenze della discrepanza tra i concetti di miscele statistiche e sovrapposizioni lineari; in questa discussione ne vengono proposte alcune di tipo teorico.

Siano $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ due stati, per semplicità assunti come ortonormali:

$$\begin{aligned}\langle\psi_1|\psi_1\rangle &= \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1 \\ \langle\psi_1|\psi_2\rangle &= 0.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Come esempio $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ potrebbero essere due autostati della stessa osservabile B , associati a due autovalori distinti b_1 e b_2 . Si ipotizza allora che il sistema si trovi nello stato $|\psi_1\rangle$; applicando i postulati del primo capitolo si potranno calcolare tutte le probabilità riguardanti i risultati delle misurazioni su una detta osservabile A . Sia allora $|a_n\rangle$ l'autovettore (normalizzato) associato all'autovalore a_n (assunto per semplicità non degenere) di A , la probabilità $\mathcal{P}_1(a_n)$ di trovare a_n quando A viene misurato sul sistema nello stato $|\psi_1\rangle$ sarà pertanto:

$$\mathcal{P}_1(a_n) = |\langle a_n|\psi_1\rangle|^2.\tag{A.2}$$

Analogamente per uno stato $|\psi_2\rangle$ si può definire la quantità:

$$\mathcal{P}_2(a_n) = |\langle a_n|\psi_2\rangle|^2.\tag{A.3}$$

Sia ora $|\psi\rangle$ uno stato normalizzato, sovrapposizione lineare di $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, come descritto nel secondo capitolo si avrà:

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle \\ |c_1|^2 + |c_2|^2 &= 1.\end{aligned}\tag{A.4}$$

Come già visto nel secondo capitolo, quando il sistema si trova in uno stato di tale tipologia non è raro leggere che si ha probabilità $|c_1|^2$ di trovarlo nello stato $|\psi_1\rangle$ e probabilità $|c_2|^2$ di trovarlo nello stato $|\psi_2\rangle$. Come è stato già chiarito, con questo modo di dire si intende indicare che se $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ sono due autovettori (assunti normalizzati in questa trattazione) dell'osservabile \mathbf{B} , corrispondenti a due autovalori distinti rispettivamente b_1 e b_2 , allora la probabilità di trovare b_1 quando \mathbf{B} è misurato è pari a $|c_1|^2$ e quella di trovare b_2 quando \mathbf{B} è misurato è pari a $|c_2|^2$.

Queste considerazioni, se accettate senza la corretta chiave di lettura appena proposta, potrebbero condurre fallacemente a credere che uno stato come quello descritto nell'equazione (A.4) sia una miscela statistica degli stati $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ con pesi probabilistici $|c_1|^2$ e $|c_2|^2$. Tale interpretazione per lo stato $|\psi\rangle$ è però sbagliata e conduce a predizioni fisiche inaccurate, come si vedrà in seguito.

Si mantenga la definizione (A.4) per lo stato $|\psi\rangle$ e si supponga di voler calcolare la probabilità $\mathcal{P}(a_n)$ che una misurazione operata sull'osservabile \mathbf{A} restituisca l'autovalore a_n quando il sistema si trovi, appunto, nello stato $|\psi\rangle$. Dai postulati si calcola questa probabilità come:

$$\mathcal{P}(a_n) = |\langle a_n | \psi \rangle|^2 = |c_1 \langle a_n | \psi_1 \rangle + c_2 \langle a_n | \psi_2 \rangle|^2, \quad (\text{A.5})$$

da cui si ottiene facilmente

$$\mathcal{P}(a_n) = |c_1|^2 |\langle a_n | \psi_1 \rangle|^2 + |c_2|^2 |\langle a_n | \psi_2 \rangle|^2 + 2\Re\{c_1 c_2^* \langle a_n | \psi_1 \rangle \langle a_n | \psi_2 \rangle^*\}, \quad (\text{A.6})$$

che, tenuto conto delle equazioni (A.2) e (A.3), diventa:

$$\mathcal{P}(a_n) = |c_1|^2 \mathcal{P}_1(a_n) + |c_2|^2 \mathcal{P}_2(a_n) + 2\Re\{c_1 c_2^* \langle a_n | \psi_1 \rangle \langle a_n | \psi_2 \rangle^*\}. \quad (\text{A.7})$$

Se, invece, $|\psi\rangle$ fosse considerato come una miscela statistica, banalmente la $\mathcal{P}(a_n)$ dovrebbe essere una somma delle probabilità in (A.2) e (A.3) pesata dalle probabilità relative $|c_1|^2$ e $|c_2|^2$, ovvero:

$$\mathcal{P}(a_n) = |c_1|^2 \mathcal{P}_1(a_n) + |c_2|^2 \mathcal{P}_2(a_n). \quad (\text{A.8})$$

È banale osservare che quest'ultimo risultato è diverso da quello ottenuto nella (A.7).

