

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”**



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

**LA TEORIA DELLE ORBITE IN MECCANICA
NEWTONIANA E RELATIVISTICA**

Relatore:

Salvatore Capozziello

Candidato:

Davide Sasso
Matr. N85001298

Anno Accademico 2021/2022

Sommario

L'obiettivo della tesi consiste nel descrivere e confrontare la teoria Newtoniana e Relativistica della classificazione delle orbite dei corpi immersi in un campo gravitazionale prodotto da una sorgente a simmetria sferica.

Il corpo principale della tesi consta di quattro capitoli. Nella prima parte saranno brevemente illustrati, dal punto di vista storico, i principali contributi alla teoria del moto planetario, partendo dalle leggi di Keplero per poi giungere alle osservazioni di Le Verrier, fondamentali per il primo test classico della RG.

Ripercorrendo lo sviluppo storico, nel secondo capitolo ci occuperemo del cosiddetto "Problema a due corpi", ritrovando quindi le tre leggi di Keplero, e della classificazione dei moti planetari; il capitolo si chiude con la derivazione matematica della precessione anomala del perielio di Mercurio. Il terzo capitolo si apre con lo sviluppo del formalismo degli integrali primi del moto nella teoria di Einstein, necessario alla classificazione, in regime di campo forte, delle orbite consentite a particelle massive e fotoni.

Il lavoro di tesi si conclude riportando alcune delle più significative scoperte degli ultimi anni, in ambito astrofisico, a sostegno della teoria della RG o rese possibili proprio dalla stessa.

Indice

1	INTRODUZIONE	3
2	LA TEORIA DELLE ORBITE IN MECCANICA NEWTONIANA	5
2.1	Le leggi di Keplero	5
2.2	La classificazione delle orbite	9
2.2.1	Orbite circolari	12
2.2.2	Orbite ellittiche	13
2.2.3	Orbite paraboliche	13
2.2.4	Orbite iperboliche	14
2.3	L'anomalia della precessione al perielio di Mercurio	14
3	LA TEORIE DELLE ORBITE IN RELATIVITÀ GENERALE	19
3.1	Gli integrali primi del moto in Relatività Generale	19
3.2	Il moto di particelle materiali	21
3.3	Il moto di particelle a massa nulla	25
4	CONCLUSIONI E PROSPETTIVE	30

Capitolo 1

INTRODUZIONE

Nel 1859, l'astronomo e matematico francese Urbain Le Verrier notò un'anomalia nel moto di precessione di Mercurio: la stima della velocità di precessione del pianeta ($5557''/\text{secolo}$) non era compatibile con le osservazioni astronomiche da egli stesso effettuate.

I calcoli di Le Verrier erano basati sulla teoria della gravitazione universale, in grado, quindi, di descrivere il fenomeno di precessione riconducendo quest'ultimo all'azione a distanza dei pianeti più esterni.

Nel tentativo di spiegare tali incongruenze, dunque, furono avanzate diverse teorie; la prima storicamente proposta riguarda Venere[17]. Una massa del pianeta il 10% superiore rispetto a quella stimata avrebbe avuto come conseguenza un aumento della velocità di precessione di Mercurio; l'ipotesi tuttavia fu in poco tempo abbandonata dal momento che una modifica così significativa della massa di Venere avrebbe avuto notevoli ripercussioni anche sulla Terra, di fatto mai osservate. Dunque, un'ipotesi certamente più interessante prevedeva l'esistenza di un pianeta la cui orbita sarebbe stata contenuta all'interno di quella di Mercurio.

La comunità scientifica nutriva grande speranza nella rilevazione del "Pianeta fantasma", poi denominato Vulcano; infatti, solo qualche anno prima, nel 1846, Le Verrier riuscì ad individuare la posizione sulla sfera celeste di un pianeta allora sconosciuto (Nettuno) semplicemente studiando anomalie nell'orbita di Urano.

Data la vicinanza alla stella, Vulcano sarebbe dovuto essere particolarmente luminoso e dunque facilmente osservabile in corrispondenza delle eclissi solari. La mancata individuazione nel corso degli anni portò gli astronomi a cessare ogni tentativo di ricerca, ad eccezione di Le Verrier che proseguì le ricerche fino al 1877, anno della sua scomparsa.

La soluzione al problema si ebbe solo nel 1919 quando Einstein, con il contributo di Schwarzschild, annunciò che la teoria della Relatività Generale, da egli formulata nel 1915, era in grado di prevedere fenomeni di precessione anche per sistemi di due corpi[1]; il contributo relativistico calcolato da Einstein era proprio pari

ai 43"/secolo mancanti dalla trattazione classica. Questo fu considerato il primo grande successo della Relatività Generale, della quale venne riconosciuta per la prima volta dalla sua formulazione, la fondatezza dal punto di vista fisico. A quest'ultima avrebbero fatto seguito, negli anni, nuove conferme sperimentali, alcune delle quali menzionate nei capitoli successivi.

Capitolo 2

LA TEORIA DELLE ORBITE IN MECCANICA NEWTONIANA

2.1 Le leggi di Keplero

Cominciamo prima con il risolvere in tutta generalità il cosiddetto "Problema a due corpi"; supporremo che il sistema sia assimilabile ad una coppia di punti materiali, interagenti esclusivamente per via gravitazionale ed isolato.

Siano \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 rispettivamente i vettori posizione delle masse m_1 e m_2 in un dato sistema di riferimento inerziale; in assenza di forze inerziali la seconda legge della dinamica, particolarizzata per i due corpi, diventa

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.1)$$

in cui appare $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. [5]

Per lo sviluppo della trattazione è utile definire il centro di massa del sistema; è il punto geometrico collocato sul segmento che congiunge i due punti materiali e di raggio vettore

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.2)$$

È possibile studiare il moto di tale punto geometrico a partire dalla prima equazione cardinale della dinamica:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d(\sum_{i=1}^2 \mathbf{p}_i)}{dt} \quad (2.3)$$

con \mathbf{p}_i impulso della particella i -esima.

Se il sistema è isolato, e dunque la risultante delle forze esterne è nulla, dalla (2.3) segue la conservazione della quantità di moto totale del sistema.

Sia $M \equiv m_1 + m_2$ la massa totale del sistema, l'impulso totale si può esprimere a partire dalla (2.2) come

$$\mathbf{P} \equiv \sum_{i=1}^2 \mathbf{p}_i = (m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}_{\text{CM}}}{dt} \equiv M \dot{\mathbf{r}}_{\text{CM}}, \quad (2.4)$$

la cui conservazione implica che il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme. Pertanto, nel sistema di riferimento del centro di massa i vettori posizione sono tra loro proporzionali ed i corpi sono soggetti ad un campo di forze centrali ¹.

Le nuove posizioni \mathbf{r}'_i dei corpi sono legate alle precedenti dalla relazione $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{\text{CM}}$; dalla (2.2) segue

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{\mu}{m_1} \mathbf{r} \quad \mathbf{r}'_2 = \frac{\mu}{m_2} \mathbf{r}, \quad (2.5)$$

nelle quali è stata introdotta la quantità $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, detta massa ridotta. Osserviamo esplicitamente che tali posizioni dipendono solo da \mathbf{r} e sono inversamente proporzionali alla rispettiva massa.

Per derivazione rispetto al tempo si ottengono le grandezze

$$\dot{\mathbf{r}}'_i = \mp \frac{\mu}{m_i} \dot{\mathbf{r}} \quad \ddot{\mathbf{r}}'_i = \mp \frac{\mu}{m_i} \ddot{\mathbf{r}}, \quad \text{per } i = 1, 2. \quad (2.6)$$

Dall'invarianza delle accelerazioni sotto trasformazioni di Galileo e per la (2.1) e (2.6) le due equazioni del moto, ora, sono linearmente dipendenti e date da

$$\mu \ddot{\mathbf{r}}' = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.7)$$

La (2.7) può riguardarsi come l'equazione del moto di un punto materiale di massa μ e vettore posizione \mathbf{r} .

Dalla seconda equazione cardinale della dinamica

$$\mathbf{M}_{\text{CM}}^{\text{ext}} = \frac{d(\mathbf{L}_{\text{CM}})}{dt} \quad (2.8)$$

discende, invece, la conservazione del momento angolare totale \mathbf{L}_{CM} rispetto al centro di massa in quanto non vi è presenza di forze esterne; ciò restringe la regione di spazio in cui avviene il moto al piano ortogonale ad \mathbf{L}_{CM} . [5]

Fissiamo la terna inerziale di modo che il moto avvenga solo nel piano x-y; la

¹A stretto rigore si rileva che fra gli infiniti sistemi di riferimento con origine solidale al centro di massa, sono inerziali solo quelli che presentano assi non in rotazione rispetto ad una terna inerziale di riferimento.

centralità del campo di forze suggerisce di adottare un sistema di coordinate polari (r, ϕ) ; adottando come asse polare quello delle ascisse, si hanno le trasformazioni di coordinate

$$\begin{cases} x = r \cos(\phi) \\ y = r \sin(\phi) \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + n\pi \end{cases} \quad (2.9)$$

con $n \in \mathbb{N}$, $r \in [0, +\infty[$ e $\phi \in [0, 2\pi[$. [13]

Adottando le (2.9) i vettori del moto si decompongono come

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\phi}\hat{\mathbf{e}}_\phi \quad \ddot{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{e}}_r(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) + \hat{\mathbf{e}}_\phi(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \quad (2.10)$$

ed in particolare il momento angolare totale si scrive convenientemente come

$$\mathbf{L}_{CM} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{r}'_i \wedge \mathbf{p}'_i = \mu \mathbf{r} \wedge (\dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\phi}\hat{\mathbf{e}}_\phi) = \mu r^2 \dot{\phi} \hat{\mathbf{k}}, \quad (2.11)$$

dove ancora per analogia la (2.11) è formalmente uguale al momento angolare di un singolo punto materiale di massa μ che verifica l'equazione del moto (2.7)².

Dalla scrittura (2.11) del momento angolare e dalla sua conservazione segue la seconda legge di Keplero; infatti, per definizione di prodotto vettoriale l'area infinitesima $d|\mathbf{A}|$ spazzata nel intervallo di tempo dt dal raggio vettore è

$$d|\mathbf{A}| = \frac{|\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}|}{2} dt$$

con $h \equiv L_{CM}/\mu$ momento angolare su unità di massa e da cui infine

$$\frac{d|\mathbf{A}|}{dt} = \frac{h}{2}. \quad (2.12)$$

Il moto avviene con velocità areolare costante.

