

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI  
“FEDERICO II”**



**Scuola Politecnica e delle Scienze di Base  
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali  
Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**

*Laurea Triennale in Fisica*

**Prova à la Weinberg della conservazione della carica  
elettrica e dell’uguaglianza tra massa inerziale e  
gravitazionale nel quadro della teoria della matrice S**

**Relatori:**  
Prof. Massimo Taronna

Handwritten signature of Massimo Taronna.

**Candidato:**  
Danilo Lombardo  
Matr. N85001193

**Anno Accademico 2021/2022**

È una condizione generale di ciò che  
è godibile il fatto che la mente  
debba credere nell'esistenza di una  
legge e tuttavia trovarsi di fronte a  
un mistero in cui addentrarsi.

---

J. C. Maxwell (1854)

# Introduzione

Una teoria fisica è un insieme organico di leggi matematiche derivate a partire da alcuni principi fondamentali, capace di descrivere in maniera sistematica tutta una categoria di fenomeni fisici. La scelta dei principi fondamentali è una questione di centrale importanza nella formulazione di una teoria poiché ne delimita il campo di applicabilità. Quanto più è vasto il campo di applicabilità di una teoria e quanto più è piccolo il numero di principi basilari, tanto più universali risulteranno questi ultimi. La scelta dei principi non è, come potrebbe sembrare, una semplice selezione di quelle verità empiriche che paiono non essere mai state negate e che siano più generali possibili. Se così fosse le teorie non potrebbero descrivere più di quanto è stato osservato per formularle e non richiederebbero modifiche nel tempo. L'essenza, in realtà, è che i fisici, ispirati dall'esperienza, pervengono alla costruzione di una teoria attraverso mezzi puramente speculativi e gli esperimenti sono il modo di comprovarne la correttezza. Per tale ragione, *le teorie contengono sempre un numero di supposizioni fisiche e filosofiche maggiore di quello che i semplici fatti osservati fornirebbero o implicherebbero*<sup>‡</sup>. In quest'ottica, i principi primi possono essere messi in discussione in quanto tali ed essere sostituiti da altri principi sia per ragioni teoretiche, legate al voler trovare dei nuovi principi più generali che contengano i precedenti come delle conseguenze o come casi limite, sia per ragioni empiriche, legate a nuovi esperimenti che portino a risultati incompatibili con i principi stessi, sia per una combinazione di queste due ragioni. Un esempio di quest'ultimo caso è quello della relatività speciale di Einstein formulata a seguito dell'ipotesi dell'etere e del conseguente esperimento di Michelson e Morley che non avrebbe dovuto avere l'esito che ha avuto se gli assunti teoretici della meccanica di Newton e Galilei fossero stati assolutamente veri. Il seguente lavoro di tesi, invece, è un esempio del primo caso: si cercano teoricamente dei nuovi principi che possano implicare i vecchi come teoremi. In particolare, si ripercorrono alcuni dei passi dell'articolo "*Photons and Gravitons in S-Matrix Theory: Derivation of Charge Conservation and Equality of Gravitational and Inertial Mass*" di S. Weinberg<sup>[2]</sup> in cui si mostra come la conservazione della carica elettrica e l'uguaglianza tra massa inerziale e gravitazionale, che in alcune teorie vengono assunte come principi primi di natura empirica, possano essere in realtà ricavate come conseguenze di altri principi nell'ambito di una *stessa* teoria quantistico-relativistica delle interazioni tra particelle, detta *teoria della matrice S*.

Specificamente, nel [Capitolo 1](#) si mostra lo schema essenziale per una formulazione della meccanica quantistica in regime relativistico. Si introduce il concetto di *trasformazione di simmetria* su cui si basa gran parte della fisica moderna e, in particolare,

---

<sup>‡</sup>Passaggio tratto dall'introduzione di F.S.C. Northrop al libro di W. Heisenberg<sup>[1]</sup> "*Fisica e filosofia*".

si approfondisce il caso delle *trasformazioni di simmetria di Poincaré* che rappresentano le isometrie dello spaziotempo di Minkowski. Ciò richiede lo studio del gruppo e dell'algebra di Poincaré. In seguito, viene presentata la cosiddetta *classificazione di Wigner* che rappresenta un modo per ricavare gli spazi di Hilbert di singola particella libera a partire dallo spazio delle rappresentazioni unitarie e irriducibili del gruppo di Poincaré. Questo passaggio mostra le potenzialità di un utilizzo sistematico delle simmetrie e della teoria dei gruppi in fisica e avvicina all'idea che E. P. Wigner ha sintetizzato in "*la fisica non sarebbe possibile senza principi di invarianza*"<sup>[3]</sup>. Infine, come applicazione utile agli sviluppi della tesi, si trova esplicitamente lo spazio di Hilbert per le particelle libere prive di massa e a energia positiva.

Le singole particelle libere non sono così interessanti come invece lo sono quando esse vengono fatte interagire. Da molti anni a questa parte gli sforzi di tanti fisici teorici e sperimentali sono indirizzati verso lo studio delle interazioni fra particelle. Ciò porta naturalmente alla formalizzazione del *problema della diffusione* (o *scattering*), proposta nel [Capitolo 2](#). In questo contesto, si definisce la *matrice di scattering*, detta anche *matrice S*. Essa contiene gran parte delle informazioni fisiche che caratterizzano il processo di diffusione, poiché i suoi elementi sono proprio le ampiezze di probabilità di transizione che il sistema passi da uno stato iniziale preparato a un dato stato finale dopo che l'interazione sia avvenuta. Infine, si definisce il concetto di Lorentz-invarianza della matrice S e si trova, così come fatto da Weinberg nell'articolo sopracitato, una forma espressamente Lorentz-invariante della matrice S di un processo di scattering in cui avvenga l'emissione di una particella priva di massa a elicità intera ed energia positiva.

Il [Capitolo 3](#) è un'introduzione alla *teoria dei propagatori*. Si definisce il *propagatore* come nucleo integrale dell'equazione di Schrödinger scritta in forma integrale e se ne individua la *condizione fisica di causalità* che si vuole imporre su di esso. Nel [Paragrafo 3.2](#) e nel [Paragrafo 3.3](#) vengono esposte le applicazioni standard del calcolo del propagatore al caso della particella libera classica e della particella libera relativistica. Queste due consentono di mostrare esplicitamente, nei rispettivi casi, le proprietà di analiticità del propagatore. Meno che in pochi casi, tra cui sono presenti i due discussi, è raro che sia facile calcolare il propagatore ed è per questo che nel [Paragrafo 3.4](#) si sviluppa una teoria delle perturbazioni per esso. Ciò crea un legame tra la teoria dei propagatori e quella dello scattering. Utilizzando l'approccio perturbativo, inoltre, si mostra euristicamente come le proprietà di analiticità della matrice S rispecchino quelle del propagatore ed è proprio ispirata a questo, nell'articolo di Weinberg, l'assunzione di una particolare *struttura a poli* della matrice S.

Nel [Capitolo 4](#) si entra nel cuore dell'articolo di Weinberg ripercorrendone alcuni dei passi che, dallo studio di processi di scattering in cui venga emesso un *fotone* o un *gravitone* di basse energie, consentono di dimostrare come le sole assunzioni di Lorentz-invarianza e struttura a poli della matrice S includano tra le loro conseguenze la *conservazione della carica elettrica* e il *principio di equivalenza*.

# Notazioni

- Si adotterà il sistema di unità di misura naturali in cui:  $c = 1$  e  $\hbar = 1$ .
- Con  $\mathcal{M}$  si indicherà lo spaziotempo di Minkowski.
- Con lo  $*$  si indicherà il complesso coniugato.
- Le lettere latine  $i, j, k$ , etc. sono generalmente riferite ad indici spaziali, assumendo così i valori 1, 2, 3. I vettori tridimensionali spaziali sono indicati con lettere in grassetto (e.g.  $\mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ ...). I corrispondenti versori saranno indicati con un accento circonflesso (e.g.  $\hat{\mathbf{J}}, \hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}$ ...).
- Le lettere greche  $\mu, \nu$ , etc. sono generalmente riferite ad indici spaziotemporali, assumendo così i valori 1, 2, 3, 0. La componente temporale '0' è usata come quarta componente e non come prima, pertanto un evento in  $\mathcal{M}$  si rappresenta come  $x^\mu = (x^1, x^2, x^3, x^0)^T$  con  $x^0 \equiv t$  e un generico quadrivettore di  $\mathcal{M}$  come  $A^\mu = (A^1, A^2, A^3, A^0)^T$ .
- Si utilizzerà la notazione di Einstein secondo cui se un indice è presente più di una volta in un termine di un'espressione, occorre sommare rispetto ad esso, salvo il caso in cui sia esplicitamente indicato il contrario.
- $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  è il noto quadritensore di Levi-Civita definito come la grandezza totalmente asimmetrica con  $\epsilon^{0123} = +1$ .
- $\delta^\mu_\nu$  è la delta di Kronecker quadridimensionale:

$$\delta^\mu_\nu \equiv \delta^\mu_\nu = \delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = \nu \\ 0 & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (1)$$

- $\mathcal{M}$  è dotato del tensore metrico  $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$  che è diagonale e i cui elementi sono  $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1, \eta_{00} = -1$ . Si indicherà con  $\eta^{\mu\nu}$  l'inversa, cioè  $\eta^{\mu\sigma}\eta_{\sigma\nu} = \delta^\mu_\nu$ , i cui elementi sono  $\eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = 1, \eta^{00} = -1$ . Il tensore metrico consente di alzare e abbassare gli indici, cioè trasforma le componenti controvarianti in componenti covarianti (e viceversa), ossia:

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\nu, \quad A^\mu = \eta^{\mu\nu}A_\nu. \quad (2)$$

Inoltre, con  $\eta_{\mu\nu}$  si può scrivere l'intervallo metrico in  $\mathcal{M}$  come:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dx_\nu dx^\nu \quad (3)$$

- L'operazione di derivazione si indicherà con  $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ , da cui  $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu$ .
- Un generico tensore di rango due  $\Lambda^\mu{}_\nu$  sarà rappresentato in termini matriciali come:

$$\Lambda \equiv \{\Lambda^\mu{}_\nu\} \doteq \begin{pmatrix} \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 & \Lambda^1_0 \\ \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 & \Lambda^2_0 \\ \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 & \Lambda^3_0 \\ \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 & \Lambda^0_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

con la convenzione per cui gli indici in alto etichettano la riga, quelli in basso la colonna. Il simbolo  $\doteq$  sta per "è rappresentato da". In questi casi non si userà il simbolo  $=$  ma  $\doteq$  perché la forma particolare di una rappresentazione matriciale dipende dalla scelta della particolare base utilizzata. Mutuando una felice espressione di J.J. Sakurai e J. Napolitano, una trasformazione è diversa da una sua rappresentazione «così come un attore è diverso da un poster che lo raffigura»<sup>[4]</sup>. A rigore bisognerebbe seguire questa distinzione, ma spesso ciò è evitato per non appesantire la notazione.

- La parte spaziale del quadrivettore  $v^\mu \equiv \Lambda^\mu{}_\nu q^\nu$  sarà indicata con  $\mathbf{\Lambda q}$ , mentre il relativo versore  $\hat{\mathbf{v}}$  si indicherà con  $\mathbf{\Lambda \hat{q}}$ .
- Con  $G_N$  si indicherà la costante gravitazionale di Newton.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>Notazioni</b>	<b>iii</b>
<b>Indice</b>	<b>v</b>
<b>1 Meccanica quantistica relativistica</b>	<b>1</b>
1.1 Le simmetrie in meccanica quantistica . . . . .	1
1.2 Le simmetrie dello spaziotempo: il gruppo di Poincaré . . . . .	4
1.3 L'algebra di Lie del gruppo di Poincaré ristretto . . . . .	6
1.4 Classificazione di Wigner . . . . .	9
1.5 Gruppo piccolo per particelle massless . . . . .	13
<b>2 Teoria dello scattering e matrice S</b>	<b>17</b>
2.1 Stati "in" e stati "out" . . . . .	17
2.2 Matrice S e simmetria di Lorentz . . . . .	21
2.3 Matrice S per l'emissione di una particella $(0_+, \pm\sigma)$ . . . . .	24
<b>3 Teoria dei propagatori</b>	<b>27</b>
3.1 Propagatori causali e funzioni di Green . . . . .	27
3.2 Propagatore e funzione di Green per particelle libere non relativistiche .	30
3.3 Propagatore di Feynmann per l'equazione di Klein-Gordon . . . . .	33
3.4 Teoria delle perturbazioni per il propagatore e applicazione alla matrice S	35
<b>4 Teorema di Weinberg</b>	<b>38</b>
4.1 Carica elettrica e carica gravitazionale come costanti di accoppiamento nel limite sofficе . . . . .	38
4.2 Conservazione della carica elettrica e principio di equivalenza . . . . .	41
<b>Conclusioni</b>	<b>46</b>
<b>Appendice A</b>	<b>48</b>
A.1 Scelta di $L_p$ per la classe $(0_+, \sigma)$ . . . . .	48
A.2 Vettori polarizzazione . . . . .	48
A.3 Costruzione della "funzione $M$ " <sup>[2]</sup> . . . . .	50
<b>Bibliografia</b>	<b>54</b>

# Capitolo 1

## Meccanica quantistica relativistica

In questo capitolo si richiameranno alcuni dei postulati e dei risultati fondamentali della meccanica quantistica<sup>[5,6]</sup> e della relatività ristretta<sup>[7]</sup>. Con l'idea di conciliare queste due teorie della fisica moderna, si studierà come descrivere l'invarianza di Lorentz in ambito quantistico<sup>[6]</sup>, sfruttando alcuni degli strumenti che fornisce la teoria dei gruppi<sup>[8,9]</sup>. Sarà poi discussa la classificazione di Wigner delle rappresentazioni irriducibili del gruppo di Poincaré ristretto<sup>[6,8,10]</sup>, si troverà il legame tra queste e gli spazi di Hilbert di singola particella e, infine, si analizzerà il tutto espressamente nel caso specifico delle particelle prive di massa (*massless*) a energia positiva.