È stato dimostrato dunque semplicemente che è sbagliato considerare uno stato descritto da una sovrapposizione lineare di stati alla pari di una miscela statistica, poiché tale interpretazione eliminerebbe tutti gli effetti di interferenza che compaiono nel doppio prodotto della (A.7), ovvero gli effetti dovuti alla fase relativa dei due stati in sovrapposizione, di rilevanza fondamentale nelle predizioni fisiche.

Bibliografia

- [1] Erhard Schmidt. “Zur *Theorie* der linearen und nichtlinearen *Integralgleichungen*”. In: *Mathematische Annalen* 63.4 (dic. 1907).
- [2] Paul Adrien Maurice Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 1930.
- [3] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen. “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?” In: *Physical Review* 47.10 (mag. 1935), pp. 777–780.
- [4] C. E. Shannon. “A Mathematical Theory of Communication”. In: *Bell System Technical Journal* 27.3 (lug. 1948), pp. 379–423.
- [5] J. S. Bell. “On the Einstein Podolsky Rosen paradox”. In: *Physics Physique Fizika* 1.3 (nov. 1964), pp. 195–200.
- [6] Stuart J. Freedman e John F. Clauser. “Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories”. en. In: *Physical Review Letters* 28.14 (apr. 1972), pp. 938–941.
- [7] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu e Franck Laloë. *Quantum mechanics*. New York: Wiley, 1977. ISBN: 9780471164326-9780471164333.
- [8] Alain Aspect, Philippe Grangier e Gérard Roger. “Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment* : A New Violation of Bell’s Inequalities”. In: *Physical Review Letters* 49.2 (lug. 1982), pp. 91–94.
- [9] Piero Caldirola, Renzo Cirelli e Giovanni M. Prosperi. *Introduzione alla fisica teorica*. Torino: UTET, 1982. ISBN: 9788802037226.
- [10] D. Dieks. “Communication by EPR devices”. In: *Physics Letters A* 92.6 (nov. 1982), pp. 271–272.
- [11] W. K. Wootters e W. H. Zurek. “A single quantum cannot be cloned”. In: *Nature* 299.5886 (ott. 1982), pp. 802–803.
- [12] David Bohm. *Quantum theory*. New York: Dover Publications, 1989. ISBN: 9780486659695.

- [13] Charles H. Bennett e Stephen J. Wiesner. “Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states”. In: *Physical Review Letters* 69.20 (nov. 1992), pp. 2881–2884.
- [14] Charles H. Bennett et al. “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels”. In: *Physical Review Letters* 70.13 (mar. 1993), pp. 1895–1899.
- [15] Klaus Mattle et al. “Dense Coding in Experimental Quantum Communication”. In: *Physical Review Letters* 76.25 (giu. 1996), pp. 4656–4659.
- [16] Dik Bouwmeester et al. “Experimental quantum teleportation”. In: *Nature* 390.6660 (dic. 1997), pp. 575–579.
- [17] Anton Zeilinger et al. “Three-Particle Entanglements from Two Entangled Pairs”. In: *Physical Review Letters* 78.16 (apr. 1997), pp. 3031–3034.
- [18] B. H. Bransden e C. J. Joachain. *Quantum mechanics*. 2nd ed. Harlow, England ; New York: Prentice Hall, 2000. ISBN: 9780582356917.
- [19] David J. Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2005. ISBN: 9780131118928.
- [20] Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. 10th anniversary ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN: 9780511992773.
- [21] Karl Blum. *Density matrix theory and applications*. 3rd ed. Springer series on atomic, optical and plasma physics 64. Heidelberg ; New York: Springer, 2012. ISBN: 9783642205606.
- [22] Mark Wilde. *Quantum information theory*. Cambridge, UK. ; New York: Cambridge University Press, 2013. ISBN: 9781107034259.
- [23] John Preskill. *Lecture Notes for Ph219: Quantum Computation*. 2015. URL: <http://theory.caltech.edu/~preskill/ph219/index.html>.
- [24] Leonard Susskind e Art Friedman. *Meccanica quantistica: il minimo indispensabile per fare della (buona) fisica*. Milano: Cortina, 2015. ISBN: 9788860307613.
- [25] Jonas Maziero. “Computing partial traces and reduced density matrices”. In: *International Journal of Modern Physics C* 28.01 (gen. 2017).
- [26] Ji-Gang Ren et al. “Ground-to-satellite quantum teleportation”. In: *Nature* 549.7670 (set. 2017), pp. 70–73.

-
- [27] John Von Neumann, Robert T. Beyer e Nicholas A. Wheeler. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. New edition. Princeton: Princeton University Press, 2018. ISBN: 9780691178561-9780691178578.
- [28] *Nobel Prize in Physics 2022: Entangled Photons and Quantum Mechanics*. [http : / / www . unive . it / pag / 16584 / ?tx _ news _ pi1 % 5Bnews % 5D = 13244 & cHash = c4b69430be490a5c3a157dc92555813e](http://www.unive.it/pag/16584/?tx_news_pi1%5Bnews%5D=13244&cHash=c4b69430be490a5c3a157dc92555813e).