Proseguiamo la trattazione scrivendo l'equazione relativa alla componente radiale della (2.7), in base alla terza delle (2.10) essa è

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \frac{GM}{r^2} = \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0, \quad (2.13)$$

nella quale si vede che la massa ridotta risente del campo gravitazionale generato da una sorgente puntiforme di massa M posta nell'origine. L'integrazione della (2.13) si effettua con il cambio di variabili $r(\phi) \equiv \frac{1}{u(\phi)}$; posto $u' = \frac{du}{d\phi}$, si ricavano le relazioni differenziali

$$\dot{r} = -hu' \quad \ddot{r} = -h^2 u^2 u'', \quad (2.14)$$

²Lo stesso risultato poteva essere ottenuto risolvendo l'equazione del moto proiettata lungo il versore $\hat{\mathbf{e}}_\phi$.

che sostituite nella (2.13) conducono a

$$u'' + u = \frac{GM}{h^2}. \quad (2.15)$$

Quest'ultima è analoga all'equazione di un oscillatore armonico unidimensionale; la soluzione, riscritta in termini di $r(\phi)$, è

$$r(\phi) = \frac{1}{C \cos(\phi - \phi_0) + \frac{MG}{h^2}} \quad (2.16)$$

con C e ϕ_0 costanti di integrazione da fissare una volta assegnate le condizioni iniziali[5]. La (2.16) è evidentemente compatibile con

$$r(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\phi - \phi_0)}, \quad (2.17)$$

ossia la forma di una generica conica in coordinate polari con semi-asse maggiore a ed eccentricità e ; il confronto tra (2.16) e (2.17) porta infatti alle

$$e = \frac{Ch^2}{MG} \quad a(1 - e^2) = \frac{h^2}{MG}. \quad (2.18)$$

Dalla (2.18) emerge la possibilità di stabilire la natura dell'orbita a partire dagli integrali primi del moto; sarà infatti questo l'obiettivo della prossima sezione.

Dunque, entrambi i punti materiali si muovono lungo delle coniche, della stessa natura, con fuoco coincidente in ogni istante con il centro di massa. Nel caso in cui $e < 1$ il moto avviene proprio lungo un'ellisse ciò consentirà di ottenere, entro opportuni limiti, la prima legge di Keplero.

Per un'ellisse di semi-assi maggiore e minore a e b rispettivamente, valgono le seguenti identità[14]:

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad A = \pi ab. \quad (2.19)$$

Supponendo di studiare un sistema legato, l'integrazione della (2.12) fornisce

$$P = \frac{A}{\dot{A}} = \frac{2}{h} \pi a^2 (1 - e^2)^{1/2}, \quad (2.20)$$

avendo usato $b = a(1 - e^2)^{1/2}$ in base alla (2.19). La (2.18) permette di esprimere il termine sotto radice in funzione di a ; per sostituzione troviamo

$$P = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}. \quad (2.21)$$

Il quadrato del periodo orbitale dei due corpi è direttamente proporzionale al cubo del semi-asse maggiore della rispettiva orbita; la (2.21) rappresenta l'enunciato

della terza legge di Keplero.[5]

Studiato e risolto il "problema a due corpi", possiamo infine ritrovare fedelmente le tre leggi originariamente formulate da Keplero; ciò può essere fatto a partire dalle proprietà di centro di massa e massa ridotta.

Nel limite in cui $m_1 \gg m_2$ vale

$$M \rightarrow m_1 \quad \mu \rightarrow m_2, \quad (2.22)$$

ossia la posizione del centro di massa corrisponde a quella del punto materiale di massa m_1 che dunque si muoverà lungo un'ellisse doppiamente degenere, ovvero sarà fisso nell'origine, mentre quella della massa ridotta con il corpo di massa m_2 che si muoverà lungo un'ellisse con fuoco coincidente con m_1 .

La condizione (2.22) è verificata con ottima approssimazione nel caso di interazione Sole-Pianeta ed implica che la costante di proporzionalità tra P^2 e a^3 sia all'incirca uguale per tutti i pianeti[14]:

Pianeta	Eccentricità	T(s)	a(m)	$T^2/a^3(s^2/m^3)$
Mercurio	0.206	$0.76 \cdot 10^7$	$5.79 \cdot 10^{10}$	$2.98 \cdot 10^{-19}$
Venere	0.007	$1.94 \cdot 10^7$	$1.08 \cdot 10^{11}$	$2.99 \cdot 10^{-19}$
Terra	0.017	$3.16 \cdot 10^7$	$1.50 \cdot 10^{11}$	$2.96 \cdot 10^{-19}$
Marte	0.093	$5.94 \cdot 10^7$	$2.28 \cdot 10^{11}$	$2.98 \cdot 10^{-19}$
Giove	0.048	$3.74 \cdot 10^8$	$7.78 \cdot 10^{11}$	$2.97 \cdot 10^{-19}$
Saturno	0.056	$9.35 \cdot 10^8$	$1.43 \cdot 10^{12}$	$2.99 \cdot 10^{-19}$
Urano	0.046	$2.65 \cdot 10^9$	$2.87 \cdot 10^{12}$	$2.97 \cdot 10^{-19}$
Nettuno	0.009	$5.22 \cdot 10^9$	$4.50 \cdot 10^{12}$	$2.95 \cdot 10^{-19}$

Se in prima approssimazione trascuriamo le interazioni tra i pianeti ritroviamo, per quanto detto, le tre leggi formulate da Keplero:

1. Tutti i pianeti si muovono lungo orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei due fuochi. (1609)
2. Il moto dei pianeti avviene con velocità areolare costante. (1609)
3. Il quadrato del periodo di rivoluzione dei pianeti attorno al Sole è proporzionale al cubo del semi-asse maggiore dell'orbita. (1619)

2.2 La classificazione delle orbite

In questa sezione, facendo uso degli integrali primi dell'energia e del momento angolare, determineremo la natura delle orbite e ne studieremo le connessioni con le condizioni iniziali del problema.

Adottiamo nuovamente le coordinate polari definite nella (2.9), la velocità istantanea $\dot{\mathbf{r}}$ può essere decomposta come[12]:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\phi}\hat{\mathbf{e}}_\phi \equiv v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi. \quad (2.23)$$

Il sistema fisico è per ipotesi isolato e l'interazione gravitazionale conservativa, vale pertanto la legge di conservazione dell'energia meccanica la cui forma, per il teorema di Köning³, è

$$E = \frac{1}{2}\mu(v_r^2 + v_\phi^2) - \frac{Gm_1m_2}{r},$$

tenuto conto che nel dato riferimento il centro di massa è per definizione in quiete. Definendo $\gamma \equiv Gm_1m_2$, per la (2.23) si ha $v_\phi^2 = L^2/(\mu r)^2$ e l'energia totale è data da

$$E = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma}{r}. \quad (2.24)$$

Essa esprime la legge di conservazione dell'energia per un punto materiale che si muove di moto rettilineo e soggetto al potenziale efficace

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma}{r}; \quad (2.25)$$

il termine $\frac{L^2}{2\mu r^2}$ prende il nome di barriera centrifuga e si oppone al collasso del sistema.

Lo studio delle orbite si basa sull'osservazione che il termine cinetico della (2.24) è definito positivo, ciò implica

$$E \geq V_{eff}; \quad (2.26)$$

imponendo che $V'_{eff}(r_*) = 0$ si trova il valore $r_* = \frac{L^2}{\gamma\mu}$ della coordinata radiale in cui si ha minimo della curva, corrispondente anche al valore minimo dell'energia E_{min} . La (2.26) implica

$$E \geq E_{min} = V_{eff}(r_*) = -\frac{\mu\gamma^2}{2L^2}; \quad (2.27)$$

dunque, sono accessibili esclusivamente le regioni di piano per le quali $E_{min} \leq V_{eff}(r) \leq E$.

La Fig.2.1 mostra l'andamento del potenziale efficace in funzione di r ; si nota che le rette corrispondenti a $E = cost$ intersecano il grafico in due punti se $E_{min} <$

³Il teorema afferma che l'energia cinetica per un sistema di due punti materiali è la somma dell'energia cinetica del centro di massa e della massa ridotta: $K_{TOT} = \frac{1}{2}M\dot{r}_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$.

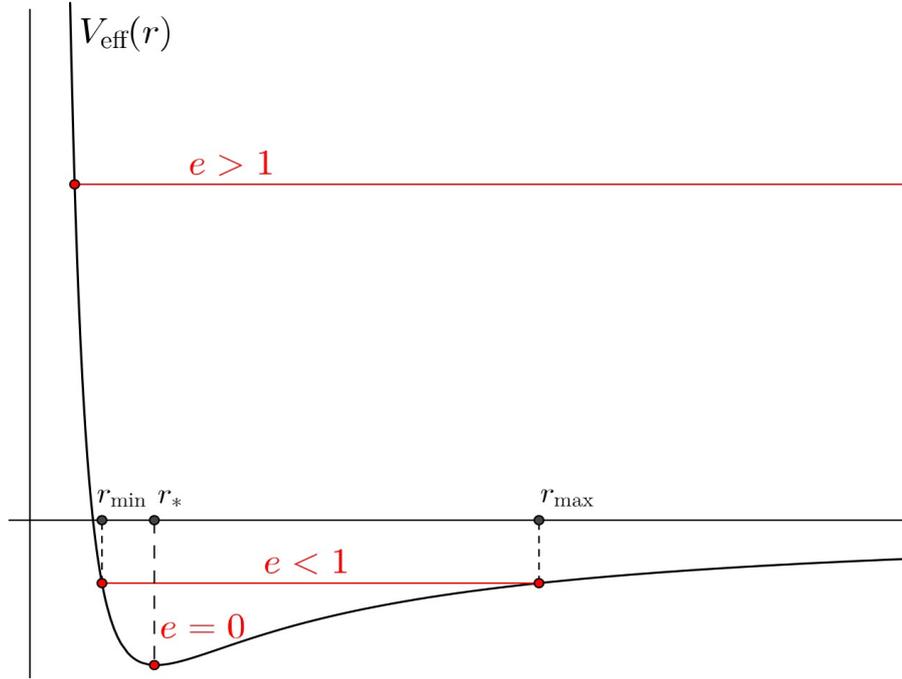


Figura 2.1: Grafico del potenziale efficace in funzione della distanza dalla sorgente di campo.