### 1.1 Le simmetrie in meccanica quantistica

Il primo postulato della meccanica quantistica prescrive che, ad ogni sistema fisico  $\mathcal{C}$ , è associato un opportuno spazio di Hilbert complesso  $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ . Gli stati fisici di  $\mathcal{C}$  sono in corrispondenza uno-a-uno con i *raggi unitari*  $\mathcal{R}$  definiti da  $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ <sup>‡</sup>.

Dal secondo postulato è noto che ad ogni grandezza osservabile  $A$  corrisponda un operatore lineare autoaggiunto  $\hat{A}$  definito in  $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ . I valori dello spettro dell'operatore  $\hat{A}$  costituiscono i possibili esiti della misura della grandezza fisica.

Una *trasformazione di simmetria* (TS) consiste nel cambiare l'osservatore  $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$  del sistema  $\mathcal{C}$  senza cambiare il risultato degli esperimenti che si conducono su di esso<sup>§</sup>. Se l'osservatore  $\mathcal{O}$ , che vede lo stato  $\mathcal{R}$  su  $\mathcal{C}$ , è legato attraverso una TS a un osservatore  $\mathcal{O}'$  che vede  $\mathcal{R}'$  su  $\mathcal{C}$  allora, pur essendo  $\mathcal{R}$  ed  $\mathcal{R}'$  «oggettivamente» differenti se visti da uno stesso osservatore, essi sono «soggettivamente» percepiti in modo identico dai due osservatori, cioè  $\mathcal{R}'$  è visto da  $\mathcal{O}'$  nello stesso modo in cui  $\mathcal{R}$  è visto da  $\mathcal{O}$ . Pertanto, due osservatori di questo tipo sperimentano la stessa fisica e per questo sono detti *equivalenti*. Indicando con  $\mathbb{P}\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$  lo spazio dei raggi unitari, si può esprimere la situazione appena descritta con una mappa biunivoca  $T : \mathbb{P}\mathcal{H}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{P}\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ , che trasformi i raggi  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ , visti da  $\mathcal{O}$ , in raggi  $\mathcal{R}'_1 \equiv T(\mathcal{R}_1), \mathcal{R}'_2 \equiv T(\mathcal{R}_2), \dots$ , visti da  $\mathcal{O}'$ ; condizione necessaria affinché la mappa  $T$  rappresenti effettivamente una

---

<sup>‡</sup>Un raggio unitario  $\mathcal{R}_{\psi}$  è definito come la classe di equivalenza:

$$\mathcal{R}_{\psi} = \{|\phi_{\alpha}\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{C}} : |\phi_{\alpha}\rangle = e^{i\alpha} |\psi\rangle \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \|\psi\| = 1\}.$$

Ogni elemento  $|\phi_{\alpha}\rangle \in \mathcal{R}_{\psi}$  è detto *rappresentante* di  $\mathcal{R}_{\psi}$  in  $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ <sup>[11]</sup>. Per brevità, saranno considerati equivalenti i termini *raggio* e *raggio unitario* e si ometterà il pedice in  $\mathcal{R}_{\psi}$ .

<sup>§</sup>Questo è detto *punto di vista passivo* della trasformazione<sup>[8]</sup>.

TS è che i due osservatori siano equivalenti, cioè che la mappa  $T$  preservi le probabilità fisiche di transizione:

$$P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = P(\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}'_n) \quad \forall \mathcal{R}, \mathcal{R}_n \in \mathbb{P}\mathcal{H}_\ell \quad (1.1)$$

che, per dei possibili rappresentanti dei raggi, diventa:

$$|\langle \psi_n | \psi \rangle|^2 = |\langle \psi'_n | \psi' \rangle|^2 \quad \forall |\psi\rangle, |\psi_n\rangle \in \mathcal{H}_\ell. \quad (1.2)$$

Il teorema di Wigner<sup>[6,11]</sup> dimostra che ogni trasformazione  $T$  tra raggi, che sia una TS, può essere rappresentata in  $\mathcal{H}_\ell$  da un operatore  $U(T)$  tale che:

- $U(T)$  sia unitario o antiunitario;
- $|\psi\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow U(T)|\psi\rangle \in T(\mathcal{R}) \equiv \mathcal{R}'$ .

Questo risultato permette di passare da uno studio delle trasformazioni nella varietà dei raggi  $\mathbb{P}\mathcal{H}_\ell$ , a uno studio delle trasformazioni nello spazio vettoriale  $\mathcal{H}_\ell$ .

È evidente che l'insieme delle TS formi un gruppo<sup>[6,9]</sup>; per un tale gruppo, il teorema di Wigner garantisce l'esistenza di una *rappresentazione unitaria* o *antiunitaria* su  $\mathcal{H}_\ell$ . Gli operatori  $U(T)$  in  $\mathcal{H}_\ell$ , che rappresentano le TS, rispecchiano tale struttura di gruppo, ma con una complicazione: piuttosto che agire sui raggi come le  $T$ , essi agiscono su vettori di  $\mathcal{H}_\ell$  definiti a meno di una fase. Pertanto, dalle trasformazioni:

$$\mathcal{R}_n \xrightarrow{T_1} \mathcal{R}'_n \xrightarrow{T_2} \mathcal{R}''_n \Rightarrow \mathcal{R}_n \xrightarrow{T_3=T_2T_1} \mathcal{R}''_n, \quad (1.3)$$

è chiaro che, se con  $|\psi_n\rangle$  si indica un rappresentante di  $\mathcal{R}_n$  in  $\mathcal{H}_\ell$ , allora sia lo stato  $U(T_2)U(T_1)|\psi_n\rangle$  che  $U(T_2T_1)|\psi_n\rangle$  sono rappresentanti del medesimo raggio  $\mathcal{R}''_n$  e possono perciò differire solamente per un fattore di fase<sup>‡</sup>:

$$U(T_2T_1)|\psi_n\rangle = e^{i\phi_n(T_2, T_1)}U(T_2)U(T_1)|\psi_n\rangle, \quad (1.4)$$

con  $\phi_n(T_2, T_1) \in \mathbb{R}$ . È ora manifesto il fatto che la rappresentazione unitaria del gruppo di TS, garantita dal teorema di Wigner, è in generale una *rappresentazione proiettiva*, anche detta *rappresentazione a meno di una fase*. Si può tuttavia, con un metodo algebrico-topologico (Sez. 2.7 del libro di S. Weinberg<sup>[6]</sup>), estendere il gruppo di TS in modo tale che tutte le sue rappresentazioni possano essere definite *ordinarie*, cioè tali da verificare:

$$U(T_2T_1) = U(T_2)U(T_1) \quad \forall T_1, T_2. \quad (1.5)$$

Si supporrà di estendere in questo modo i gruppi che saranno oggetto di studio in questa tesi e ciò giustificherà, d'ora in avanti, l'assunzione  $\phi = 0$ .

Ci sono dei gruppi di TS particolarmente rilevanti in fisica: *i gruppi di Lie connessi*<sup>[8,13,14]</sup>. Un gruppo di questo tipo ha delle caratteristiche distintive, alcune delle quali sono riportate di seguito:

<sup>‡</sup>In presenza di regole di superselezione il fattore di fase potrebbe dipendere anche dalla classe di stati su cui agisce. Tale è l'origine, per esempio, del diverso comportamento degli stati a spin intero e semintero sotto rotazioni mostrato nel Capitolo 17 del libro di D. Bohm<sup>[12]</sup>.

- ogni elemento  $T(\theta)$  del gruppo è descrivibile mediante un numero finito di parametri reali continui  $\theta \equiv (\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)$ ;
- ogni elemento  $T(\theta)$  del gruppo è connesso all'identità  $T(0)$  mediante trasformazioni interne in cui si variano con *continuità* i parametri  $\theta$ . Nel caso di gruppi di Lie connessi di TS, questo implica che le rappresentazioni operatoriali  $U(T(\theta))$  siano necessariamente unitarie (piuttosto che antiunitarie)<sup>[6,15]</sup>. Si può dunque scrivere, almeno in un intorno finito dell'identità 1, il seguente sviluppo:

$$U(T(\theta)) = 1 + i\theta^a t_a + \dots \quad (1.6)$$

dove i *generatori*  $t_a$  sono operatori autoaggiunti indipendenti dai parametri  $\theta$ ;

- la struttura del gruppo è specificata da una regola di moltiplicazione che, per due generici elementi  $T(\bar{\theta})$  e  $T(\theta)$  del gruppo, assume la seguente forma:

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T(f(\bar{\theta}, \theta))^\ddagger, \quad (1.7)$$

con:

$$f^a(\theta, 0) = f^a(0, \theta) = \theta^a \quad a = 1, \dots, n. \quad (1.8)$$

Compatibilmente con la (1.8), la *funzione di struttura*  $f(\bar{\theta}, \theta)$  può essere sviluppata in serie nel seguente modo:

$$f^a(\bar{\theta}, \theta) = \theta^a + \bar{\theta}^a + f^a_{bc} \bar{\theta}^b \theta^c + \dots^\S \quad (1.9)$$

Le rappresentazioni  $U(T(\theta))$  rispecchiano la legge di composizione (1.7), cioè:

$$U(T(\bar{\theta}))U(T(\theta)) = U(T(f(\bar{\theta}, \theta))). \quad (1.10)$$

Si può mostrare<sup>[6]</sup> che gli sviluppi (1.6) e (1.9) sono legati tra loro dall'insieme di relazioni di commutazione degli elementi di base dell'*algebra di Lie*<sup>[13,14]</sup> relativa al gruppo:

$$[t_b, t_c] = iC^a_{bc} t_a^\P \quad \forall b, c = 1, \dots, n, \quad (1.11)$$

dove le  $C^a_{bc} \equiv f^a_{cb} - f^a_{bc}$  sono delle costanti reali chiamate *costanti di struttura*. Si può dimostrare<sup>[6]</sup> che, una volta noti i generatori  $t_a$ , l'algebra di Lie (1.11) e la funzione di struttura  $f(\bar{\theta}, \theta)$ , gli operatori  $U(T(\theta))$  sono univocamente determinati in un intorno finito dell'identità di coordinate  $\theta = 0$ , cosicché la (1.7) sia soddisfatta se  $\theta, \bar{\theta}$  e  $f(\bar{\theta}, \theta)$  assumono valori in tale intorno. Quindi, gran parte dell'informazione relativa ad un dato gruppo di Lie connesso di TS, è racchiusa nelle proprietà degli elementi del gruppo in un intorno finito dell'identità ed è per questa ragione che, nel [Paragrafo 1.3](#), si prenderanno in considerazione le trasformazioni infinitesime.

Esiste un esempio di notevole importanza che non di rado si incontra in fisica. Si consideri un gruppo di Lie *abeliano* con legge di composizione data da:

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T(\bar{\theta} + \theta)^*. \quad (1.12)$$

<sup>\ddagger</sup>  $f(\bar{\theta}, \theta) \equiv (f^1(\bar{\theta}, \theta), f^2(\bar{\theta}, \theta), \dots, f^n(\bar{\theta}, \theta))$ .

<sup>\S</sup> Non è possibile avere termini in  $\bar{\theta}^2$  o  $\theta^2$  poiché verrebbe violata la (1.8).

<sup>\P</sup> Di seguito, con "*algebra di Lie*", ci si riferirà a questo set di commutatori tra generatori.

\* Questo accade, per esempio, nel caso del gruppo delle traslazioni spaziotemporali o del gruppo a un parametro delle rotazioni intorno ad un dato asse<sup>[9]</sup>.

Dalle (1.7) e (1.9) è chiaro che si abbia:

$$f^a(\bar{\theta}, \theta) = \bar{\theta}^a + \theta^a \quad a = 1, 2, \dots, n \quad (1.13)$$

$$f^a{}_{bc} = 0, \quad (1.14)$$

pertanto, l'algebra di Lie (1.11) diviene:

$$[t_a, t_b] = 0. \quad (1.15)$$

L'algebra di Lie è quindi *abeliana*. In questo caso, risulta facile calcolare l'operatore  $U(T(\theta))$ , non solo in un intorno finito dell'identità, ma per tutti i  $\theta^a$ . Si può dimostrare<sup>[6]</sup> che ogniqualvolta valga la (1.13), l'operatore  $U(T(\theta))$  risulta essere:

$$U(T(\theta)) = \exp(i\theta^a t_a) \quad (1.16)$$

## 1.2 Le simmetrie dello spaziotempo: il gruppo di Poincaré

In una conferenza del 1908 Hermann Minkowski osservava che «gli oggetti della nostra percezione invariabilmente includono luoghi e tempi fra loro combinati. Nessuno ha mai avvertito un luogo se non in un certo tempo, o un tempo se non in un certo luogo»<sup>[16]</sup>. Con lo stesso spirito di queste parole, i postulati della relatività einsteiniana stabiliscono che<sup>[7]</sup>:

- *le leggi della fisica sono invarianti in forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali (SRI)*. I SRI sono legati tra loro da particolari trasformazioni di coordinate *spaziotemporali* che permettono di imporre tale invarianza. Questo è un principio di simmetria e le relative trasformazioni sono delle TS;
- *la velocità della luce è indipendente dallo stato di moto della sorgente*. Questo secondo postulato restringe la classe delle possibili trasformazioni spaziotemporali tra SRI e rivoluziona il concetto di simultaneità.