$E < 0$ e in tal caso l'orbita sarà chiusa e dotata di perielio e afelio, r_{min} e r_{max} , i cui valori si trovano imponendo $V_{eff}(r) = E$:

$$r_{min,max} = -\frac{\gamma}{2E} \mp \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu E}}. \quad (2.28)$$

In tal caso ambedue le soluzioni sono accettabili; altrimenti, se $E \geq 0$, si osserva una sola intersezione e le orbite non saranno chiuse e tantomeno limitate.[14]

Nella Sez.2.1 abbiamo visto che le traiettorie dei due corpi sono delle coniche, la cui forma si può ricavare anche a partire dalla (2.24) per mezzo delle sostituzioni (2.14):

$$u'^2 + u^2 - \frac{2\gamma\mu}{L^2}u = \frac{2\mu E}{L^2}. \quad (2.29)$$

Essa fornirà un'utile relazione che lega C ad L ed E .

È un'equazione differenziale non lineare del primo ordine che può essere integrata per ulteriore derivazione rispetto alla variabile ϕ , da cui

$$u' \left(u'' + u - \frac{\gamma\mu}{L^2} \right) = 0; \quad (2.30)$$

quindi così come l'integrale primo del momento angolare porta alla stessa soluzione dell'equazione del moto relativa alla coordinata angolare, similmente la (2.24) ci ha condotto ad un'equazione analoga alla (2.15).

La (2.30) oltre alla ovvia soluzione $u' = 0$, corrispondente a orbite circolari, è verificata in corrispondenza di tutte le soluzioni della (2.15) che riportiamo nuovamente per comodità del lettore:

$$r(\phi) = \frac{1}{\frac{\gamma\mu}{L^2} + C \cos(\phi + \alpha)}. \quad (2.31)$$

Dal valore di C per la (2.18), dipenderà la forma e il tipo di conica; tale costante è a sua volta legata ad E ed L dall'uguaglianza

$$C^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{\gamma\mu}{L^2}\right)^2, \quad (2.32)$$

trovata imponendo che la (2.31) sia soluzione dell'equazione differenziale del primo ordine (2.29).

Quindi come volevasi mostrare la (2.18) e (2.32) provano come sia possibile classificare le orbite in base ai valori iniziali di energia e momento angolare del sistema.[18]

2.2.1 Orbite circolari

Sono ovviamente caratterizzate da $r = cost$ e sono le orbite corrispondenti al minimo di energia del sistema; tale condizione si verifica per $C = 0$ per la quale la (2.31) si riduce a

$$r = r_* = \frac{L^2}{\gamma\mu}. \quad (2.33)$$

La distanza r_* , in cui il potenziale efficace presenta il minimo, è l'unica per la quale l'attrazione gravitazionale coincide esattamente con la forza centripeta agente sui due corpi.[14]

Infatti, per il corpo i -esimo, riferendo le posizioni rispetto al centro di massa, si trova $\mathbf{L}_i = m_i r_i^2 \dot{\phi} \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu}{m_i} \mathbf{L}$, da cui per avere orbite circolari:⁴

$$\frac{\gamma}{r^2} = m_i \frac{r_i^2 \dot{\phi}^2}{r_i} = \frac{L^2 \mu^2}{m_i^3 r_i^3} \iff r = \frac{L^2 \mu^2 m_i^3}{\gamma m_i^3 \mu^3} = \frac{L^2}{\gamma \mu} \equiv r_*. \quad (2.34)$$

Concludiamo osservando che r_* è fissato dalle masse del sistema e dalla sua velocità rotazionale; sono quindi concesse per ogni coppia di punti materiali infinite coppie di circonferenze, tutte centrate nel CM e percorse con velocità angolare decrescente all'aumentare del raggio. Tali conclusioni si possono estendere anche per le rimanenti orbite.

⁴Affinchè il centro di massa del sistema sia sempre compreso fra i due punti materiali, deve valere $\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2, \forall t \geq 0$.

2.2.2 Orbite ellittiche

Si realizzano nel caso in cui r non diverga, condizione verificata se $0 < |C| < \frac{\gamma\mu}{L^2}$. Scegliendo per semplicità l'asse polare di modo che $\alpha = 0$, afelio e perielio sono situati proprio su tale asse e sono rispettivamente:

$$r_{max} = r|_{\phi=\pi} = \frac{1}{\frac{\gamma\mu}{L^2} - |C|} \quad r_{min} = r|_{\phi=0} = \frac{1}{\frac{\gamma\mu}{L^2} + |C|}. \quad (2.35)$$

Se indichiamo con $2a$, la distanza tra afelio e perielio, ovvero la lunghezza dell'asse maggiore dell'ellisse, dalla (2.35) si deduce il semi-asse maggiore

$$a = \frac{\gamma\mu/L^2}{\left(\frac{\gamma\mu}{L^2}\right)^2 + C^2}; \quad (2.36)$$

usando la (2.32), l'ultima relazione è equivalente ad

$$a = -\frac{\gamma}{2E}. \quad (2.37)$$

Fissare E significa fissare a [14].

Una scrittura della conica alternativa alla (2.31) si basa sulla distanza

$$l \equiv r|_{\phi=\frac{\pi}{2}} = \frac{L^2}{\gamma\mu} \quad (2.38)$$

detta semi-lato retto; corrisponde alla distanza tra uno dei fuochi della conica e uno dei punti della stessa individuati dalla intersezione con la retta passante per il suddetto fuoco ed ortogonale all'asse di simmetria.

A tal punto, sostituendo la (2.38) nella (2.31), il vettore del moto è

$$r(\phi) = \frac{l}{1 + e \cos \phi}, \quad (2.39)$$

in cui figura l'eccentricità $e = \sqrt{\frac{a-l}{a}}$ della conica. Per l'ellisse vale $0 \leq e < 1$; l'uguale vale per l'ellisse degenera, ovvero per la circonferenza.

In conclusione, le dimensioni dell'ellisse dipendono da E ed L , contenute in a ed a . [18]

2.2.3 Orbite paraboliche

Si realizzano nel momento in cui $E = 0$ o equivalentemente $|C| = \frac{\gamma\mu}{L^2}$, corrispondente al minimo valore dell'energia che consenta orbite non chiuse, come apprezzabile dalla Fig.2.1. Solo la distanza di massimo avvicinamento $r_{min} = \frac{L^2}{2\gamma\mu}$

è ben definita mentre r_{max} non è limitato superiormente.

La condizione $E = 0$ implica $e = 1$ e l'equazione della parabola per la (2.39) si scrive:

$$r(\phi) = l(1 + \cos \phi)^{-1}. \quad (2.40)$$

Affinchè r sia continuo e positivo bisogna richiedere che $\cos \phi > -1$. Il moto quindi avviene nella regione di spazio compresa nell'intervallo angolare $(-\pi, \pi)$ dove $\lim_{\phi \rightarrow \pm\pi} r(\phi) = +\infty$. [18]

2.2.4 Orbite iperboliche

Come per le orbite paraboliche, anche in tale caso la traiettoria è una curva non chiusa e il moto è non periodico; tale moto si realizza, con riferimento alla Fig. 2.1, per $E > 0$ o equivalentemente $|C| > \frac{\gamma\mu}{L^2}$.

L'equazione dell'orbita ha sempre la forma (2.39) dove ora però $e > 1$. Richiedendo ancora $\cos \phi > -1$, ora il moto è confinato in una regione di piano sottesa ad un intervallo angolare inferiore rispetto a $(-\pi, \pi)$ e sarà individuata proprio dagli asintoti dell'iperbole. [18][12]

Indicate con ϕ_{min} e ϕ_{max} le loro direzioni, il moto avviene nella regione (ϕ_{min}, ϕ_{max}) e l'allontanamento all'infinito si avrà per

$$\lim_{\phi \rightarrow \phi_{min}^+} r(\phi) = +\infty \quad \lim_{\phi \rightarrow \phi_{max}^-} r(\phi) = +\infty. \quad (2.41)$$

2.3 L'anomalia della precessione al perielio di Mercurio

In base alla teoria della relatività generale, la presenza di massa-energia deforma lo spazio-tempo circostante dotandolo di una metrica che in generale non sarà quella di Minkowski,⁵ se non nel limite asintotico. L'equazione di campo di Einstein nel vuoto [9], $R_{\alpha\beta} = 0$,⁶ è un'equazione differenziale non lineare, omogenea del secondo ordine nei coefficienti $g_{\mu\nu}$ della metrica che una volta risolta consente infine di definire il processo di misura degli intervalli spazio-temporali attraverso l'elemento infinitesimo di distanza

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; \quad (2.42)$$

nel testo sarà sempre adottata la convenzione di Einstein per la quale indici ripetuti sono indici sommati, dove gli indici greci variano da 0 a 3 mentre quelli latini da

⁵Il tensore metrico di Minkowski è il tensore doppio diagonale $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ e definisce il prodotto scalare nello spazio-tempo piatto.

⁶A primo membro figura la generica componente del tensore Ricci.

1 a 3.

La prima soluzione dell'equazione di campo fu trovata da Schwarzschild nel 1916 imponendo una metrica a simmetria sferica[11]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - r^2 d\Omega^2. \quad (2.43)$$

Un confronto tra le due relazioni mostra

$$g_{00} = 1 - \frac{R_s}{r} \quad g_{11} = \frac{1}{1 - \frac{R_s}{r}} \quad g_{22} = -r^2 \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta.$$

Nella (2.43) la lunghezza $R_s \equiv \frac{2GM}{c^2}$ prende il nome di raggio di Schwarzschild, essa è la distanza caratteristica da M per la quale gli effetti relativistici di curvatura diventano predominanti.[11]

Il moto di caduta libera di Mercurio all'interno del campo gravitazionale prodotto dal Sole avviene lungo una geodetica della varietà spazio-temporale[19]. In quanto curva minimale, può essere desunta dalla condizione necessaria di minimo del funzionale

$$\delta \int ds = 0. \quad (2.44)$$

La (2.44) esprime la stazionarietà del funzionale d'azione con Lagrangiana $\mathcal{L} = 1$. Quest'ultima può essere espressa in funzione di $g_{\mu\nu}$ sfruttando la (2.43). Dividendo ambo i membri per ds^2 e per le proprietà di parametro affine

$$\mathcal{L} = 1 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) (\dot{x}^0)^2 - \frac{(\dot{r})^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - r^2 [\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2]; \quad (2.45)$$

per convenzione è stato posto $\frac{dx^\alpha}{ds} = \dot{x}^\alpha$.

Dalle equazioni di Lagrange⁷ relative alle coordinate lagrangiane x^α del sistema si desumono gli stessi integrali primi del moto già analizzati nella prima sezione, nonchè l'equazione stessa del moto.

- Per $x^2 = \theta$:

$$\frac{d}{ds}(r^2 \dot{\theta}) = (r^2 \sin \theta \cos \theta) \dot{\phi}^2, \quad (2.46)$$

che ammette come soluzione $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dunque, come nel caso classico, il moto è piano e la coordinata $x^2 = \theta$ è ciclica, consentendo di riscrivere \mathcal{L} nella forma

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) (\dot{x}^0)^2 - \frac{(\dot{r})^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - r^2 \dot{\phi}^2. \quad (2.47)$$

⁷Per un sistema a n gradi di libertà nelle coordinate lagrangiane x^α , la i -esima equazione di lagrange ha la forma: $\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0$.

- Per $x^0 = ct$:

$$\frac{d}{ds} \left[\left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \dot{x}^0 \right] = 0, \quad (2.48)$$

la cui soluzione

$$\left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \dot{x}^0 = cost \equiv \tilde{h} \quad (2.49)$$

corrisponde ad una generalizzazione della legge di conservazione dell'energia, come discusso nel prossimo capitolo.

- Per $x^3 = \phi$:

$$\frac{d}{ds} (r^2 \dot{\phi}) = 0 \quad (2.50)$$

e legata, nel limite classico,⁸ alla conservazione del momento angolare

$$r^2 \dot{\phi} = cost \equiv \tilde{l}. \quad (2.51)$$

In sostituzione dell'equazione di Eulero-Lagrange associata a $x^1 = r$ possiamo utilizzare un integrale primo del moto indipendente dalle (2.48) e (2.50); la scelta più ovvia ricade sulla Lagrangiana stessa del sistema che, riscritta in termini delle costanti del moto, diviene

$$\tilde{h}^2 - \dot{r}^2 - \frac{\tilde{l}^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) = 1 - \frac{R_s}{r}. \quad (2.52)$$

A questo punto si effettua il cambio di variabili $r(\phi) = 1/u(\phi)$, già utilizzato per l'analogo problema classico, da cui seguono le relazioni differenziali:

$$\dot{r} = -\tilde{l}u' \quad \ddot{r} = -\tilde{l}^2 u^2 u''. \quad (2.53)$$

La sostituzione delle (2.53) nella (2.52) da come risultato

$$\tilde{h}^2 - \tilde{l}^2 (u')^2 - \tilde{l}^2 u^2 (1 - R_s u) = 1 - R_s u. \quad (2.54)$$

Derivando, infine, ambo i membri rispetto a ϕ si perviene all'equazione del moto, nella variabile u ,

$$u' \left[u'' + u - \frac{R_s}{2\tilde{l}^2} - \frac{3R_s u^2}{2} \right] = 0; \quad (2.55)$$

l'ovvia soluzione $u' = 0$, ovvero $r(\phi) = r_*$, non sarà presa in considerazione poichè interessati al fenomeno di precessione.[19][22]

L'equazione (2.55) si riduce quindi all'equazione di un oscillatore armonico con

⁸In meccanica Newtoniana, il tempo, eccetto per ridefinizioni, non è soggetto a trasformazioni di coordinate, dunque, le traiettorie nello spazio si paramentrizzano con l'invariante $ds = cdt$.

anarmonicità del secondo ordine; ciò la differenza sostanzialmente dalla (2.15) in quanto non ne consente l'esatta integrazione.

Cerchiamo, quindi, di comprendere la natura di questo termine aggiuntivo eseguendo un "test" di compatibilità della teoria con il formalismo Newtoniano nel limite di campo debole ($R_s \ll r$) e di basse velocità ($v \ll c$). Dunque, in tali limiti, $\frac{3R_s u^2}{2}$ sarà trascurabile rispetto al termine costante della (2.55) che vogliamo ora ricondurre a quello della (2.15).

Nello spazio-tempo Newtoniano possiamo porre $ds = cdt$, quindi

$$l \cong r^2 \dot{\phi} = \frac{h}{c},$$

consentendo infine di osservare la similitudine tra i due addendi:

$$\frac{R_s}{2\tilde{l}^2} \cong \left(\frac{2GM}{c^2} \right) \left(\frac{c^2}{2h^2} \right) = \frac{GM}{h^2}, \quad (2.56)$$

avendo notato che l'ipotesi di sorgente a riposo implica $M + m \cong M$.

Pertanto, gli effetti relativistici sul moto, tra cui anche la precessione anomala, sono imputabili al termine $\frac{3R_s u^2}{2}$.

Una soluzione approssimata si può trovare trattando perturbativamente il termine anarmonico, il rapporto tra il termine relativistico con quello classico della (2.55)

$$\frac{\frac{3}{2}R_s u^2}{\frac{R_s}{2\tilde{l}^2}} = 3\tilde{l}^2 u^2 \cong \frac{3h^2}{r^2 c^2} \sim \left(\frac{v}{c} \right)^2 \quad (2.57)$$

mostra che il primo è trascurabile rispetto al secondo per basse velocità. Ciò è dovuto al fatto che Mercurio si muove in uno spazio-tempo pressochè piatto, essendo $R_s \sim 3km$ per il Sole.

La soluzione finale sarà somma della soluzione Newtoniana u_N già calcolata e della soluzione particolare $u_p(\phi)$ dell'equazione differenziale contenente il solo termine anarmonico valutato per $u \cong u_N$. Così la (2.55) si riduce a [9]

$$u'' + u = \frac{3G^3 M^3}{c^6 \tilde{l}^4} (1 + 2e \cos \phi), \quad (2.58)$$

dove sono stati trascurati i termini in e^2 dal momento che per Mercurio $e = 0,206 \ll 1$.

L'equazione differenziale è del tipo [22]

$$u'' + u = A \cos \phi + B = \frac{6G^3 M^3}{c^6 \tilde{l}^4} e \cos \phi + \frac{3G^3 M^3}{c^6 \tilde{l}^4},$$

di cui si può facilmente verificare per sostituzione che

$$u_p(\phi) = \frac{1}{2} A \phi \sin \phi + B = \frac{3G^3 M^3 e}{c^6 \tilde{l}^4} \phi \sin \phi + \frac{3G^3 M^3}{c^6 \tilde{l}^4} \quad (2.59)$$

costituisce l'integrale particolare.

La soluzione finale sarà quindi

$$u(\phi) = u_N(\phi) + u_p(\phi) = \frac{GM}{c^2 \tilde{l}^2} \left(1 + e \cos \phi + \frac{3G^2 M^2 e}{c^4 \tilde{l}^2} \phi \sin \phi \right), \quad (2.60)$$

tenuto conto che $B \ll l^{-1}$; sviluppando in serie di Taylor per $\frac{3G^2 M^2}{c^4 \tilde{l}^2} \ll 1$ si giunge a

$$u(\phi) = \frac{GM}{c^2 \tilde{l}^2} \left[1 + e \cos \left(\phi \left(1 - \frac{3G^2 M^2}{c^4 \tilde{l}^2} \right) \right) \right]. \quad (2.61)$$

Per calcolare il contributo relativistico alla precessione del perielio è sufficiente imporre l'argomento del coseno è pari a $2k\pi$:

$$\phi_k = \frac{2k\pi}{1 - 3G^2 M^2 / c^4 \tilde{l}^2} \approx 2k\pi \left(1 + \frac{3G^2 M^2}{c^4 \tilde{l}^2} \right) \neq 2\pi. \quad (2.62)$$

Dunque, il contributo alla precessione vale

$$\Delta\phi \equiv \phi_{k+1} - \phi_k - 2\pi = \frac{6\pi G^2 M^2}{c^4 \tilde{l}^2} = \frac{3\pi R_s}{r_*} = 0,1'' \quad (2.63)$$

in cui compare esplicitamente il raggio di Schwarzschild del Sole e il reciproco del semiasse maggiore dell'orbita[22].

Dal momento che l'anno di Mercurio è 0,24 volte quello terrestre, si trova che il contributo relativistico alla precessione \mathcal{P} al secolo è:

$$\mathcal{P} \equiv \Delta\phi \frac{100}{0,24} = 43''. \quad (2.64)$$

La (2.63) è applicabile anche agli altri pianeti interni e mostra un minor contributo relativistico alla precessione per orbite di dimensioni maggiori[4]:

Pianeta	Precessione
Mercurio	43''/sec
Venere	8.6''/sec
Terra	3.8''/sec
Marte	1.35''/sec

i dati mostrano l'andamento $1/r_*$ come previsto dalla teoria.

Capitolo 3

LA TEORIE DELLE ORBITE IN RELATIVITÀ GENERALE

3.1 Gli integrali primi del moto in Relatività Generale

In questo capitolo ci occuperemo dello studio e della classificazione del moto di caduta libera in condizione di campo forte. A tal fine è necessario sviluppare un formalismo che estenda al caso relativistico le usuali leggi di conservazione, la cui individuazione, è fondamentale per lo studio delle orbite.

Dimostreremo, come applicazione del più generale teorema di Noether, che nell'ipotesi in cui i coefficienti della metrica $g_{\mu\nu}$ non dipendano da una generica coordinata x^λ , la corrispondente componente del quadrivettore velocità u^λ è una costante del moto.

L'asserto si ottiene ricavando la Lagrangiana del sistema in quanto essa stessa è invariante sotto trasformazioni del gruppo di simmetria[3]. Per un grave può essere dedotta attraverso il principio variazionale di Mapertuis le cui corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono le equazioni delle geodetiche lungo cui avviene il moto:

$$\delta \int_A^B (g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta)^{\frac{1}{2}} ds = 0, \quad (3.1)$$

dove si è tenuto conto che ds è un parametro affine e per definizione di metrica $ds^2 = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$.