Una generica trasformazione di coordinate da un SRI di coordinate  $x^\mu$  a un altro SRI di coordinate  $x'^\mu$  si scrive, compatibilmente con i postulati, come<sup>[7]</sup>:

$$x'^\mu(P) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu(P) + a^\mu \quad (1.17)$$

dove  $P$  è un generico punto della varietà spaziotemporale  $\mathcal{M}$ , le  $a^\mu$  sono 4 costanti reali arbitrarie e la  $\Lambda^\mu{}_\nu$  è una matrice costante che soddisfa la condizione di "pseudo-ortogonalità"<sup>‡</sup>:

$$\Lambda^\mu{}_\rho \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \quad (1.18)$$

Poiché la (1.18) rappresenta 10 vincoli indipendenti, una matrice  $\Lambda^\mu{}_\nu$  è individuata da  $16 - 10 = 6$  parametri reali indipendenti; l'azione di una trasformazione del tipo

---

<sup>‡</sup>Questo impone che, tra tutte le trasformazioni possibili, si scelgano quelle che effettivamente lascino invariata la velocità della luce e, di conseguenza, l'intervallo metrico  $ds^2$  in tutti i SRI.

(1.17) è quindi individuata da  $6 + 4 = 10$  parametri reali indipendenti. Inoltre, dalla (1.18) si ottiene che:

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \longrightarrow \det \Lambda = \pm 1, \quad (1.19-1)$$

$$(\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu = \eta_{\nu\mu} \Lambda^\mu{}_\sigma \eta^{\rho\sigma} = \Lambda_\nu{}^\rho \longrightarrow \Lambda^\omega{}_\nu \Lambda_\omega{}^\mu = \delta^\mu{}_\nu. \quad (1.19-2)$$

Fu H. Poincaré<sup>[17]</sup> a mostrare che queste trasformazioni formano un gruppo di TS, noto come *gruppo di Poincaré* ( $\mathcal{P}$ ), i cui elementi verranno indicati con  $T(\Lambda, a)$ . In particolare, esso è un gruppo di Lie non abeliano decadimensionale<sup>[8]</sup>. Considerando una generica trasformazione  $T(\Lambda, a)$ , succeduta da un'altra trasformazione  $T(\bar{\Lambda}, \bar{a})$ , è immediato ricavare dalla (1.17) la legge di composizione<sup>[6]</sup>:

$$T(\bar{\Lambda}, \bar{a})T(\Lambda, a) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}), \quad (1.20)$$

da cui, per le rappresentazioni ordinarie che agiscono su  $\mathcal{H}_\varphi$ , si ottiene:

$$U(\bar{\Lambda}, \bar{a})U(\Lambda, a) = U(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}). \quad (1.21)$$

In particolare, si può notare che la trasformazione identica corrisponde a  $T(1, 0)$  e che l'inversa  $T^{-1}(\Lambda, a)$  è la trasformazione  $T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ . Inoltre, una generica trasformazione  $T(\Lambda, a)$  può sempre essere pensata come prodotto  $T(\Lambda, a) = T(1, a)T(\Lambda, 0)$ . Il gruppo di Poincaré possiede degli importanti sottogruppi<sup>[7,8]</sup>:

- il sottogruppo invariante abeliano delle trasformazioni con  $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ , cioè il *gruppo delle traslazioni spaziotemporali*  $\mathbf{R}^{3,1}$ , descritto da 4 parametri;
- il sottogruppo delle trasformazioni con  $a^\mu = 0$ , detto *gruppo di Lorentz omogeneo* ( $\mathcal{L} \cong O(3, 1)$ ). Gli elementi di questo gruppo sono detti *trasformazioni di Lorentz* (TL) e sono descritti da 6 parametri.

Il gruppo di Poincaré è il prodotto semidiretto di questi due:  $\mathcal{P} \cong \mathbf{R}^{3,1} \rtimes \mathcal{L}$ <sup>[13]</sup>. Pertanto, per lo studio di  $\mathcal{P}$ , è importante evidenziare alcune caratteristiche di  $\mathcal{L}$ . Quest'ultimo è un gruppo non connesso e con varietà di gruppo composta da quattro componenti disgiunte, definite dal tipo di TL che vi appartengono (Tabella 1.1):

(I)	$\mathcal{L}_-^\uparrow$ : $\det(\Lambda) = -1$	$\Lambda^0{}_0 \geq +1$	TL <i>improprie-ortocrone</i>
(II)	$\mathcal{L}_-^\downarrow$ : $\det(\Lambda) = -1$	$\Lambda^0{}_0 \leq -1$	TL <i>improprie-anticrone</i>
(III)	$\mathcal{L}_+^\downarrow$ : $\det(\Lambda) = +1$	$\Lambda^0{}_0 \leq -1$	TL <i>proprie-anticrone</i>
(IV)	$\mathcal{L}_+^\uparrow$ : $\det(\Lambda) = +1$	$\Lambda^0{}_0 \geq +1$	TL <i>proprie-ortocrone</i> o <i>ristrette</i> (TLR)

Tabella 1.1

Di queste componenti solo la (IV) forma un gruppo, il *gruppo di Lorentz proprio ortocrono* o di *Lorentz ristretto* ( $\mathcal{L}_+^\uparrow \cong SO(3, 1)^\uparrow$ ). I suoi elementi (TLR) sono i boost e le rotazioni spaziali proprie ed è un gruppo di Lie a sei parametri (tre legati ai boost e tre alle rotazioni), connesso, ma non compatto. La non compattezza implica che le rappresentazioni unitarie non banali debbano essere necessariamente infinito-dimensionali<sup>[14]</sup>. Esso è un sottogruppo invariante di  $\mathcal{L}$  ed è di fondamentale importanza perché è il suo unico sottogruppo connesso: una qualsiasi TL ottenuta dall'identità variando con continuità i parametri, deve appartenere a  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . Si può inoltre osservare, in Figura 1.1,

che lo studio del gruppo  $\mathcal{L}$  si riduce allo studio del gruppo  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  insieme alle trasformazioni discrete di inversione spaziale  $\mathcal{P}$ , temporale  $\mathcal{T}$  e della loro composizione  $\mathcal{PT}$ . Di conseguenza, la conoscenza di  $\mathcal{P}$  s'incardina sullo studio di  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . Per tale ragione, d'ora in poi saranno considerate solo TL proprie-ortocrone e si studierà il *gruppo di Poincaré ristretto*  $\mathcal{P}_+^\uparrow \cong \mathbf{R}^{3,1} \rtimes \mathcal{L}_+^\uparrow$ .

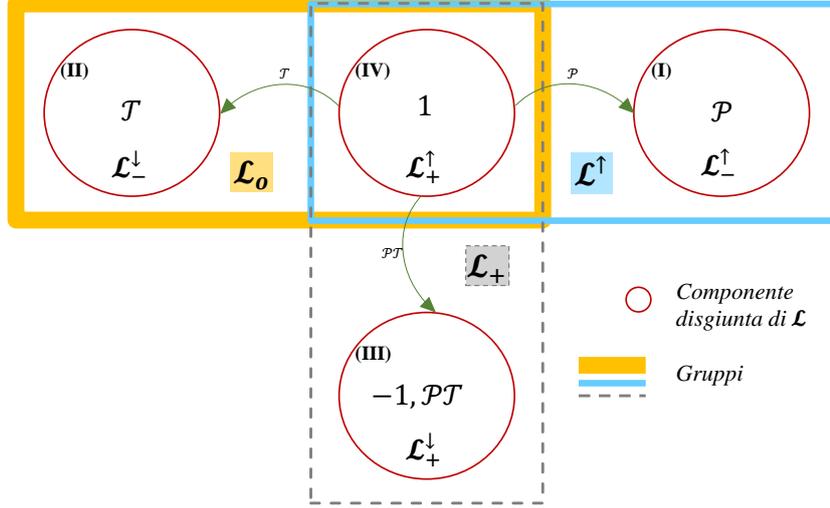


Figura 1.1: Oltre al solo  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ , anche mettendo insieme a coppie alcune delle quattro componenti di  $\mathcal{L}$  si formano dei gruppi:  $\mathcal{L}_+$  è il *gruppo di Lorentz proprio* (TL con  $\det(\Lambda) = 1$ ),  $\mathcal{L}^\uparrow$  è il *gruppo di Lorentz ortocrono* (TL con  $\Lambda^0_0 \geq 1$ ) e  $\mathcal{L}_o$  è il *gruppo di Lorentz ortocoro* (TL con  $\text{sgn}(\Lambda^0_0) \cdot \det(\Lambda) = +1$ ). Gli elementi delle componenti  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ,  $\mathcal{L}_-^\downarrow$  e  $\mathcal{L}_-^\uparrow$  sono ottenibili da quelli del gruppo  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  grazie all'azione delle trasformazioni discrete  $\mathcal{P}, \mathcal{T}$  e la loro composizione  $\mathcal{PT}$ . Gli unici termini non nulli di  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{T}$  sono:  $\mathcal{P}^1_1 = \mathcal{P}^2_2 = \mathcal{P}^3_3 = -1$ ,  $\mathcal{P}^0_0 = +1$  e  $\mathcal{T}^1_1 = \mathcal{T}^2_2 = \mathcal{T}^3_3 = +1$ ,  $\mathcal{T}^0_0 = -1$ .

Dai discorsi appena fatti si comprende che, per descrivere  $\mathcal{P}_+^\uparrow$ , servono 10 parametri: 3 per i boost di Lorentz, 3 per le rotazioni proprie spaziali e 4 per le traslazioni spaziotemporali. La relativa algebra di Lie sarà quindi caratterizzata da 10 generatori autoaggiunti: quattro di questi, quelli per le traslazioni spaziotemporali, saranno indicati con  $P^\mu$ , mentre gli altri sei, per i boost e le rotazioni, con  $J^{\rho\sigma}$ , dove  $J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}$ ; si adotteranno inoltre le notazioni  $\mathbf{P} \equiv (P^1, P^2, P^3)$ ,  $P^0 \equiv H$  per le traslazioni,  $J^i \equiv \frac{1}{2}\eta^{ij}\epsilon_{jkh}J^{kh} \rightarrow \mathbf{J} \equiv (J^{23}, J^{31}, J^{12})$  per le rotazioni e  $K^i \equiv J^{i0} \rightarrow \mathbf{K} \equiv (J^{10}, J^{20}, J^{30})$  per i boost. Queste, per adesso, sono solo delle convenienti convenzioni, ma acquisiranno ben presto un significato fisico. Infine, contenendo la componente non compatta  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ , anche  $\mathcal{P}_+^\uparrow$  è non compatto e per questo le sue rappresentazioni unitarie saranno necessariamente infinito-dimensionali.

### 1.3 L'algebra di Lie del gruppo di Poincaré ristretto

Per studiare l'algebra di  $\mathcal{P}_+^\uparrow$ , è utile considerare l'azione di una trasformazione (1.17) che sia infinitesima, cioè tale che differisca infinitesimamente dall'identità:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad a^\mu = \epsilon^\mu \quad (1.22)$$

dove  $\omega^\mu{}_\nu$  e  $a^\mu = \epsilon^\mu$  sono entrambi infinitesimi. Affinché sia soddisfatta la condizione di "pseudortogonalità" (1.18), deve verificarsi che:

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \quad (1.23)$$

Essendo quest'ultimo un tensore antisimmetrico di rango due, esso è descritto da 6 parametri indipendenti che, per convenzione, saranno chiamati  $\delta\theta^i \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\omega_{jk} \rightarrow \delta\boldsymbol{\theta} \equiv (\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12})$  e  $\delta v^i \equiv \eta^{ij}\omega_{j0} \rightarrow \delta\mathbf{v} \equiv (\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30})$ . Con un'opportuna scelta di fase che renda  $U(1, 0) = 1$ , la corrispondente rappresentazione  $U(\Lambda, a)$  è scrivibile, in accordo con la (1.6), come:

$$U(1 + \omega, \epsilon) = 1 + \frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\epsilon_\rho P^\rho + \dots^\ddagger \quad (1.24)$$

Dalle notazioni sopra introdotte, la (1.24) può essere riscritta come:

$$U((\delta\boldsymbol{\theta}, \delta\mathbf{v}), \epsilon) = 1 + i\mathbf{J} \cdot \delta\boldsymbol{\theta} + i\mathbf{K} \cdot \delta\mathbf{v} - i\epsilon_\rho P^\rho + \dots \quad (1.25)$$

che, per trasformazioni finite, diventa:

$$U((\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}), a) = \exp(i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\theta} + i\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} - ia_\rho P^\rho). \quad (1.26)$$