Dal calcolo variazionale si perviene all'equazione:

$$\int_A^B \left[\left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\lambda} - g_{\lambda\beta,\alpha} \right) u^\alpha u^\beta - g_{\lambda\beta} \frac{d^2 x^\beta}{ds^2} \right] \delta x^\lambda ds = 0 \quad (3.2)$$

che risulta verificata per ogni variazione δx^λ se

$$g_{\lambda\beta} \frac{du^\beta}{ds} = \left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\lambda} - g_{\lambda\beta,\alpha} \right) u^\alpha u^\beta. \quad (3.3)$$

Nell'ipotesi del teorema, secondo cui $g_{\alpha\beta,\lambda} = 0$, dalla condizione (3.3) si può concludere che $\frac{d}{ds}(g_{\lambda\beta} u^\beta) = 0$, dunque

$$\frac{d}{ds} (g_{\lambda\beta} u^\lambda u^\beta) = \frac{d}{ds} (1) = 0 = 0 + g_{\lambda\beta} u^\beta \frac{du^\lambda}{ds}$$

da cui infine l'asserto

$$u^\lambda = \text{cost}. \quad (3.4)$$

Concludiamo la sezione con il seguente risultato (corollario del teorema precedentemente dimostrato): la legge di conservazione, generalizzata, dell'energia discende dalla ciclicità della coordinata temporale, ovvero nell'ipotesi in cui $g_{\mu\nu,0} = 0$. [19]

Si consideri il caso generale in cui sia $g_{0k} \neq 0$ ¹, osservando che per definizione di tensore metrico

$$u_0 \equiv g_{0\alpha} u^\alpha = g_{00} u^0 + g_{0k} u^k,$$

la (3.4) consente la seguente riscrittura:

$$u_0 = g_{00} (dx^0 + g_{0k} dx^k / g_{00}) / ds = \text{cost}. \quad (3.5)$$

Riscriviamo ds^2 esplicitando i termini di boost g_{0k} , ricordando che i coefficienti della metrica costituiscono le componenti di un tensore doppio simmetrico:

$$ds^2 = g_{00} (dx^0 + g_{0k} dx^k / g_{00})^2 - \gamma_{ik} dx^i dx^k, \quad (3.6)$$

dove figura esplicitamente la distanza propria $dl^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k$.² Se nella metrica $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ il tempo proprio è definito come $d\tau \equiv \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0$, allora dalla (3.6) per confronto possiamo scrivere

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} (dx^0 + g_{0k} dx^k / g_{00});$$

dopo alcuni passaggi algebrici si giunge alla relazione

$$ds^2 = g_{00} (dx^0 + g_{0k} dx^k / g_{00})^2 \left(1 - \frac{dl^2}{c^2 d\tau^2} \right) = g_{00} (dx^0 + g_{0k} dx^k / g_{00})^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \quad (3.7)$$

effettuate le dovute sostituzioni.

Dunque,

¹In presenza dei cosiddetti "boost temporali", osservatori a riposo ed immersi in un campo gravitazionale non effettueranno uguali misure di tempo e spazio; è tuttavia possibile raccordare le misure di tempo degli osservatori se $\oint \frac{g_{0k}}{g_{00}} dx^k = 0$.

²La distanza propria è un invariante ed è esprimibile come $\gamma_{ik} = g_{0i} g_{0k} / g_{00} - g_{ik}$.

$$ds = \sqrt{g_{00}}(dx^0 + g_{0k}dx^k/g_{00})\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

la cui sostituzione nella (3.5) porta a

$$\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = cost. \quad (3.8)$$

La (3.8) è compatibile con l'equazione di conservazione dell'energia relativistica, estendendola al formalismo appena introdotto; in assenza di campi gravitazionali e per basse velocità, cioè nel limite post-Minkowskiano, $\sqrt{g_{00}} = 1$ e la (3.8) si riduce a

$$E = \gamma mc^2 = cost$$

e nel limite post-Newtoniano, dunque in presenza di campo debole e per energia a riposo trascurabile, invece

$$\frac{1}{2}v^2 - U = cost$$

in quanto vale l'approssimazione $g_{00} \simeq 1 - 2U/c^2$.

In conclusione possiamo considerare la (3.8) come la generalizzazione delle usuali leggi di conservazione dell'energia; essa quindi costituirà il punto di partenza per lo studio delle orbite in campo di Schwarzschild nel capitolo successivo.

3.2 Il moto di particelle materiali

Trattando nuovamente una sorgente a simmetria sferica, per caratterizzare le regioni di piano accessibili cominciamo con il considerare la metrica

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - r^2 d\Omega^2; \quad (3.9)$$

l'assenza dei termini spuri del tipo g_{0k} consente di usare la distanza propria $dl^2 = \gamma_{ik}dx^i dx^k$ per esprimere ds^2 :

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - \gamma_{ik}dx^i dx^k. \quad (3.10)$$

Poichè dl e $d\tau$ sono le misure di lunghezze e intervalli di tempo effettuate nello spazio di Minkowski tangente alla varietà, allora sarà $v = dl/d\tau$ e la (3.10) diventa

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 (1 - \beta^2) \quad (3.11)$$

con $\beta \equiv v/c$ fattore relativistico.[19]

Utilizzando i risultati della Sez.3.1, imponiamo nuovamente che il moto avvenga nel piano $\theta = \pi/2$; in tal caso $\mathbf{v} = (v_r, v_\phi)$ e

$$1 - \beta^2 = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dl}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2, \quad (3.12)$$

in quanto dl è lo spostamento proprio lungo la direzione radiale.

La sostituzione dell'integrale primo dell'energia (3.8) nella (3.12) da luogo a

$$\left(\frac{mc^2}{E} \right)^2 \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) = 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dl}{d\tau} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right], \quad (3.13)$$

la quale può esprimersi in funzione del momento angolare; infatti da

$$r^2 \dot{\phi} = r^2 \frac{d\phi}{ds} = r^2 \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\phi}{d\tau} = cost \Rightarrow r^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\phi}{d\tau} \equiv a = cost \quad (3.14)$$

e infine

$$a = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \left(\frac{E}{mc^2} \right) \left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^{-1/2}. \quad (3.15)$$

La (3.13) diventa

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{dl}{d\tau} \right)^2 = 1 - \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2 \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \left(1 + \frac{a^2}{c^2 r^2} \right); \quad (3.16)$$

inoltre, tenuto conto che il primo membro della (3.16) è definito positivo, la precedente uguaglianza implica

$$\left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \geq \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \left(1 + \frac{a^2}{c^2 r^2} \right) \equiv \mathcal{E}(r). \quad (3.17)$$

In analogia alla (2.26), essa corrisponde ad un vincolo per le regioni di piano accessibili e in più permetterà la classificazione delle orbite.

Non è secondario osservare che la (3.17) si riduce alla

$$\frac{E}{mc^2} \geq 1 - \frac{GM}{c^2 r} + \frac{a^2}{2c^2 r^2} \quad (3.18)$$

nel limite di campo debole e velocità molto inferiori rispetto a quella della luce, ovvero diviene formalmente analoga alla (2.24) a meno del termine di energia a riposo che costituisce un offset della trattazione relativistica; inoltre, si sottolinea che per non avere coefficienti della metrica singolari deve essere $r > R_s$.

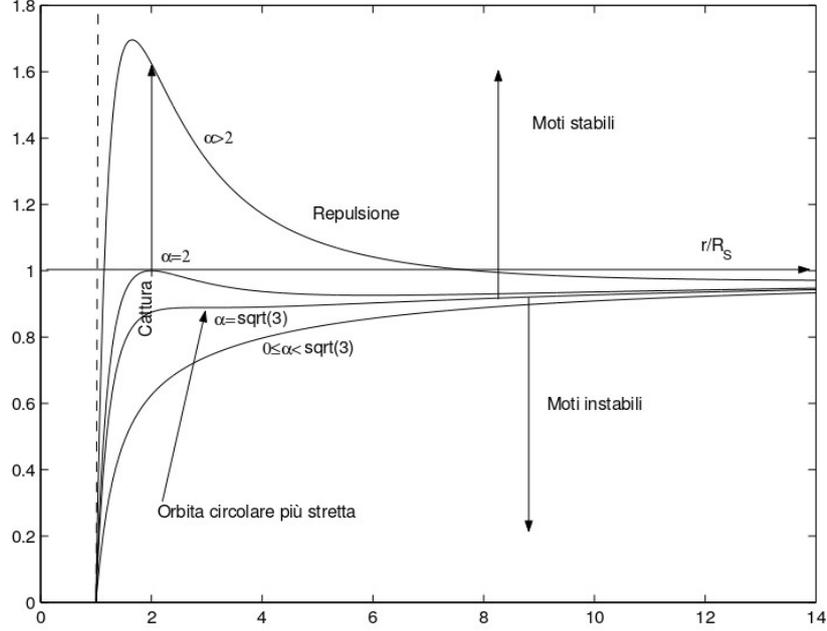


Figura 3.1: Rappresentazione delle orbite consentite ad una massa di prova immersa in un campo di Schwarzschild.[19]

Il comportamento dei potenziali efficaci della (2.24) e (3.17) è notevolmente diverso a causa del termine $-r^{-3}$ che domina per piccole distanze e che ora porterà la funzione a divergere negativamente, come riportato in Fig.3.1.

Lo studio degli estremi relativi di $\mathcal{E}(r)$, con il vincolo $r \neq 0$, porta alla condizione necessaria

$$\mathcal{E}'(r) = 0 \iff c^2 R_s r^2 - 2a^2 r + 3a^2 R_s = 0. \quad (3.19)$$

Le unità naturali del problema permettono di definire il momento angolare adimensionalizzato $\alpha \equiv \frac{a}{cR_s}$ attraverso il quale è immediato discutere la natura delle soluzioni della (3.19)

$$r = \alpha^2 R_s (1 \pm \sqrt{1 - 3/\alpha^2}). \quad (3.20)$$

Ancora una volta la forma del potenziale, e dunque l'eventuale presenza di massimi o minimi, dipende dal momento angolare a ; si distinguono infatti i seguenti possibili casi[22]:

1. Se $\alpha < \sqrt{3}$ non vi sono soluzioni reali ed $\mathcal{E}'(r) > 0$; la funzione è strettamente crescente da $r \rightarrow R_s^+$, in cui diverge negativamente, fino a $r \rightarrow +\infty$

dove tende a 1. In tale circostanza non vi è nessuna barriera di potenziale in grado di respingere la particella dal collasso nella singolarità³.

2. Per $\alpha = \sqrt{3}$, $\mathcal{E}(r)$ continua ad essere strettamente crescente nell'intervallo di definizione $[R_s, +\infty]$, tuttavia ora la (3.20) ammette due soluzioni coincidenti per $r = 3R_s$ in cui la derivata si annulla e la funzione presenta un punto di flesso in cui $E = mc^2\sqrt{\frac{8}{9}}$.

3. Per $\alpha > \sqrt{3}$, infine, si hanno due soluzioni reali distinte

$$r_{max} = \alpha^2 R_s (1 - \sqrt{1 - 3/\alpha^2}) \quad r_{min} = \alpha^2 R_s (1 + \sqrt{1 - 3/\alpha^2})$$

corrispondenti al punto di massimo e minimo relativo del potenziale.

Studiando la derivata di questi punti di equilibrio, rispettivamente instabile e stabile, si evince che r_{min} è strettamente crescente ed assume per $\alpha = \sqrt{3}$ il suo valore minimo pari a $3R_s$ mentre diverge a $+\infty$. La funzione r_{max} è invece strettamente decrescente e varia da $3R_s$ a $\frac{3}{2}R_s$.

Classifichiamo dunque le orbite consentite facendo riferimento alla Fig.3.1.[19] Le orbite stabili sono quelle che si svolgono attorno a r_{min} e dunque esistono solo per $\alpha \geq \sqrt{3}$; per $r = r_{min}$ la geodetica sarà una circonferenza o altrimenti un'ellisse soggetta, come già visto, al fenomeno di precessione e dunque non chiusa. L'orbita legata più stretta è attorno al minimo di r_{min} , per $\alpha = \sqrt{3}$ e corrisponde precisamente alla circonferenza di raggio $r = 3R_s$ che viene percorsa con velocità angolare

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{c}{6R_s} \quad (3.21)$$

e periodo orbitale proprio e per un osservatore all'infinito

$$T_{prop} = \frac{2\pi}{d\phi/d\tau} = \frac{12\pi R_s}{c} \quad T_\infty = \sqrt{\frac{3}{2}} T_{prop}. \quad (3.22)$$

Tutte le particelle che dall'infinito si muovono radialmente verso la singolarità precipitano al suo interno purchè sia $E \geq E(r_{max})$, in caso contrario avviene la repulsione a causa della barriera di potenziale come già visto nel caso classico.

La possibile cattura di una particella può essere discussa anche al variare di α fissando un valore per E ; un caso notevole è quello di particella con energia pari a quella a riposo. Con riferimento alla Fig.3.1, la repulsione può avvenire solo per $\alpha > 2$; da ciò si può pensare di definire una sezione d'urto σ_{catt} relativa al processo

³Nella realtà non è possibile osservare la particella oltrepassare l'orizzonte degli eventi poichè essa lo raggiunge in un tempo infinito per un osservatore non inerziale.

di cattura di una particella a riposo da parte di una singolarità. Nell'ipotesi $E \simeq mc^2$, cioè $v_\infty \ll c$, si ha cattura se

$$a = bv_\infty < 2R_s c \quad (3.23)$$

essendo b il parametro di impatto⁴.

In forza della simmetria azimutale, per definizione, si trova infine

$$\sigma_{catt} = \pi b^2 = 4\pi R_s^2 \left(\frac{c}{v_\infty} \right)^2. \quad (3.24)$$

3.3 Il moto di particelle a massa nulla

Uno dei più grandi successi della Relatività Generale consiste nella capacità di descrivere la traiettoria seguita da un raggio luminoso all'interno di un campo gravitazionale, la quale in generale non sarà rettilinea.

Il primo risultato a sostegno di ciò si ebbe nel 1919 quando Sir Arthur Eddington, astrofisico inglese, osservò, in presenza di un'eclissi, l'apparente spostamento di una stella. Nonostante diverse controversie legate alla scarsa qualità delle immagini fotografiche, il fenomeno fu interpretato come l'effetto di curvatura dei raggi luminosi ad opera del campo gravitazionale prodotto dal Sole.[4]

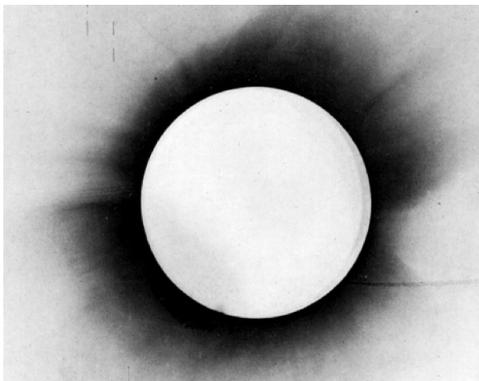


Figura 3.2: Immagine in negativo dell'eclissi del 1919.[8]

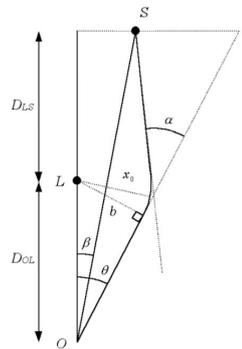


Figura 3.3: Deflessione di un raggio luminoso osservato da O e prodotto in S a causa della lente gravitazionale L.[21]

Nella seguente sezione analizzeremo le geodetiche ammesse per il fotone trascurando le proprietà ondulatorie di propagazione, studiando quindi il moto della

⁴Esso è per definizione la distanza tra la sorgente di campo e la retta individuata dalla direzione di \mathbf{v}_∞ .

singola particella.

In completa analogia a quanto trovato nella Sez.3.2, il problema di caduta libera per i fotoni in una singolarità di Schwarzschild ammette come integrale primo

$$\theta = \frac{\pi}{2}; \quad (3.25)$$

pertanto, ancora una volta, il moto è piano.[22]

Per ritrovare, nel caso puramente relativistico, le leggi di conservazione riconducibili a quelle di energia e momento angolare, è sufficiente ricordare che per il singolo fotone l'energia è quantizzata e vale

$$E = h\nu \quad (3.26)$$

nello spazio-tempo di Minkowski⁵.

Dalla discussione fatta nella Sez.3.1, sappiamo che, per la (3.8),

$$E = \frac{mc^2 \sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.27)$$

e riscrivendo la (3.15)

$$a = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv rv_\phi \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{1}{mc^2}. \quad (3.28)$$

A questo punto osserviamo che l'energia espressa nella (3.27) si riduce nel limite asintotico ($r \rightarrow +\infty$) alla celeberrima equazione

$$E = m_r c^2, \quad (3.29)$$

con $m_r = m/\sqrt{1 - \beta^2}$ massa relativistica della particella.

Dal confronto tra (3.26) e (3.29) possiamo ritrovare i nuovi integrali primi con la sostituzione

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \rightarrow h\nu; \quad (3.30)$$

le (3.27) e (3.28) diventano, nell'ordine,

$$\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{1/2} h\nu \equiv E \quad h\nu rv_\phi = mc^2 a \equiv N. \quad (3.31)$$

⁵Un fotone che si allontana da una massa M perde energia a causa del Redshift gravitazionale; dunque, $E = h\nu$ è valida solo per curvature trascurabili dello spazio-tempo.

Nella (3.31) si è tenuto conto che nella metrica adottata $g_{00} = 1 - R_s/r$. [19]

Il rapporto tra le ultime due equazioni scritte conduce a

$$rv_\phi = \frac{N}{E} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{1/2} \equiv lc \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{1/2}, \quad (3.32)$$

dove con l si è indicato il parametro di impatto all'infinito.

Ricordando che particelle prive di massa sono vincolate a muoversi alla velocità della luce, in sistemi di riferimento inerziali, ovvero $v_r^2 + v_\phi^2 = c^2$, dalla (3.32) si ha

$$v_r^2 = c^2 \left[1 - \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\right] \geq 0 \quad (3.33)$$

che porta infine alla disuguaglianza

$$l^2 \leq \frac{r^2}{1 - R_s/r}. \quad (3.34)$$

Così come le (2.26) e (3.17), la (3.34) impone un vincolo sulle regioni nelle quali è consentito il moto.

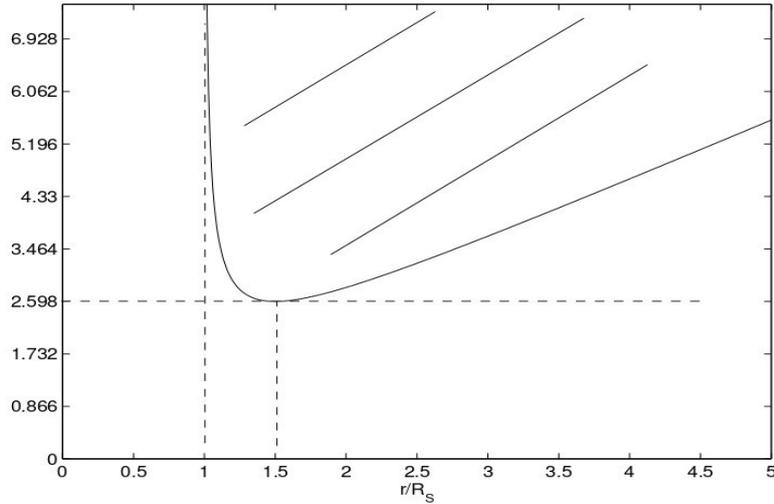


Figura 3.4: Rappresentazione delle regioni accessibili al fotone immerso in un campo gravitazionale. [19]

Solo la regione al di sotto del grafico in Fig.3.4 è accessibile; lo studio degli estremi relativi evidenzia un minimo assoluto per $r = \frac{3}{2}R_s$ in cui la funzione assume valore pari a $\frac{3\sqrt{3}}{2}R_s$.

Un fotone proveniente da $r = +\infty$ sarà catturato o meno dalla singolarità a seconda che l sia maggiore o minore del minimo del potenziale.

Si consideri adesso un fotone emesso a distanza r dalla sorgente di campo; la Fig.3.4 mostra che se la particella viene prodotta a distanza $r < \frac{3}{2}R_s$ essa può allontanarsi indefinitamente solo per $l < \frac{3\sqrt{3}}{2}R_s$. Se $r > \frac{3}{2}R_s$ e $v_r > 0$ non può mai avvenire la cattura; altrimenti per $v_r < 0$ affinché rimbalzi sulla barriera di potenziale deve essere $l \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}R_s$.

Determiniamo ora per quali direzioni iniziali di emissione la particella, inizialmente in $r < \frac{3}{2}R_s$, sarà in grado di sfuggire alla cattura[22]; per riscrivere la (3.34) in funzione di v_r e v_ϕ è sufficiente richiamare la (3.33) e ricordare che il modulo quadro della velocità è pari a c^2 :

$$\left(\frac{v_r}{v_\phi}\right)^2 = \frac{1 - \frac{l^2}{r^2}\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{\frac{l^2}{r^2}\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}, \quad (3.35)$$

che risolta per l^2 fornisce

$$l^2 = \frac{r^2}{(1 - R_s/r)(1 + v_r^2/v_\phi^2)} \leq \frac{27}{4}R_s^2. \quad (3.36)$$

Dalla (3.36) si giunge infine alla condizione di non cattura in funzione della velocità iniziale, ovvero

$$\left(\frac{v_r}{v_\phi}\right)^2 \geq \frac{\frac{4}{27}\left(\frac{r}{R_s}\right)^2 - 1 + \frac{R_s}{r}}{1 - \frac{R_s}{r}}. \quad (3.37)$$

Definito θ l'angolo compreso tra la direzione radiale e \mathbf{v} , vale evidentemente $\tan(\theta) = v_\phi/v_r$ e la precedente condizione risulta così a sua volta equivalente a

$$\theta \leq \theta_{max} = \arctan \left(\frac{1 - \frac{R_s}{r}}{\frac{4}{27}\left(\frac{r}{R_s}\right)^2 - 1 + \frac{R_s}{r}} \right)^{1/2}. \quad (3.38)$$

In base alla (3.38) la particella può sfuggire alla singolarità a patto che inizialmente la direzione di moto sia sufficientemente prossima alla direzione radiale e in particolare entro un angolo pari proprio a θ_{max} . [19]

Osserviamo come un fotone emesso sull'orizzonte degli eventi può allontanarsi all'infinito solo se si muove di moto radiale dal momento che $\theta_{max}(r = R_s) = 0$, mentre uno emesso a distanza $r = \frac{3}{2}R_s$ sfugge alla cattura solo se si muove lungo la circonferenza locale, che è anche l'ultima orbita consentita, in quanto $\theta_{max}(r = \frac{3}{2}R_s) = \frac{\pi}{2}$.