Per studiare il comportamento dei generatori  $J^{\rho\sigma}$  e  $P^\rho$  sotto una generica trasformazione di Poincaré ristretta  $T(\tilde{\Lambda}, \tilde{a})$  si consideri la composizione:

$$U(\tilde{\Lambda}, \tilde{a})U(1 + \omega, \epsilon)U^{-1}(\tilde{\Lambda}, \tilde{a}), \quad (1.27)$$

la quale, dalla (1.21), diviene:

$$U(\tilde{\Lambda}, \tilde{a})U(1 + \omega, \epsilon)U^{-1}(\tilde{\Lambda}, \tilde{a}) = U(\tilde{\Lambda}(1 + \omega)\tilde{\Lambda}^{-1}, \tilde{\Lambda}\epsilon - \tilde{\Lambda}\omega\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{a}). \quad (1.28)$$

Espandendo entrambi i membri della (1.28) al primo ordine in  $\omega$  e  $\epsilon$ , dalla (1.24) segue che:

$$\begin{aligned} U(\tilde{\Lambda}, \tilde{a})(1 + \frac{1}{2}i\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta} - i\epsilon_\rho P^\rho)U^{-1}(\tilde{\Lambda}, \tilde{a}) = \\ = 1 + \frac{1}{2}i(\tilde{\Lambda}\omega\tilde{\Lambda}^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i(\tilde{\Lambda}\epsilon - \tilde{\Lambda}\omega\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{a})_\mu P^\mu, \end{aligned} \quad (1.29)$$

con:

$$(\tilde{\Lambda}\epsilon)_\mu = \eta_{\mu\sigma}\tilde{\Lambda}^\sigma{}_\nu\eta^{\nu\rho}\epsilon_\rho \quad (1.30-1)$$

$$(\tilde{\Lambda}\omega\tilde{\Lambda}^{-1})_{\mu\nu} = \omega_{\alpha\beta}\eta_{\mu\sigma}\tilde{\Lambda}^\sigma{}_\tau\eta^{\tau\alpha}\tilde{\Lambda}_\nu{}^\beta \quad (1.30-2)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{\Lambda}\omega\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{a})_\mu P^\mu &= \omega_{\alpha\beta}\eta_{\mu\sigma}\tilde{\Lambda}^\sigma{}_\tau\eta^{\tau\alpha}\tilde{\Lambda}_\nu{}^\beta\tilde{a}^\nu P^\mu = \\ &= \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\eta_{\mu\sigma}\tilde{\Lambda}^\sigma{}_\tau\eta^{\tau\alpha}\tilde{\Lambda}_\nu{}^\beta(\tilde{a}^\nu P^\mu - \tilde{a}^\mu P^\nu). \end{aligned} \quad (1.30-3)$$

Uguagliando i coefficienti di  $\epsilon_\rho$  e  $\omega_{\alpha\beta}$  nella (1.29) e sfruttando le (1.30), si ottengono le leggi di trasformazione:

$$U(\tilde{\Lambda}, \tilde{a})P^\rho U^{-1}(\tilde{\Lambda}, \tilde{a}) = \tilde{\Lambda}_\mu{}^\rho P^\mu, \quad (1.31-1)$$

$$U(\tilde{\Lambda}, \tilde{a})J^{\rho\sigma} U^{-1}(\tilde{\Lambda}, \tilde{a}) = \tilde{\Lambda}_\mu{}^\rho\tilde{\Lambda}_\nu{}^\sigma(J^{\mu\nu} - \tilde{a}^\mu P^\nu + \tilde{a}^\nu P^\mu). \quad (1.31-2)$$

---

<sup>‡</sup>La scelta di  $-P^\rho$  piuttosto che di  $+P^\rho$  è un'utile convenzione che in seguito renderà consistente il termine  $P^0$  con l'usuale definizione del generatore delle traslazioni temporali [6].

Per trasformazioni omogenee  $U(\tilde{\Lambda}, 0)$  le relazioni (1.31-1) e (1.31-2) mostrano che  $P^\mu$  è un quadrivettore e che  $J^{\mu\nu}$  è un quadritensore di rango 2. Invece, per traslazioni pure  $U(1, \tilde{a})$  le (1.31-1) e (1.31-2) mostrano che  $P^\mu$ , proprio come il quadrimpulso, è invariante, mentre  $J^{\mu\nu}$ , e in particolare la sua parte spaziale  $\mathbf{J}$ , cambia proprio come cambierebbe il momento angolare per una traslazione del polo rispetto a cui è calcolato. Quanto detto fa già intravedere il possibile significato fisico dei  $P^\mu$  e  $J^{\mu\nu}$ .

Per trovare le regole di commutazione tra questi generatori si consideri una trasformazione infinitesima  $\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \tilde{\omega}^\mu{}_\nu$ ,  $\tilde{a}^\mu = \tilde{\epsilon}^\mu$ ; usando la (1.24) e trascurando i termini in  $\tilde{\omega}^\mu{}_\nu$  e  $\tilde{\epsilon}^\mu$  superiori al primo ordine, le (1.31-1)-(1.31-2) divengono:

$$i \left[ \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \tilde{\epsilon}_\mu P^\mu, P^\rho \right] = \tilde{\omega}_\mu{}^\rho P^\mu, \quad (1.32-1)$$

$$i \left[ \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \tilde{\epsilon}_\mu P^\mu, J^{\rho\sigma} \right] = \tilde{\omega}_\mu{}^\rho J^{\mu\sigma} + \tilde{\omega}_\nu{}^\sigma J^{\rho\nu} - \tilde{\epsilon}^\rho P^\sigma + \tilde{\epsilon}^\sigma P^\rho. \quad (1.32-2)$$

Uguagliando i coefficienti di  $\tilde{\omega}^\mu{}_\nu$  e  $\tilde{\epsilon}^\mu$  in queste ultime due relazioni, si ottiene l'algebra di Lie del gruppo di Poincaré ristretto:

$$i \left[ J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma} \right] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu}, \quad (1.33-1)$$

$$i \left[ P^\mu, J^{\rho\sigma} \right] = \eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho, \quad (1.33-2)$$

$$\left[ P^\mu, P^\rho \right] = 0. \quad (1.33-3)$$

Usando le notazioni tridimensionali introdotte, queste ultime possono risciversi come:

$$\left[ J^i, J^j \right] = i\epsilon^{ijk} J_k, \quad (1.34-1)$$

$$\left[ J^i, K^j \right] = i\epsilon^{ijk} K_k, \quad (1.34-2)$$

$$\left[ K^i, K^j \right] = -i\epsilon^{ijk} J_k, \quad (1.34-3)$$

$$\left[ J^i, P^j \right] = i\epsilon^{ijk} P_k, \quad (1.34-4)$$

$$\left[ K^i, P^j \right] = iH\eta^{ij}, \quad (1.34-5)$$

$$\left[ J^i, H \right] = \left[ P^i, H \right] = \left[ H, H \right] = 0, \quad (1.34-6)$$

$$\left[ K^i, H \right] = iP^i. \quad (1.34-7)$$

Dalle (1.34) si possono trarre le seguenti osservazioni:

- le (1.34-1), (1.34-2), (1.34-3) definiscono l'algebra di Lie del gruppo  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ;
- le regole di commutazione di  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{P}$  e  $H$  sono proprio quelle delle osservabili momento angolare, impulso ed hamiltoniana, pertanto, le notazioni convenientemente introdotte in precedenza, trovano adesso giustificazione in un significato fisico ben preciso: il generatore delle rotazioni spaziali proprie è il momento angolare  $\mathbf{J}$ , il generatore delle traslazioni spaziali è l'impulso  $\mathbf{P}$  e quello delle traslazioni temporali è l'hamiltoniana  $H$ . Questa identificazione è ulteriormente rafforzata se si tiene conto dei commenti fatti sulle relazioni (1.31);

- le grandezze  $\mathbf{J}$  e  $P^\mu$  si *conservano* nella dinamica poiché commutano con  $H$ . Il vettore  $\mathbf{K}$ , invece, non si conserva e per tale ragione non è utilizzato per etichettare gli stati;
- introducendo l'*operatore di Pauli-Lubanski*  $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma$  (in componenti  $W^0 = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{W} = -P^0\mathbf{J} + \mathbf{K} \times \mathbf{P}$ ) si può dimostrare<sup>[8,9]</sup> che  $P^2 \equiv P^\mu P_\mu$  e  $W^2 \equiv W^\mu W_\mu$  sono gli operatori di Casimir dell'algebra di  $\mathcal{P}_+^\uparrow$ .

## 1.4 Classificazione di Wigner

Si vuole trovare, al variare del tipo di particella, lo spazio di Hilbert dei possibili stati<sup>‡</sup>. Per fare ciò, è utile studiare le rappresentazioni unitarie irriducibili (RUI) del gruppo  $\mathcal{P}_+^\uparrow$ , così da introdurre la cosiddetta *classificazione di Wigner*, basata su come gli stati di singola particella si trasformano sotto l'azione di tale gruppo. Si mostrerà che gli spazi delle rappresentazioni, nel caso di RUI, definiscono gli spazi degli stati di singola particella. In questo senso si dirà che "diverse RUI definiscono diverse particelle". Ci sono due modi per poter classificare e individuare queste RUI:

- (i) pensato come gruppo "intero"  $\mathcal{P}_+^\uparrow$ , la teoria delle rappresentazioni prescrive che le RUI siano etichettabili dagli autovalori degli operatori di Casimir  $P^2$  e  $W^2$ <sup>[13,18]</sup>;
- (ii) pensato come  $\mathcal{P}_+^\uparrow \cong \mathbf{R}^{3,1} \times \mathcal{L}_+^\uparrow$ , le RUI del gruppo si possono trovare utilizzando dei risultati della teoria sulle RUI di un prodotto semidiretto<sup>[13,19]</sup>: si studia prima la componente abeliana  $\mathbf{R}^{3,1}$  (caratteri,  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ -orbite,...) e poi si utilizza il *metodo delle rappresentazioni indotte*<sup>[10,20]</sup>, secondo cui le RUI di  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  sono costruite a partire dalle RUI di un suo sottogruppo, detto *gruppo piccolo* o *stabilizzatore*, che è più semplice da studiare.

Di seguito si arriverà ad utilizzare il metodo (ii) attraverso un approccio euristico<sup>[6,8]</sup> che riduce al minimo l'impiego di conoscenze preliminari e risultati generali di teoria delle rappresentazioni, ma che gode di particolare eleganza e interesse storico.

Per costruire una RUI è innanzitutto utile introdurre una base dello spazio della rappresentazione. Dato che i quattro operatori autoaggiunti  $P^\mu$  commutano tra loro, si può scegliere come insieme completo di stati per lo spazio della rappresentazione quello degli autostati simultanei dei  $P^\mu$ , cioè:

$$P^\mu |p, \sigma\rangle = p^\mu |p, \sigma\rangle, \quad (1.35)$$

dove con  $\sigma$  si sono etichettati gli ulteriori gradi di libertà che eliminano la degenerazione in  $p^\mu$ . Si includerà nella definizione degli stati di singola particella la condizione che  $\sigma$  possa assumere solo valori discreti<sup>§</sup>.

Dalla (1.21) si osservi che  $U(\Lambda, a) = U(1, a)U(\Lambda, 0)$ . Per pure traslazioni di  $a_\mu$ , dalle (1.16) e (1.26), si ricava:

$$\begin{aligned} U(1, a) |p, \sigma\rangle &= \exp(-iP^\mu a_\mu) |p, \sigma\rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow U(1, a) |p, \sigma\rangle &= \exp(-ip^\mu a_\mu) |p, \sigma\rangle. \end{aligned} \quad (1.36)$$

<sup>‡</sup>Per adesso la distinzione tra particella elementare e particella composta non ha alcuna rilevanza.

<sup>§</sup>Si sta escludendo il caso esotico che porterebbe a *rappresentazioni spin continuo* (CSR).

Quindi, per fissato  $p$ , l'insieme degli stati  $|p, \sigma\rangle$  fornisce una rappresentazione unitaria<sup>‡</sup> del gruppo delle traslazioni.

Applicando una TLR  $U(\Lambda, 0) \equiv U(\Lambda)$ , è facile dimostrare che se lo spazio vettoriale della rappresentazione di  $\mathcal{P}_+^\uparrow$  contiene lo stato  $|p, \sigma\rangle$  con  $p$  fissato, esso contiene anche tutti gli stati del tipo  $|\Lambda p, \sigma\rangle$ . Infatti, dalla (1.31-1) segue che:

$$\begin{aligned} P^\mu (U(\Lambda) |p, \sigma\rangle) &= U(\Lambda) [U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda)] |p, \sigma\rangle \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu (U(\Lambda) |p, \sigma\rangle). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Ciò mostra che lo stato  $U(\Lambda) |p, \sigma\rangle$  è un autostato di  $P^\mu$  con autovalore  $(\Lambda p)^\mu$  e per questo deve appartenere allo spazio della rappresentazione. Pertanto, esso è scrivibile come la combinazione:

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) |\Lambda p, \sigma'\rangle. \quad (1.38)$$

Le equazioni (1.36) e (1.38) mostrano come l'operatore  $U(\Lambda, a) \equiv U(1, a)U(\Lambda)$ , che rappresenta la trasformazione  $T(\Lambda, a)$  di  $\mathcal{P}_+^\uparrow$ , agisce sugli stati dello spazio della rappresentazione. Si possono dimostrare i seguenti risultati<sup>[8]</sup>:

- per fissati  $p$  e  $\Lambda$ , la matrice dei coefficienti  $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$  è unitaria;
- dall'unitarietà di  $U(\Lambda)$  e dalla (1.37) si può vedere che la struttura di ogni auto-spazio  $|p, \sigma\rangle$  è la stessa, cioè degenerazione in  $\sigma$  è la stessa al variare dell'autovalore  $p$ .

In generale, si possono scegliere opportune combinazioni degli stati  $|p, \sigma\rangle$  in modo tale che le matrici  $C(\Lambda, p)$  risultino diagonali a blocchi, con i blocchi etichettati dai  $\sigma$ , cosicché gli stati  $|p, \sigma\rangle$  forniscano una rappresentazione unitaria, in generale riducibile, di  $\mathcal{P}_+^\uparrow$ . Per un conciso ripasso dei concetti essenziali sulle rappresentazioni si rimanda al testo di T. Inui, Y. Tanabe e Y. Onodera<sup>[21]</sup>. Allo scopo di completare la trattazione bisogna trovare l'espressione esplicita delle  $C(\Lambda, p)$  in termini di RUI del gruppo  $\mathcal{P}_+^\uparrow$ .

Si considerino due stati  $|p, \sigma\rangle$  e  $|\tilde{p}, \sigma\rangle$  e si supponga che non esista un  $\tilde{\Lambda}$  tale che  $\tilde{p} = \tilde{\Lambda}p$  (cioè essi appartengono a  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ -orbite differenti). Segue immediatamente che, se entrambi questi stati appartengono allo spazio della rappresentazione, allora quest'ultima è riducibile, poiché, in accordo con la (1.38), essa contiene i sottospazi propri  $|\Lambda p, \sigma\rangle$  e  $|\Lambda \tilde{p}, \sigma\rangle$  (con tutti i possibili  $\Lambda$ ) che sono invarianti e non banali. Pertanto, per costruire delle rappresentazioni unitarie che siano irriducibili, c'è bisogno di considerare degli spazi delle rappresentazioni formati da stati relativi solo a quegli  $p$  ottenibili gli uni dagli altri attraverso delle TLR. A tal proposito, si osservi che tutti gli stati del tipo  $|\Lambda p, \sigma\rangle$ , al variare di  $\Lambda$  e  $\sigma$  e con fissato  $p$ , sono autostati dell'operatore di Casimir  $P^2$  di uguale autovalore  $p^2$ ; quindi, si può capire quali stati siano legati a degli  $p$  ottenibili gli uni dagli altri con delle TLR andando a guardare l'autovalore  $p^2 \equiv p^\mu p_\mu$  (questo dà una classificazione delle  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ -orbite). In questo modo, è chiaro che si può ottenere una RUI solo se ci si limita all'insieme degli stati  $|\Lambda p, \sigma\rangle$  che siano autostati di  $P^2$  di uno stesso fissato autovalore. Inoltre, si dimostra<sup>[8]</sup> che il segno di

<sup>‡</sup>Le rappresentazioni dipendono dallo spazio vettoriale su cui agiscono, per questa ragione a volte ci si riferisce ad esse riferendosi alla base del particolare spazio vettoriale che le contraddistingue piuttosto che chiarendo quale sia l'omomorfismo di gruppo che effettivamente le definisce.

$p^0$ , quando si ha  $p^2 \leq 0$ , è invariante sotto tutte le TLR. Quindi, i possibili valori  $p^2$  e  $p^0$ , che fisicamente sono legati alla massa  $-m^2$  e all'energia  $E$  del sistema elementare, consentono di fare una prima distinzione delle classi di RUI di  $\mathcal{P}_+^\dagger$ :

<b>1.</b>	$(m_+)$ :	$p^2 = -m^2 < 0$	$p^0 = E > 0$
	$(m_-)$ :	$p^2 = -m^2 < 0$	$p^0 = E < 0$
<b>2.</b>	$(0_+)$ :	$p^2 = -m^2 = 0$	$p^0 = E > 0$
	$(0_-)$ :	$p^2 = -m^2 = 0$	$p^0 = E < 0$
<b>3.</b>	$(0_0)$ :	$p^2 = -m^2 = 0$	$p^\mu = 0$
<b>4.</b>	$(\sigma)$ :	$p^2 = -m^2 = \sigma^2 > 0$	

Tabella 1.2: Le RUI nella classe **1** descrivono le proprietà di trasformazione di sistemi elementari massivi. Quelle della classe **2** descrivono il comportamento delle particelle massless. In particolare, le  $(m_+)$  e  $(0_+)$  descrivono rispettivamente le particelle massive e le particelle massless a energia positiva;  $(m_-)$  e  $(0_-)$  descrivono rispettivamente particelle massive e particelle massless a energia negativa, pertanto acquisiscono significato solo dopo la seconda quantizzazione. Le RUI di tipo  $(\sigma)$  definiscono particelle con massa a riposo immaginaria e per questo non hanno un significato fisico diretto. Infine, la classe  $(0_0)$  descrive l'assenza di particelle e pertanto fornirà la legge di trasformazione dello *stato di vuoto*.

Fissare  $p^2$  è una condizione necessaria, ma non sufficiente, per ottenere delle RUI. Essa consente di fare una prima classificazione in cui si è usato solo uno dei due operatori di Casimir. In tale classificazione, le famiglie di possibili RUI sono etichettate da caratteristiche fisiche della particella, quali la massa e il segno dell'energia. Per quest'ultimo motivo, sembra naturale iniziare a pensare di poter identificare lo spazio degli stati di una particella con lo spazio di una certa RUI del gruppo  $\mathcal{P}_+^\dagger$ . Ciò spiega perché le RUI di  $\mathcal{P}_+^\dagger$  vengono anche chiamate *particelle*.

Tutte le rappresentazioni di una data classe sono ottenibili le une dalle altre tramite un automorfismo del gruppo in sé stesso<sup>[8]</sup>; pertanto, è sufficiente considerare un solo quadrimpulso di riferimento in ogni classe, detto *quadrimpulso standard*  $\bar{p}^\mu \equiv k^\mu$ , ed esprimere ogni altro  $p^\mu$  appartenente alla medesima classe come:

$$p^\mu = L^\mu{}_\nu(p)k^\nu, \quad (1.39)$$

dove  $L(p) \equiv L_p$  è l'azione di un'opportuna TLR che dipende da  $p^\mu$  e, implicitamente, anche dalla scelta fatta per  $k^\mu$ . C'è una grande arbitrarietà nella scelta di  $L_p$ . Per esempio, moltiplicando a destra  $L_p$  per una rotazione intorno a  $k$ , l'effetto netto non cambia. La scelta del  $k^\mu$ , invece, è fatta seguendo dei criteri di semplicità come quello di scegliere il quadrimpulso nel sistema di riferimento a riposo (RF), se questo esiste<sup>‡</sup>. Eccone dei possibili esempi:

$$\begin{aligned}
(m_+) : & \quad k^\mu = (0, 0, 0, m) & m > 0 \\
(m_-) : & \quad k^\mu = (0, 0, 0, -m) & m > 0 \\
(0_+) : & \quad k^\mu = (0, 0, \kappa, \kappa) & \kappa > 0 \\
(0_-) : & \quad k^\mu = (0, 0, \kappa, -\kappa) & \kappa > 0.
\end{aligned} \quad (1.40)$$

<sup>‡</sup>Le particelle massless viaggiano alla velocità della luce in qualsiasi SRI<sup>[7]</sup>, quindi per esse non esiste un RF.

Si può allora scegliere l'insieme di base  $\{|p, \sigma\rangle\}$  in modo conveniente, cioè tale che per le particolari  $L_p$  valga:

$$|p, \sigma\rangle \equiv N(p)U(L_p)|k, \sigma\rangle, \quad (1.41)$$

dove  $N(p) \equiv N_p$  è l'opportuno fattore di normalizzazione che renda gli stati con differenti  $p^\mu$  tra loro ortonormali, una volta scelti ortonormali quelli a differenti  $k^\mu$ . Si può dimostrare<sup>[6]</sup> che se esso è uguale a:

$$N_p = \sqrt{\frac{k^0}{p^0}}, \quad (1.42)$$

allora risulta che:

$$\begin{aligned} \langle k', \sigma' | k, \sigma \rangle &= \delta_{\sigma\sigma'} \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle p', \sigma' | p, \sigma \rangle &= \delta_{\sigma\sigma'} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (1.43)$$

L'applicazione di una generica TLR sugli stati  $|p, \sigma\rangle$  può essere scomposta in:

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|p, \sigma\rangle &= U(L_{\Lambda p}L_{\Lambda p}^{-1}\Lambda L_p L_p^{-1})|p, \sigma\rangle \\ &= N_p U(L_{\Lambda p})U(L_{\Lambda p}^{-1}\Lambda L_p)|k, \sigma\rangle, \end{aligned} \quad (1.44)$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la regola di composizione (1.21) e la definizione (1.41). La trasformazione  $W(\Lambda, p) \equiv L_{\Lambda p}^{-1}\Lambda L_p$  corrisponde a una rotazione intorno a  $k$ , infatti, essa prende  $k$  e lo trasforma in  $L_p k = p$ , poi in  $\Lambda p$  e infine di nuovo in  $L_{\Lambda p}^{-1}\Lambda p = k$ . Questa trasformazione appartiene al sottogruppo di  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ , detto *gruppo piccolo* o *stabilizzatore*, formato dalle TLR  $W(\Lambda, p)$  che lasciano  $k^\mu$  invariato (a  $k$  di classi differenti corrispondono diversi gruppi piccoli):

$$W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu. \quad (1.45)$$

Come già detto, una generica TLR dipende da 6 parametri indipendenti. La relazione  $W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$  impone tre vincoli indipendenti sugli elementi  $W^\mu{}_\nu$ , quindi, una trasformazione del gruppo piccolo dipenderà da  $6 - 3 = 3$  parametri indipendenti. Ricordando che  $U(\Lambda^{-1}) = U^{-1}(\Lambda)$ , si può scrivere l'espressione:

$$U(\Lambda) = U(L_{\Lambda p})U(W(\Lambda, p))U^{-1}(L_p). \quad (1.46)$$

Usando la (1.46) è immediato vedere che per determinare l'effetto di  $U(\Lambda)$  sullo spazio della rappresentazione bisogna conoscere i soli  $C_{\sigma'\sigma}$  della (1.38) che corrispondono alle trasformazioni del gruppo piccolo  $W(\Lambda, p)$  e al valore di quadrimpulso  $k$ . Infatti, dalle (1.38),(1.41) si ottiene:

$$\begin{aligned} U(W(\Lambda, p))|k, \sigma\rangle &= \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p), k)|k, \sigma'\rangle \\ &= \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p), k) \left( \frac{1}{N_{\Lambda p}} U^{-1}(L_{\Lambda p})|\Lambda p, \sigma'\rangle \right), \end{aligned} \quad (1.47)$$

da cui, grazie alla (1.46), si ricava:

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|p, \sigma\rangle &= U(L_{\Lambda p})U(W(\Lambda, p))U^{-1}(L_p)|p, \sigma\rangle \\ &= U(L_{\Lambda p})U(W(\Lambda, p))N_p|k, \sigma\rangle \\ &= \frac{N_p}{N_{\Lambda p}} \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p), k)|\Lambda p, \sigma'\rangle. \end{aligned} \quad (1.48)$$

La (1.47) mostra che le matrici unitarie  $D(W) \equiv C(W(\Lambda, p), k)^\ddagger$  danno una rappresentazione unitaria, in generale riducibile, del gruppo piccolo nella varietà  $\{|k, \sigma\rangle\}$  che è detta *spazio di Hilbert piccolo*. La (1.48) mostra il legame tra le RUI del gruppo di Poincaré e le RUI del gruppo piccolo: si possono dedurre le RUI del gruppo piccolo da quelle del gruppo di Poincaré o, al contrario, indurre le RUI del gruppo di Poincaré da quelle del gruppo piccolo (*metodo delle rappresentazioni indotte*). Di conseguenza, una rappresentazione di  $\mathcal{P}_+^\uparrow$  fornita dagli stati  $|p, \sigma\rangle$  è una RUI se e solo se:

- (a) tutti gli stati appartengono allo stesso autovalore di  $P^2$ . In aggiunta, per le classi  $(m_\pm)$  e  $(0_\pm)$  il segno di  $p^0$  deve essere lo stesso per tutti gli stati.
- (b) la rappresentazione del gruppo piccolo, associata alla rappresentazione considerata, è una RUI.

Dal punto (b) si capisce che trovando le RUI del gruppo piccolo per le diverse classi della Tabella 1.2 e combinandole con quelle del gruppo delle traslazioni nella (1.36), si possono ricavare le RUI indotte di  $\mathcal{P}_+^\uparrow$ . Nel senso spiegato sopra, queste ultime sono interpretabili come le particelle relativistiche libere che si propagano nello spaziotempo e che hanno definite proprietà di trasformazione sotto il corrispondente gruppo di simmetria. Per chiarire il tutto, nel prossimo paragrafo, sarà mostrato esplicitamente questo procedimento per la classe  $(0_+)$  di interesse per gli sviluppi della tesi.