Se invece inizialmente $r \geq \frac{3}{2}R_s$ la particella può sempre allontanarsi indefinitamente se $v_r \geq 0$, altrimenti si dovrà richiedere, con riferimento alla Fig3.4,

$$l \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} R_s.$$

Da calcoli analoghi si trova

$$\left(\frac{v_r}{v_\phi} \right)^2 \leq \frac{\frac{4}{27} \left(\frac{r}{R_s} \right)^2 - 1 + \frac{R_s}{r}}{1 - \frac{R_s}{r}}; \quad (3.39)$$

dalla sostituzione già vista, quest'ultima corrisponde ad un limite inferiore per l'angolo formato dalla direzione iniziale di moto e la direzione radiale

$$\theta \geq \theta_{min} = \arctan \left(\frac{1 - \frac{R_s}{r}}{\frac{4}{27} \left(\frac{r}{R_s} \right)^2 - 1 + \frac{R_s}{r}} \right)^{1/2}. \quad (3.40)$$

In conclusione, attraverso il formalismo sviluppato nel contesto della RG, si sono discusse le caratteristiche dinamiche di particelle prive di massa nelle varie regioni di moto consentite in piena simmetria con le trattazioni delle Sez.2.2-3.1.

Capitolo 4

CONCLUSIONI E PROSPETTIVE

Gli argomenti presentati all'interno del testo, in particolare quelli affrontati nel Cap.3, non si riducono ad una pura trattazione teorica. Negli ultimi dieci anni, infatti, la teoria delle orbite relativistiche è stata di fondamentale importanza nell'interpretazione dei risultati ottenuti in diversi dei più significativi esperimenti in ambito astrofisico. Coerentemente con l'impostazione del lavoro di tesi, saranno presentati e brevemente discussi in ordine cronologico i principali risultati ottenuti in tale settore partendo dalla prima rivelazione delle onde gravitazionali per giungere alla prima immagine di Sagittarius*A.

Il 14 settembre del 2015 la collaborazione LIGO/Virgo è stata in grado di misurare la prima G-W, prodotta dalla fusione di due buchi neri di masse $m_1 = 29M_\odot$ e $m_2 = 36M_\odot$, ipotizzate da Einstein nel 1915, con l'ausilio dell'osservatorio interferometrico laser per le onde gravitazionali (LIGO).[20]

Esso si compone di due impianti gemelli, entrambi situati negli Stati Uniti, a Livingston e Hanford.

La scelta di costruire due apparati autonomi è legata all'incredibile sensibilità degli interferometri; infatti, anche delle impercettibili scosse di terremoto costituiscono un rumore di fondo per le misure. La bassa probabilità che la stessa possa essere misurata di pari intensità da ambedue le stazioni; ciò permette di scartare dati fallaci.[7]

La scoperta oltre a costituire un'ulteriore conferma sperimentale della RG, apre nuove possibilità di studio dell'universo, andando ad arricchire il campo dell'astrofisica multi-messaggera. È infatti possibile che una determinata sorgente non si possa osservare elettromagneticamente a causa di eventi di interazione, scattering o assorbimento, di tali onde con il mezzo interstellare; tale problema contrariamente non sussisterebbe per le onde gravitazionali eventualmente emesse poiché poco interagenti con la materia ed in grado di propagarsi pressoché inalterate dall'universo primordiale. Nuove informazioni, inoltre, circa il moto di corpi celesti o la loro evoluzione possono essere desunte proprio dalla misura delle onde

gravitazionali emesse; dato il piccolo valore della costante di accoppiamento G , queste sono tuttavia apprezzabili solo in eventi caratterizzati da un grande rilascio di energia come Supernovae e sistemi binari compatti. Questi si realizzano comunemente negli ammassi globulari e nei centri galattici; ne è un esempio il buco nero supermassiccio al centro della Via Lattea, Sagittarius*A, ed il sistema di stelle orbitanti attorno ad esso. In tal caso le onde gravitazionali prodotte potrebbero fornire informazioni importanti sulla natura dell'orbita stellare, da cui dipende la luminosità dell'onda, sulla massa della sorgente di campo e sulla deviazione dal moto geodetico dovuta alla perdita di energia per emissione di G-W.[18]

Ciò non esaurisce le possibili applicazioni della teoria sviluppata nella comprensione di Sgr*A. Inizialmente Sagittarius*A era il nome assegnato ad una intensa sorgente di onde radio situata nel centro galattico; solo nel 2020, osservando il moto delle stelle S2, S1 ed S8 in tale regione dello spazio, si è compreso che l'emettitore radio altro non è che un buco nero super-massiccio. Le stelle presentano orbite molto eccentriche, $0.4 < e < 0.95$, e sono soggette a forte precessione; tali stime si basano sulle misure del moto radiale e/o proprio. Attraverso l'elaborazione dei dati raccolti si è infine ricavata la massa della sorgente, ossia $m = (5 \pm 3) \cdot 10^6 M_{\odot}$, compatibile con la presenza di un buco nero di raggio $r = 44 \cdot 10^6 Km$. [2]

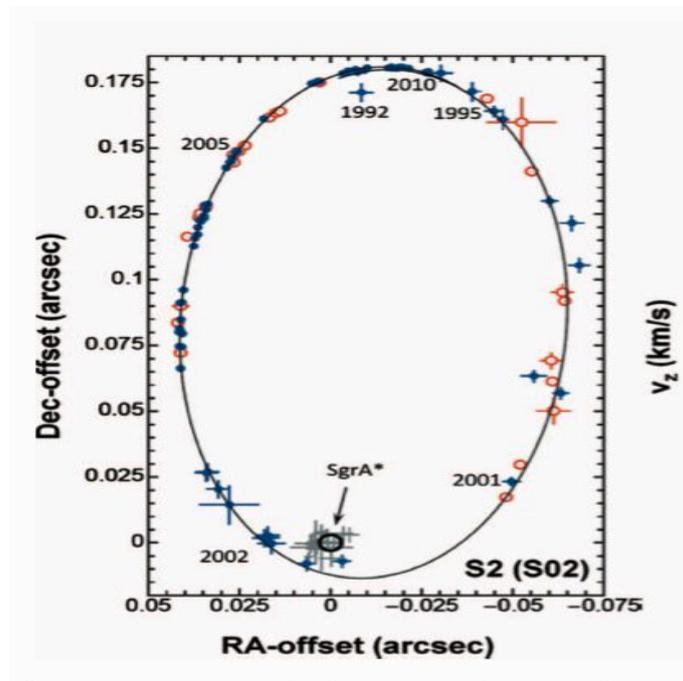


Figura 4.1: Ricostruzione dell'orbita di S2 attorno a Sagittarius*A.[16]

Riportiamo adesso due immagini dall'inestimabile valore scientifico.

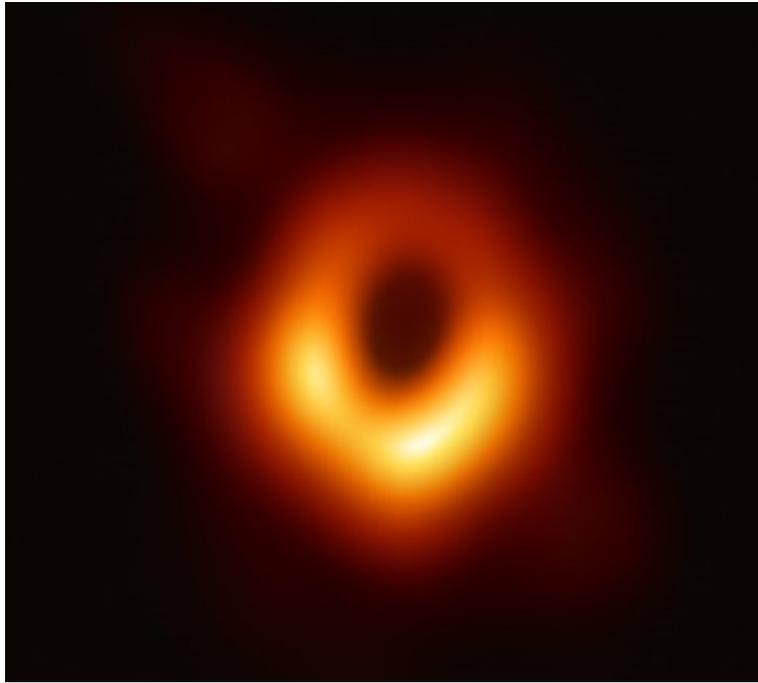


Figura 4.2: Immagine del EHT del disco di accrescimento del buco nero M87.[6]

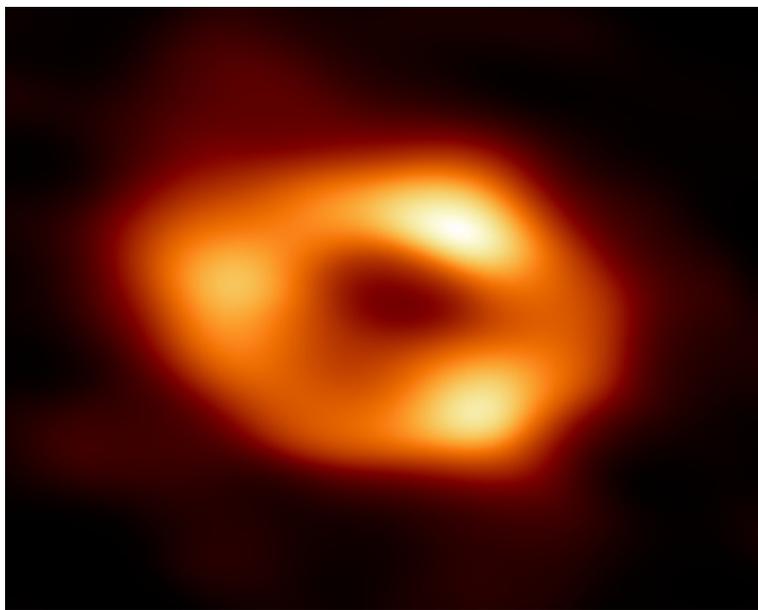


Figura 4.3: Immagine del EHT del disco di accrescimento del buco nero Sagittarius*A.[10]

Sono rispettivamente la ricostruzione grafica effettuata dall'Event Horizon Telescope, che lavora a $\lambda = 1.3mm$, dei buchi neri super-massicci M87 (2021) e Sgr*A (2022). Sono di fatto le prime foto mai ottenute di questi oggetti esotici. Iniziamo con il notare che un buco nero nello spazio vuoto non è in alcun modo osservabile; ciò che ne può rivelare la presenza deve quindi essere un corpo esterno che interagisca con esso. Nelle immagini proposte è il disco di accrescimento, costituito da gas e polveri incandescenti e in caduta libera, l'oggetto realmente osservato; ricordando che le onde radio emesse nella regione più interna del disco provengono dalla sfera di fotoni di raggio $r = \frac{3}{2}R_s$, si ricavano informazioni su R_s e quindi sulla massa del B-H, eventualmente comparabili con i valori emersi da misure di tipo dinamico come quelle precedentemente descritte.[10][6] Analizziamo infine la seguente immagine, tra le prime cinque realizzate dal Webb Telescope.