## 1.5 Gruppo piccolo per particelle massless

Si vuole individuare la struttura del gruppo piccolo per la classe di particelle massless a energia positiva. Si può scegliere, per semplicità, come quadrivettore standard della classe  $(0_+)$  il quadrivettore di tipo-luce  $(k^1, k^2, k^3, k^0)^T = (0, 0, 1, 1)^T$  che corrisponde a una particella con impulso spaziale unitario lungo  $\hat{x}^3 \equiv \hat{z}$ . Un generico elemento del gruppo piccolo  $W^\mu{}_\nu$  è una TLR che agirà su questo come  $W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$ . Se si considera il quadrivettore di tipo-tempo  $t = (0, 0, 0, 1)^T$  allora sono valide le seguenti relazioni:

$$(Wt)^\mu (Wt)_\mu = t^\mu t_\mu = -1 \quad (1.49-1)$$

$$(Wt)^\mu (k)_\mu = t^\mu k_\mu = -1 \quad (1.49-2)$$

Un generico quadrivettore che soddisfi la (1.49-2) è esprimibile come:

$$(Wt)^\mu = (\alpha, \beta, \zeta, 1 + \zeta) \quad \alpha, \beta, \zeta \in \mathbb{R}. \quad (1.50)$$

La (1.49-1) impone che:

$$\zeta = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2}. \quad (1.51)$$

Di conseguenza, l'azione di  $W^\mu{}_\nu$  su  $t^\nu$  e  $k^\nu$  ha lo *stesso effetto* della trasformazione:

$$S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1 - \zeta & \zeta \\ \alpha & \beta & -\zeta & 1 + \zeta \end{pmatrix}. \quad (1.52)$$

---

<sup>‡</sup>La lettera  $D$ , usata spesso in letteratura, deriva dalla parola tedesca "*Darstellung*" che significa rappresentazione.

Si osservi che:

$$S(\bar{\alpha}, \bar{\beta})S(\alpha, \beta) = S(\bar{\alpha} + \alpha, \bar{\beta} + \beta). \quad (1.53)$$

È facile dimostrare che  $S(\alpha, \beta)$  sia una TLR andando a verificare la condizione (1.18), osservando che  $\det(S) = 1$  e che  $S^0_0 \geq 1$ . Quanto detto non significa che la trasformazione  $W$  sia proprio uguale a  $S(\alpha, \beta)$ , ma solo che ne abbia gli stessi effetti e quindi che la trasformazione  $S^{-1}(\alpha, \beta)W$  sia proprio una TLR che lascia invariati  $k^\nu$  e  $t^\nu$  e perciò essa deve essere una pura rotazione di un angolo  $\theta$  intorno all'asse  $\hat{z}$ :

$$S^{-1}(\alpha, \beta)W = R(\theta) \quad (1.54)$$

con:

$$R^\mu{}_\nu(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

In altre parole, un generico elemento del gruppo piccolo sarà:

$$W(\theta, \alpha, \beta) = S(\alpha, \beta)R(\theta) \Rightarrow \quad (1.56-1)$$

$$W^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & -\alpha \cos(\theta) - \beta \sin(\theta) & \alpha \cos(\theta) + \beta \sin(\theta) \\ -\sin \theta & \cos \theta & \alpha \sin(\theta) - \beta \cos(\theta) & -\alpha \sin(\theta) + \beta \cos(\theta) \\ \alpha & \beta & 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} & \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \\ \alpha & \beta & -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} & 1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.56-2)$$

Il gruppo piccolo in questione possiede importanti sottogruppi:

- il gruppo abeliano delle rotazioni proprie intorno all'asse  $\hat{z}$  composto da tutte le trasformazioni del tipo  $W(\theta, 0, 0) = R(\theta)$ ;
- il gruppo formato da tutte le trasformazioni del tipo  $W(0, \alpha, \beta) = S(\alpha, \beta)$ . Dalla (1.54) si capisce che questo sia abeliano. Inoltre, esso è un sottogruppo invariante, infatti:

$$R(\theta)S(\alpha, \beta)R^{-1}(\theta) = S(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta, -\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta) \quad (1.57)$$

È noto<sup>[9]</sup> che le regole (1.54) e (1.57) corrispondano a quelle del gruppo  $\mathbb{T}_2$  delle traslazioni nel piano ortogonale a  $\hat{z}$ . Questo sottogruppo rende il relativo gruppo piccolo non *semi-semplce* e non compatto.

Dalla legge di composizione (1.56) e dalla caratterizzazione appena fatta per i sottogruppi si capisce che il gruppo piccolo in questione è isomorfo al gruppo euclideo  $ISO(2)$ . Un'ulteriore conferma di ciò sarà data dallo studio dell'algebra di Lie.

Si considerino i parametri  $\theta, \alpha, \beta$  come infinitesimi cosicché un generico elemento del gruppo piccolo possa essere scritto come:

$$W(\theta, \alpha, \beta)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad (1.58)$$

da cui, confrontando con la (1.56) si vede che il tensore antisimmetrico  $\omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\omega^\alpha{}_\nu$  ha per elementi:

$$\begin{array}{cccc} \omega_{11} = 0 & \omega_{12} = \theta & \omega_{13} = -\alpha & \omega_{10} = \alpha \\ \omega_{21} = -\theta & \omega_{22} = 0 & \omega_{23} = -\beta & \omega_{20} = \beta \\ \omega_{31} = \alpha & \omega_{32} = \beta & \omega_{33} = 0 & \omega_{30} = 0 \\ \omega_{01} = -\alpha & \omega_{02} = -\beta & \omega_{03} = 0 & \omega_{00} = 0 \end{array} \quad (1.59)$$

Dal confronto con la (1.24) e passando in notazione tridimensionale, si può scrivere al primo ordine nei parametri infinitesimi la seguente espressione:

$$U(W(\theta, \alpha, \beta)) = 1 + i\alpha(J^2 + K^1) + i\beta(-J^1 + K^2) + i\theta J^3 + \dots \quad (1.60)$$

I generatori saranno indicati con:

$$A \equiv -J^{13} + J^{10} = J^2 + K^1 \quad (1.61-1)$$

$$B \equiv -J^{23} + J^{20} = -J^1 + K^2 \quad (1.61-2)$$

Dalle (1.34) si ricava l'algebra di Lie del gruppo piccolo d'interesse:

$$[J^3, A] = iB, \quad (1.62-1)$$

$$[J^3, B] = -iA, \quad (1.62-2)$$

$$[A, B] = 0. \quad (1.62-3)$$

Essa corrisponde proprio alla notoria algebra del gruppo euclideo  $ISO(2)$ <sup>[9]</sup>, con  $A$  e  $B$  che sono i generatori delle traslazioni nel piano e con  $J^3$  che è il generatore delle rotazioni intorno a  $\hat{z}$ . Le (1.62) mostrano che, come già si è osservato, la struttura del gruppo piccolo non dipende dalla particolare scelta del  $k^\mu$  nella classe d'interesse ( $0_+$ ). Si può dimostrare<sup>[8,9]</sup> che questi generatori sono legati alle componenti dell'operatore di Pauli-Lubanski. L'operatore di Casimir del gruppo piccolo è  $C^2 = A^2 + B^2$ . Si può dimostrare<sup>[8]</sup> che esso è legato, a meno di un fattore di proporzionalità, al Casimir  $W^2$  di  $\mathcal{P}_+^\uparrow$ . Per le trasformazioni finite di  $\theta, \alpha, \beta$ , la (1.16) e la (1.56) consentono di scrivere:

$$U(W) = \exp(i\alpha(W)A + i\beta(W)B) \exp(i\theta(W)J^3). \quad (1.63)$$

L'unica RUI del gruppo piccolo interessante dal punto di vista fisico è quella corrispondente ad autovalore nullo per  $C^2$ <sup>[6,8]</sup>. Questo significa che gli stati dello spazio della rappresentazione siano tali da essere autostati di  $A$  e  $B$  con autovalori  $a = b = 0^\ddagger$  e che il sottogruppo  $\mathbb{T}_2$  abbia rappresentazione banale. Perciò, oltre che da  $k$ , gli stati dello spazio della rappresentazione sono individuati dall'autovalore  $\sigma$ , detto *elicità*, del rimanente generatore  $J^3$ . Perciò, gli stati  $|k, \sigma\rangle$  della (1.47) hanno adesso entrambi i label con un preciso significato fisico e matematico. Le RUI del gruppo piccolo saranno etichettate con  $(0_+, \sigma)$ . Da considerazioni topologiche<sup>[6]</sup> si può vedere che i possibili valori dell'elicità sono ristretti a  $\sigma = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots$ . Dalle considerazioni appena fatte e dalle (1.47) e (1.63) si ottiene la RUI del gruppo piccolo:

$$U(W) |k, \sigma\rangle = \exp(i\theta(W)\sigma) |k, \sigma\rangle, \quad (1.64)$$

da cui si ottiene la caratterizzazione dei coefficienti della (1.48) in:

$$D_{\sigma'\sigma}(W) \equiv C_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p), k) = \exp(i\theta(W)\sigma) \delta_{\sigma'\sigma}. \quad (1.65)$$

<sup>‡</sup>Si dimostra<sup>[6]</sup> che se si trovasse un insieme di stati con autovalori non nulli di  $A$  e  $B$ , allora si tratterebbe di un insieme continuo. Sperimentalmente non si osserva nessun grado di libertà continuo per le particelle massless, perciò va esclusa questa possibilità e lo si fa considerando stati per cui si abbia  $a = b = 0$ . Questa condizione si evince anche in teoria dei campi sulla base della Lorentz-invarianza della matrice di scattering e dell'invarianza di gauge per campi massless<sup>[6]</sup>.

Come già discusso, le RUI del gruppo piccolo inducono RUI del gruppo  $\mathcal{P}_+^\dagger$ . Gli stati  $|k, \sigma\rangle$  così costruiti definiscono gli stati  $|p, \sigma\rangle$  di singola particella massless (si veda la (1.41)), a energia positiva ed elicità arbitraria; usando la (1.65) nella (1.48), si trova che essi si trasformano sotto TLR come:

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(i\sigma\theta(\Lambda, p)) |\Lambda p, \sigma\rangle, \quad (1.66)$$

con  $\theta(\Lambda, p) \equiv \theta(W)$  definito da:

$$W(\Lambda, p) \equiv L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda L_p \equiv S(\alpha(\Lambda, p), \beta(\Lambda, p)) R(\theta(\Lambda, p)), \quad (1.67)$$

e con le seguenti proprietà di immediata dimostrazione<sup>[22]</sup>:

$$\theta(W_1) + \theta(W_2) = \theta(W_1)\theta(W_2) \quad (1.68-1)$$

$$\theta(W) = -\theta(W^{-1}). \quad (1.68-2)$$

Il generico quadrimpulso per le particelle con  $p^2 = 0$  si scrive come  $p^\mu = (\mathbf{p}, |\mathbf{p}|)^T$ , quindi per esse il fattore di normalizzazione si può scrivere come  $\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} = \sqrt{\frac{|\Lambda \mathbf{p}|}{|\mathbf{p}|}}$ . Per definire gli stati di singola particella nella (1.41) e l'angolo nella (1.67) bisogna rimuovere l'ambiguità sulla scelta di  $L_p$ . Questo è discusso nell'Appendice A.

Si può dimostrare<sup>[8]</sup> che l'elicità è in generale legata alla quantità fisica  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}/|\mathbf{P}|$ , ovvero sia la componente del momento angolare nella direzione del moto. Inoltre dalla (1.66) si vede che essa è una quantità Lorentz-invariante e quindi una particella massless con una definita  $\sigma$  risulta la stessa, a parte l'impulso, in tutti i SRI. Come lo si può intuire dalla (1.66) (poiché c'è il fattore esponenziale dipendente da  $\sigma$ ), questo non implica che lo stato di una particella massless, che in generale è una sovrapposizione di stati di singola particella con  $\sigma$  diverse, sia Lorentz-invariante. Infine, si dimostra<sup>[6]</sup> che il comportamento degli stati di singola particella massless sotto l'azione di  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{T}$  è il seguente:

$$\mathcal{P} |p, \sigma\rangle = \eta_\sigma \exp(\mp i\pi\sigma) |\mathcal{P}p, -\sigma\rangle, \quad (1.69-1)$$

$$\mathcal{T} |p, \sigma\rangle = \xi_\sigma \exp(\pm i\pi\sigma) |\mathcal{T}p, \sigma\rangle, \quad (1.69-2)$$

dove  $\eta_\sigma$  e  $\xi_\sigma$  sono due fattori di fase, i segni  $\mp$  e  $\pm$  sono scelti a seconda che la componente di  $\mathbf{p}$  lungo il secondo asse sia rispettivamente positiva o negativa e dove si è definita l'azione  $\mathcal{P}p = (-\mathbf{p}, p^0)$ . La (1.69-1) mostra che in presenza della  $\mathcal{P}$ -simmetria c'è un legame tra particelle massless a elicità opposta. Poiché l'interazione elettromagnetica è  $\mathcal{P}$ -simmetrica, le particelle massless di elicità  $\pm 1$  associate ai fenomeni elettromagnetici sono entrambe chiamate *fotoni*. Anche l'interazione gravitazionale è  $\mathcal{P}$ -simmetrica e le presunte particelle massless a elicità  $\pm 2$ , candidabili alla descrizione di questa interazione, sono chiamate *gravitoni*.

In letteratura si usa dire che le particelle massless corrispondenti alle RUI  $(0_+, \pm\sigma)$  abbiano "spin  $|\sigma|$ ". Questo modo di dire risulta poco rigoroso poiché evoca l'idea di particelle massless con proprietà tipiche delle particelle per cui è ben definito il concetto di spin (e.g. le particelle della classe  $(m_+)$ ) che, tra l'altro, non è in generale una quantità Lorentz-invariante<sup>[9]</sup>. Pertanto, come previsto dallo studio fatto sulle simmetrie interne spaziotemporali, le particelle massless non possiedono affatto spin, ma elicità. È per tale ragione che sarebbe preferibile, per non creare confusione, parlare esclusivamente di elicità nel caso di particelle massless. Talvolta però, si continua a usare il termine "spin" per riferirsi al valore assoluto dell'elicità.

# Capitolo 2

## Teoria dello scattering e matrice S

Lo scopo di questo capitolo è quello di utilizzare i risultati del [Capitolo 1](#) per poter introdurre gli elementi costitutivi di una teoria dello scattering quantistico in regime relativistico. Si definirà la matrice di scattering, detta *matrice S*, e si discuterà del suo comportamento sotto trasformazioni di Lorentz<sup>[6]</sup>. In seguito, si approfondirà il caso di un processo di scattering in cui venga emessa una particella massless a elicità intera<sup>[2,23]</sup>. Tutto ciò getta le basi per una comprensione embrionale dello spirito su cui si fonda la *teoria della matrice S*<sup>[24,25]</sup> e, in particolare, dell'assunzione di Lorentz-invarianza della matrice S nell'articolo di S. Weinberg<sup>[2]</sup> discusso specificatamente nel [Capitolo 4](#).

### 2.1 Stati "in" e stati "out"

Gli esperimenti riguardanti processi di scattering sono la più importante tecnica sperimentale per esplorare la struttura della materia. Un esperimento di questo tipo può essere diviso in tre fasi.

- (i) In un primo momento, le particelle *preparate* negli acceleratori iniziano ad avvicinarsi partendo da distanze spaziali macroscopicamente grandi. Esse possono essere considerate libere e lo stato del sistema *apparirà*<sup>‡</sup>, rispetto a un certo SRI, come il prodotto tensore di stati di singola particella libera:

$$|\psi_\alpha\rangle \equiv |\psi_{p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots}\rangle = \otimes_i |p_i, \sigma_i, n_i\rangle, \quad (2.1)$$

dove con i pedici 1, 2, ... si numerano le particelle,  $\sigma_i$  è lo spin nel caso di particelle massive o l'elicità nel caso delle massless e l'indice aggiuntivo  $n$  individua la specie della particella, cioè il valore della sua massa, carica, etc. Gli stati (2.1) sono normalizzati come visto nella (1.43):

$$\langle \psi_{\alpha'} | \psi_\alpha \rangle = \delta(\alpha' - \alpha) \equiv \delta^3(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1) \delta_{\sigma'_1 \sigma_1} \delta_{n'_1 n_1} \delta^3(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2) \delta_{\sigma'_2 \sigma_2} \delta_{n'_2 n_2} \dots \quad (2.2)$$

In accordo con la (1.36) e la (1.48), sotto l'azione di una generica TLR, esprimibile nello spazio di Hilbert come  $U(\Lambda, a) = U(1, a)U(\Lambda, 0)$ , lo stato (2.1) si

---

<sup>‡</sup>L'utilizzo del termine "*apparire*" sarà chiarito nelle successive pagine.

trasforma come:

$$\begin{aligned}
U(\Lambda, a) |\psi_{p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots}\rangle &= \exp(-ia_\mu((\Lambda p_1)^\mu + (\Lambda p_2)^\mu + \dots)) \times \\
&\times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots}} \sum_{\sigma'_1, \sigma'_2, \dots} D_{\sigma'_1 \sigma_1}(W(\Lambda, p_1)) D_{\sigma'_2 \sigma_2}(W(\Lambda, p_2)) \dots \times \\
&\times |\psi_{\Lambda p_1, \sigma'_1, n_1; \Lambda p_2, \sigma'_2, n_2; \dots}\rangle.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Gli stati  $|\psi_\alpha\rangle$  così definiti sono autostati dell'operatore  $H \equiv P_1^0 + P_2^0 + \dots$ . Infatti, prendendo una trasformazione di Poincaré che corrisponda a una traslazione temporale di  $a^\mu = (0, 0, 0, \tau)^T$ , cioè  $U(\Lambda, a) = \exp(iH\tau)^\ddagger$ , la (2.3) implica:

$$H |\psi_\alpha\rangle = E_\alpha |\psi_\alpha\rangle, \tag{2.4}$$

con:

$$E_\alpha = p_1^0 + p_2^0 + \dots \tag{2.5}$$

Il fatto che i particolari autovalori  $E_\alpha$  siano una somma di energie di singola particella e non contengano termini energetici di interazione, che coinvolgerebbero più di una particella alla volta contemporaneamente, conferma nuovamente che la regola di trasformazione (2.3) sia applicabile solo quando le particelle, per un motivo o per un altro, non interagiscono fra loro.

- (ii) Nella seconda fase le particelle si avvicinano sempre di più e si apprestano ad interagire. L'interazione avviene su scale spaziali microscopicamente piccole e in intervalli temporali  $\delta t_{int.}$  così piccoli da risultare praticamente inosservabili. Le informazioni fisiche sulla natura dell'interazione, generalmente, non possono essere dedotte da questa fase, poiché in essa lo sperimentatore non è in grado di seguire in modo dettagliato il concatenarsi degli eventi. C'è dunque bisogno di trovare un modo di ricavare le informazioni per via indiretta.
- (iii) Nell'ultima fase, i prodotti dell'interazione si allontanano su distanze macroscopicamente grandi e per questo *appariranno*, rispetto a un certo SRI, nuovamente come particelle libere che rispettano la (2.3). È in questo momento che si effettuano le misure facendo viaggiare i prodotti attraverso sensibili apparati strumentali.

La teoria dello scattering si basa sullo studio delle fasi agevolmente osservabili (i) e (iii) e delle loro relazioni; con le informazioni ricavate da queste si vuole trarre conoscenza sulla fase (ii). Per le notazioni introdotte, la somma sugli stati si scriverà come:

$$\sum_{n_1, \sigma_1, n_2, \sigma_2, \dots} \int d^3 p_1 d^3 p_2 \dots \equiv \int d\alpha. \tag{2.6}$$

È irrealistica la situazione in cui il sistema venga preparato in un particolare stato (2.1) o che dopo l'interazione appaia come tale. Inoltre, gli stati di scattering sono in generale autostati impropri dell'hamiltoniana. Per queste due ragioni, a rigore, si

---

<sup>‡</sup>È fondamentale concettualmente non confondere l'operazione di traslazione temporale con quella di evoluzione dinamica.

dovrebbe avere a che fare con pacchetti d'onde, cioè sovrapposizioni di stati di singola particella, piuttosto che singoli stati del tipo (2.1):

$$\int d\alpha g(\alpha) |\psi_\alpha\rangle, \quad (2.7)$$

con l'ampiezza  $g(\alpha)$  che è funzione sufficientemente regolare e non nulla in un certo intervallo finito  $\Delta E$  di energie.

Affinché il formalismo che si adotta sia Lorentz-invariante in modo evidente, in questo studio, ma più in generale nelle teorie quantistico-relativistiche, si preferisce lavorare nella *rappresentazione di Heisenberg*: gli stati non cambiano nel tempo e così un vettore di stato  $|\psi\rangle$  descrive l'intera storia spaziotemporale del sistema. Tuttavia, implicita nella definizione di stato è contenuta la scelta del SRI da cui guardare il sistema. Ciò consente di dare un senso a cosa significhino i limiti  $\tau \rightarrow \pm\infty$  anche se lo stato non dipende dal tempo. In particolare, sia  $\mathcal{O}$  un osservatore inerziale che regoli il proprio orologio facendo coincidere a  $t = 0$  un qualsiasi istante del processo di scattering e sia  $\mathcal{O}'$  un altro osservatore, in quiete rispetto al primo, che faccia corrispondere, al tempo  $t' = 0$ , il tempo  $t = \tau$ , facendo così risultare  $t' = t - \tau$ . I due osservatori sono *equivalenti*, ma ciò non significa che vedano lo *stesso* vettore di stato. Difatti, se  $\mathcal{O}$  vede il sistema nello stato  $|\psi\rangle$ , allora  $\mathcal{O}'$  lo vedrà nello stato  $\exp(-iH\tau)|\psi\rangle$ , dove si è fatto agire l'operatore di traslazione temporale. Ora è esplicito il fatto che nella definizione stessa degli stati è velata la scelta di un certo SRI. Pertanto, per capire come *appare* lo stato ad  $\mathcal{O}$  molto prima o molto dopo l'interazione, basta applicare l'operatore di traslazione temporale  $\exp(-iH\tau)$  (cioè fare l'osservazione) facendone il limite per  $\tau \rightarrow -\infty$  e  $\tau \rightarrow +\infty$ , rispettivamente.

Per concretizzare la trattazione, si supponga di poter dividere il generatore delle traslazioni temporali  $H$  in due termini: un'hamiltoniana libera  $H^{(0)}$  e un'interazione  $V$ , in modo che  $H = H^{(0)} + V$ . Si richieda, inoltre, che l'hamiltoniana libera  $H^{(0)}$  abbia lo stesso spettro dell'hamiltoniana completa  $H = H^{(0)} + V^\ddagger$ . Questa è apparentemente una condizione molto stringente, ma in realtà, per un'ampia classe di teorie relativistiche, risulta essere facilmente verificata (per degli esempi e un approfondimento si veda il testo di T. D. Lee<sup>[26]</sup>). Si può intuire che risulta essere una condizione particolarmente ragionevole quando il processo di scattering è di tipo elastico o quando il potenziale sia tale da andare, a grandi distanze dal centro d'interazione, adiabaticamente a zero, cosicché la  $H$  si riduca adiabaticamente ad  $H^{(0)}$  e ne condivida lo spettro. In accordo con questa richiesta e con la (2.4), si può scrivere:

$$H^{(0)} |\phi_\alpha\rangle = E_\alpha |\phi_\alpha\rangle, \quad (2.8-1)$$

$$\langle \phi_\alpha | \phi_{\alpha'} \rangle = \delta(\alpha - \alpha'). \quad (2.8-2)$$

Per come sono stati introdotti nel [Capitolo 1](#), gli stati di singola particella libera forniscono una rappresentazione del gruppo di Poincaré ristretto, si può perciò definire

---

<sup>‡</sup>Affinché ciò sia valido bisogna scegliere in  $H^{(0)}$  le masse che siano quelle fisiche che vengono realmente misurate nel sistema interagente.

un operatore unitario  $U^{(0)}(\Lambda, a)$  che trasformi gli stati  $|\phi_\alpha\rangle$  come nella (2.3):

$$\begin{aligned} U^{(0)}(\Lambda, a) \left| \phi_{p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots} \right\rangle &= \exp(-ia_\mu((\Lambda p_1)^\mu + (\Lambda p_2)^\mu + \dots)) \times \\ &\times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots}} \sum_{\sigma'_1, \sigma'_2, \dots} D_{\sigma'_1 \sigma_1}(W(\Lambda, p_1)) D_{\sigma'_2 \sigma_2}(W(\Lambda, p_2)) \dots \times \\ &\times \left| \phi_{\Lambda p_1, \sigma'_1, n_1; \Lambda p_2, \sigma'_2, n_2; \dots} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si definiscono gli stati entranti  $|\psi_\alpha^+\rangle$  "in" e quelli uscenti  $|\psi_\alpha^-\rangle$  "out" come quegli autostati di  $H$  di autovalore  $E_\alpha$  che *appaiano*, a tempi  $\tau \rightarrow -\infty$  e  $\tau \rightarrow +\infty$ , rispettivamente, come autostati di  $H^{(0)}$  di energia  $E_\alpha$ . Formalmente essi verificano<sup>‡</sup>:

$$H |\psi_\alpha^\pm\rangle = E_\alpha |\psi_\alpha^\pm\rangle, \quad (2.10-1)$$

$$\exp(-iH\tau) \int d\alpha g(\alpha) |\psi_\alpha^\pm\rangle \xrightarrow{\tau \rightarrow \mp\infty} \exp(-iH^{(0)}\tau) \int d\alpha g(\alpha) |\phi_\alpha\rangle. \quad (2.10-2)$$

Dalle definizioni appena date, si capisce che degli stati  $|\psi_\alpha^+\rangle$  si conosce come essi appaiano "in ingresso" a  $\tau \rightarrow -\infty$ , ma nulla si sa su come essi appaiano "in uscita" a  $\tau \rightarrow +\infty$ . Viceversa, per gli stati  $|\psi_\alpha^-\rangle$  si conosce come essi appaiano "in uscita" a  $\tau \rightarrow +\infty$ , ma nulla si sa su come appaiano "in ingresso" a  $\tau \rightarrow -\infty$ . Quando la sovrapposizione di autostati dell'hamiltoniana  $H$  nella (2.10-2) è regolare, essa consente di riscrivere la definizione di stati "in" e "out" nell'espressione formale:

$$|\psi_\alpha^\pm\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \mp\infty} \Omega(\tau) |\phi_\alpha\rangle \equiv \Omega(\mp\infty) |\phi_\alpha\rangle, \quad (2.11)$$

con:

$$\Omega(\tau) \equiv \exp(+iH\tau) \exp(-iH^{(0)}\tau). \quad (2.12)$$

Dalla (2.10-2) è immediato dimostrare<sup>[6]</sup> che:

$$\langle \psi_\beta^\pm | \psi_\alpha^\pm \rangle = \langle \phi_\beta | \phi_\alpha \rangle = \delta(\beta - \alpha). \quad (2.13)$$

Si noti dunque che gli stati "in" e "out" formano due differenti basi per lo stesso spazio di Hilbert. Ogni stato "in" ("out") è sviluppabile in una sovrapposizione di stati "out" ("in"). Se non ci fossero interazioni, cioè  $V = 0$ , gli stati "in" e "out" coinciderebbero. Anche gli stati "in" ("out") forniscono una rappresentazione del gruppo di Poincaré, basti pensare a come appaiono a  $\tau \rightarrow -\infty$  ( $\tau \rightarrow +\infty$ ); per questo motivo, si può sempre definire un operatore unitario  $U^+(\Lambda, a)$  ( $U^-(\Lambda, a)$ ) che induca la trasformazione (2.3) su questi:

$$\begin{aligned} U^\pm(\Lambda, a) \left| \psi_{p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots}^\pm \right\rangle &= \exp(-ia_\mu((\Lambda p_1)^\mu + (\Lambda p_2)^\mu + \dots)) \times \\ &\times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots}} \sum_{\sigma'_1, \sigma'_2, \dots} D_{\sigma'_1 \sigma_1}(W(\Lambda, p_1)) D_{\sigma'_2 \sigma_2}(W(\Lambda, p_2)) \dots \times \\ &\times \left| \psi_{\Lambda p_1, \sigma'_1, n_1; \Lambda p_2, \sigma'_2, n_2; \dots}^\pm \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.14)$$

<sup>‡</sup>In maniera altrettanto formale si possono definire come soluzioni delle *equazioni di Lippmann-Schwinger*, evitando così tutti i processi di limite  $\tau \rightarrow \pm\infty$ <sup>[4,6]</sup>.