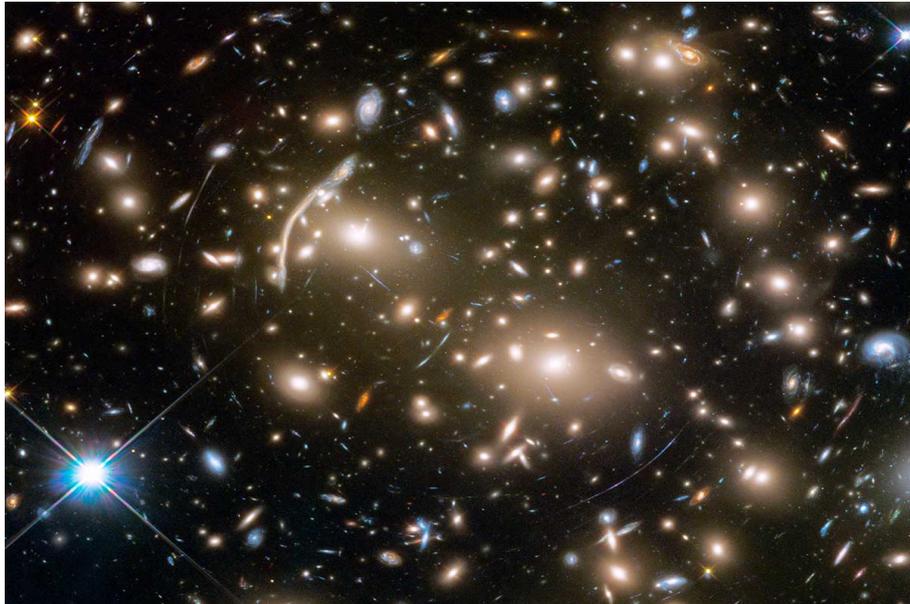


Figura 4.4: Immagine a campo profondo, nell'infrarosso, dell'ammasso di galassie SMACS 0723.[15]

Si possono notare distintamente strutture simili ad archi luminosi che prendono il nome di anelli di Einstein; questi sono il risultato del fenomeno di lensing gravitazionale cui è soggetta la luce che attraversa le galassie del cluster. La formazione incompleta dell'anello è dovuta evidentemente al fatto che l'ammasso di galassie responsabile del lensing non può essere approssimato a lente sottile, provocando quindi effetti di aberrazione.

Ancora una volta il risultato mostrato trova giustificazione nella teoria della deflessione della luce.[15]

In questo testo è stato ripercorso lo sviluppo storico della teoria delle orbite. Punto di partenza sono state le leggi di Keplero, trovate come particolare soluzione del "Problema a due corpi" in presenza di un sistema legato ed in condizione di forte asimmetria tra le masse.

In seguito si sono discusse le proprietà dinamiche dei possibili moti orbitali, classificati utilizzando la conservazione dell'energia e del momento angolare. Successivamente, evidenziando i limiti della trattazione classica, è stato calcolato il contributo relativistico alla precessione del perielio di Mercurio ricorrendo alla teoria metrica della gravitazione sviluppata da Einstein. Le condizioni di campo debole del problema hanno permesso di sottolineare come la teoria della RG comprenda entro opportuni limiti la trattazione classica e la estenda, facendo così emergere nuovi fenomeni altrimenti non descrivibili.

Con l'obiettivo di sviluppare una teoria delle orbite anche in tale formalismo, si sono discusse le proprietà di invarianza dei coefficienti metrici per trasformazioni che coinvolgono le sole coordinate cicliche; il risultato trovato consiste nella generalizzazione dell'usuale legge di conservazione dell'energia, il cui ruolo è cruciale per la classificazione dei moti planetari.

Ponendoci in condizione di campo forte ed a simmetria sferica, sono state sfruttate le proprietà di invarianza della metrica di Schwarzschild dalla coordinata x^0 per poter individuare, in base al vincolo imposto dalla conservazione di E , le regioni di piano accessibili. La derivazione, affrontata prima per una particella materiale, ha mostrato differenze sostanziali dall'analogo problema classico, quali ad esempio la scomparsa della barriera infinita di potenziale anche in caso di moto non puramente radiale. La classificazione delle orbite stabili rimane ad ogni modo possibile in corrispondenza del minimo del potenziale efficace, presente per certi valori del momento angolare iniziale.

La stessa trattazione è stata fatta anche per fotoni; infatti, anche se propriamente non interagenti per via gravitazionale, essi risentono della presenza di una sorgente poichè essa tende a curvare le geodetiche lungo cui tali particelle sono vincolate a muoversi. Anche in tale caso è stato possibile effettuare una classificazione, in base alla condizione di cattura da parte della singolarità; osserviamo come questa trattazione non presenti analogo classico.

La tesi si è conclusa illustrando brevemente alcune delle più importanti conferme sperimentali della Relatività Generali, quali: la rivelazione delle onde gravitazionali, le fotografie del disco di accrescimento di due differenti buchi neri e l'osservazione del fenomeno di lensing gravitazionale.

L'insieme di queste scoperte migliora certamente la nostra comprensione dell'universo, rendendo sempre più solida la RG, e, ancor più importante per le prospettive future, fornisce nuovi metodi di studio e ricerca del cosmo. Siamo quindi di fronte a quelli che sono i primi risultati di un nuovo campo di ricerca: la gravitazione osservativa.

Bibliografia

- [1] A.A.Vankov. “Einstein’s paper:“explanation of the perihelion motion of mercury from general relativity theory””. In: *General Science Journal* (2013), pp. 10–12.
- [2] T.Ott A.Eckart R.Genzel e R.Schödel. “Stellar orbits near Sagittarius A”. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 331.4 (2002), pp. 917–934.
- [3] A.Romano. *Introduzione alla Meccanica Classica*. (2019), pp. 171–176.
- [4] A.S.Eddington. *The mathematical theory of relativity*. The University Press, (1923), pp. 85–90.
- [5] B.W.Carroll e D.A.Ostlie. *An introduction to modern astrophysics*. Cambridge University Press, (2017), pp. 211–300.
- [6] Event Horizon Telescope Collaboration et al. “First M87 event horizon telescope results. IV. Imaging the central supermassive black hole”. In: *arXiv preprint arXiv:1906.11241* (2019), pp. 1–4.
- [7] E.Ferroni. “LIGO:cosa c’è dietro la scoperta”. In: *MEDIA INAF* (2016), pp. 1–5.
- [8] F.Watson F.W.Dyson, A.S.Eddington e C.Davidson. “IX. A determination of the deflection of light by the Sun’s gravitational field, from observations made at the total eclipse of May 29, 1919”. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* Vol 220.571-581 (1920), pp. 291–293.
- [9] H.Stephani. *General Relativity: An introduction to the theory of gravitational field*. Cambridge university press, (1990), pp. 99–103.
- [10] K.Akiyama et al. “First Sagittarius A* event horizon telescope results. VI. Testing the black hole metric”. In: *The Astrophysical Journal Letters* 930.2 (2022), p. L17.

- [11] K.Schwarzschild. “On the gravitational field of a mass point according to Einstein’s theory”. In: *arXiv preprint physics/9905030* (1999), pp. 945–950.
- [12] M.De Laurentis. “Newtonian and relativistic theory of orbits and emission of gravitational waves”. In: *arXiv preprint arXiv:1004.0922* (2010), pp. 3–7.
- [13] P.Marcellini N.Fusco e C.Sbordone. *Analisi Matematica due*. Liguori, (1996), pp. 311–317.
- [14] Massimo P.Mazzoldi M.Nigro, C.Voci e M.Enrico. *Elementi di fisica: meccanica e termodinamica*. EdiSES, (2021), pp. 208–214.
- [15] R.Garner. “NASA’s Webb Delivers Deepest Infrared Image of Universe Yet”. In: *NASA Official: Brian Dunbar* (2022), pp. 1–2.
- [16] F.Eisenhauer R.Genzel e S.Gillessen. “The Galactic Center massive black hole and nuclear star cluster”. In: *Reviews of Modern Physics* 82.4 (2010), p. 3121.
- [17] R.P.Baum e W.Sheehan. *In search of planet Vulcan: The ghost In Newton’s clockwork universe*. Springer, 2013.
- [18] S.Capozziello e M.De Laurentis. “Gravitational waves from stellar encounters”. In: *Astroparticle Physics* 30.2 (2008), pp. 105–107.
- [19] S.Capozziello e M.Funaro. *Introduzione alla relatività generale: con applicazioni all’astrofisica relativistica e alla cosmologia*. Liguori, (2006), pp. 120–131.
- [20] S.Thorne. “Nobel Lecture: LIGO and gravitational waves III”. In: *Reviews of Modern Physics* 90.4 (2018), pp. 3–5.
- [21] S V.Bozza S.Capozziello, G.Iovane e G.Scarpetta. “Strong field limit of black hole gravitational lensing”. In: *General Relativity and Gravitation Vol 33* (2001), pp. 1535–1548.
- [22] W.Rindler. *Relativity: special, general, and cosmological*. American Association of Physics Teachers, (2003), pp. 241–243.