## 2.2 Matrice S e simmetria di Lorentz

Fisicamente, per ricavare informazioni sulla fase (ii) dalle fasi (i) e (iii) descritte nel precedente paragrafo, bisogna studiare le probabilità di transizione tra possibili stati "in"  $|\psi_\alpha^+\rangle$  e possibili stati "out"  $|\psi_{\alpha'}^-\rangle$ . A tal proposito, si definiscono gli elementi della *matrice S* come le ampiezze di probabilità per la transizione  $\alpha \rightarrow \alpha'$ :

$$S_{\alpha'\alpha} \equiv \langle \psi_{\alpha'}^- | \psi_\alpha^+ \rangle. \quad (2.15)$$

La matrice  $S$  ha per elementi i prodotti interni di due set di stati ortonormali, cioè  $\{|\psi_\alpha^+\rangle\}$  e  $\{|\psi_{\alpha'}^-\rangle\}$ , e per questo è evidentemente unitaria<sup>[6]</sup>, ovvero:

$$SS^\dagger = S^\dagger S = 1. \quad (2.16)$$

Si può definire l'operatore  $\hat{S}$  come quello i cui elementi di matrice tra stati di *particella libera*  $|\phi_\alpha\rangle$  restituiscono proprio gli elementi  $S_{\alpha'\alpha}$  della matrice S:

$$\langle \phi_{\alpha'} | \hat{S} | \phi_\alpha \rangle \equiv S_{\alpha'\alpha} \quad (2.17)$$

Si osservi che se il potenziale  $V$  fosse sempre identicamente nullo, gli stati "in" e "out" coinciderebbero e questo porterebbe ad avere  $S_{\alpha'\alpha} = \delta(\alpha' - \alpha)$ . Sicché, il tasso di reazione per il processo  $\alpha \rightarrow \alpha'$  è legato alla quantità  $|S_{\alpha'\alpha} - \delta(\alpha' - \alpha)|^2$  o, in termini operatoriali,  $|\langle \phi_{\alpha'} | (\hat{S} - 1) | \phi_\alpha \rangle|^2$ .

Ricordando l'espressione formale (2.11) per  $|\psi_\alpha^\pm\rangle$  si può scrivere l'operatore  $\hat{S}$  anche nel seguente modo:

$$\hat{S} = \Omega^\dagger(+\infty)\Omega(-\infty) \equiv U_I(\tau \rightarrow +\infty, \tau_0 \rightarrow -\infty) \quad (2.18)$$

dove, per mezzo delle (2.12), risulta:

$$U_I(\tau, \tau_0) = \exp\left(iH^{(0)}\tau\right) \exp\left(-iH(\tau - \tau_0)\right) \exp\left(-iH^{(0)}\tau_0\right). \quad (2.19)$$

La relazione (2.18) lascia presagire il legame che sussiste tra la matrice S e l'evolvente temporale e più in generale con quello che, nel [Capitolo 3](#), sarà chiamato *propagatore*. Infatti, differenziando rispetto a  $\tau$  la (2.19), si ottiene:

$$i\frac{d}{d\tau}U_I(\tau, \tau_0) = V_I(\tau)U_I(\tau, \tau_0), \quad (2.20)$$

con:

$$V_I(t) \equiv \exp\left(iH^{(0)}t\right)V\exp\left(-iH^{(0)}t\right). \quad (2.21)$$

L'equazione (2.20) è proprio l'equazione soddisfatta dall'evolvente temporale degli stati nella *rappresentazione d'interazione*<sup>[5]</sup> (ecco giustificato il pedice "I"). Con la condizione iniziale  $U_I(\tau_0, \tau_0) = 1$  essa è soddisfatta dalla ben nota soluzione formale chiamata *serie di Feynman-Dyson*:

$$U_I(\tau, \tau_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{\tau_0}^{\tau} dt_1 dt_2 \dots dt_n \mathcal{T}_{ord} \{V_I(t_1) \dots V_I(t_n)\} \quad (2.22)$$

da cui, ponendo  $\tau_0 = +\infty$  e  $\tau = -\infty$ , si ottiene lo sviluppo perturbativo per  $\hat{S}$ :

$$\hat{S} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \dots dt_n \mathcal{T}_{ord} \{V_I(t_1) \dots V_I(t_n)\}. \quad (2.23)$$

Con  $\mathcal{T}_{ord}$  si è indicata l'operazione di ordinamento temporale. Essa agisce come:

$$T \{V_I(t)\} = V_I(t), \quad (2.24-1)$$

$$T \{V_I(t_1)V_I(t_2)\} = \Theta(t_1 - t_2)V_I(t_1)V_I(t_2) + \Theta(t_2 - t_1)V_I(t_2)V_I(t_1) \quad (2.24-2)$$

e così via. Con  $\Theta(t)$  si è indicata la funzione gradino di Heaviside. Se si suppone di poter scrivere il potenziale come:

$$V_I(t) = \int d^3x \mathcal{H}_I(\mathbf{x}, t), \quad (2.25)$$

con  $\mathcal{H}_I(x)$  che è uno scalare, allora la (2.23) diviene:

$$\hat{S} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n \mathcal{T}_{ord} \{\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_n)\}. \quad (2.26)$$

Al fine di avere delle probabilità che siano quantità osservabili Lorentz-invarianti si richiede che per una TLR, tenendo a mente le trasformazioni (2.14), debba valere:

$$\left| \langle \psi_{\alpha'}^- | \psi_{\alpha}^+ \rangle \right|^2 = \left| \langle U^-(\Lambda, a) \psi_{\alpha'}^- | U^+(\Lambda, a) \psi_{\alpha}^+ \rangle \right|^2. \quad (2.27)$$

Questa condizione è spesso rimpiazzata dalla più stringente:

$$\langle \psi_{\alpha'}^- | \psi_{\alpha}^+ \rangle = \langle U^-(\Lambda, a) \psi_{\alpha'}^- | U^+(\Lambda, a) \psi_{\alpha}^+ \rangle^{\ddagger}. \quad (2.28)$$

Per avere una teoria che sia Lorentz-invariante bisogna allora richiedere che questi operatori unitari soddisfino la condizione  $U^+(\Lambda, a) = U^-(\Lambda, a)$ . Indicando questo stesso operatore con  $U(\Lambda, a) \equiv U^{\pm}(\Lambda, a)$ , si può allora scrivere:

$$S_{\alpha'\alpha} = \langle \psi_{\alpha'}^- | \psi_{\alpha}^+ \rangle = \langle U(\Lambda, a) \psi_{\alpha'}^- | U(\Lambda, a) \psi_{\alpha}^+ \rangle. \quad (2.29)$$

Inserendo la (2.14) con  $U^+(\Lambda, a) = U^-(\Lambda, a)$  nella (2.29), si riescono a trovare espressamente le proprietà di covarianza della matrice S:

$$\begin{aligned} & S_{p'_1, \sigma'_1, n'_1; p'_2, \sigma'_2, n'_2; \dots, p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots} = \\ & = \exp \left( i a_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} (p_1^{\nu} + p_2^{\nu} + \dots - p_1^{\nu} + p_2^{\nu} - \dots) \right) \times \\ & \times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots (\Lambda p'_1)^0 (\Lambda p'_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots p'_1{}^0 p'_2{}^0 \dots}} \times \\ & \times \sum_{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots} D_{\bar{\sigma}_1 \sigma_1}(W(\Lambda, p_1)) D_{\bar{\sigma}_2 \sigma_2}(W(\Lambda, p_2)) \dots \times \\ & \times \sum_{\bar{\sigma}'_1, \bar{\sigma}'_2, \dots} D_{\bar{\sigma}'_1 \sigma'_1}^*(W(\Lambda, p'_1)) D_{\bar{\sigma}'_2 \sigma'_2}^*(W(\Lambda, p'_2)) \dots \times \\ & \times S_{\Lambda p'_1, \bar{\sigma}'_1, n'_1; \Lambda p'_2, \bar{\sigma}'_2, n'_2; \dots, \Lambda p_1, \bar{\sigma}_1, n_1; \Lambda p_2, \bar{\sigma}_2, n_2; \dots}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

<sup>‡</sup>Questa condizione più stringente è di solito un'assunzione, ma si può dimostrare che nel caso di spazi con topologie banali, com'è il caso di interesse dello spaziotempo  $\mathcal{M}$ , essa è proprio equivalente alla condizione fisica (2.27).

Dalla (2.30) è immediato vedere che le transizioni  $\alpha \rightarrow \alpha'$  consentite sono solo quelle in cui si conserva il quadrimpulso. Infatti, il secondo membro della (2.30) non può dipendere da  $a_\mu$  poiché il primo membro non vi dipende. Per questa ragione tutti gli elementi di S, per  $\alpha' \neq \alpha$ , devono essere nulli a meno che non risulti:

$$p_1^{\nu'} + p_2^{\nu'} + \dots - p_1^\nu + p_2^\nu - \dots = 0 \Rightarrow p_{\alpha'} = p_\alpha. \quad (2.31)$$

Si può quindi scrivere l'elemento di matrice S come:

$$S_{\alpha'\alpha} = \delta(\alpha' - \alpha) - 2\pi i M_{\alpha'\alpha} \delta^4(p_{\alpha'} - p_\alpha), \quad (2.32)$$

dove la  $\delta(\alpha' - \alpha)$  tiene conto del fatto che possa non avvenire scattering e  $M_{\alpha'\alpha}$  è una certa ampiezza che si dimostra contenere termini con ulteriori delta di Dirac<sup>[6]</sup>. Ciò fa già intuire che gli elementi della matrice S in generale non siano delle funzioni ordinarie, ma delle distribuzioni<sup>‡</sup>.

Si osservi invece che, per l'operatore  $\hat{S}$ , l'espressione (2.26) è manifestamente Lorentz-invariante, meno che per l'ordinamento temporale del prodotto di operatori  $\mathcal{H}_I$ <sup>[6]</sup>. Due eventi  $x_1$  e  $x_2$  nello spaziotempo hanno ordinamento temporale sempre Lorentz-invariante tranne che nella situazione in cui  $(x_1 - x_2)$  è di tipo spazio, cioè  $(x_1 - x_2)^2 > 0$ . Dunque, una condizione sufficiente affinché l'ordinamento temporale nella (2.26) possa essere fatto senza dover specificare un particolare SRI è quella chiamata "*condizione di microcausalità*" per  $\mathcal{H}_I$  secondo cui gli operatori  $\mathcal{H}_I(x)$  commutano tra loro a distanze di tipo-spazio:

$$\left[ \mathcal{H}_I(x), \mathcal{H}_I(x') \right] = 0 \quad \forall x, x' : (x - x')^2 > 0. \quad (2.33)$$

Da questo si capisce che richiedere la Lorentz-invarianza della matrice S implica, in qualche modo, il dover imporre una condizione di causalità.

La (2.30) dovrebbe essere assunta come definizione di Lorentz-invarianza della matrice S e non come teorema, dal momento che solamente per particolari scelte dell'hamiltoniana esiste un operatore unitario  $U(\Lambda, a)$  che agisca allo stesso modo sugli stati "in" e su quelli "out"<sup>[6]</sup>. La (2.30) è una delle assunzioni sulla matrice S che funge come punto di partenza per sviluppare una pura *teoria della matrice S* come possibile teoria delle particelle elementari. Una siffatta teoria si prefigge di allontanarsi dalle teorie quantistiche di campo locali, sostituendo i postulati di queste con delle assunzioni sulla matrice S quali l'unitarietà, l'invarianza di Lorentz e particolari proprietà di analiticità. L'idea alla base è cercare di costruire la matrice S in modo diretto imponendo sui suoi elementi i vincoli dettati da queste assunzioni. Negli anni '50 e '60 del secolo scorso si è intensificata la ricerca in questa direzione e ci sono stati importanti contributi nei quali si è mostrato come, trovando un'espressione della matrice S (per esempio attraverso la teoria delle perturbazioni) e imponendone le caratteristiche suddette, si possano dimostrare degli importanti risultati di fisica fondamentale: è il caso del *teorema CPT* e del *teorema di connessione spin-statistica*<sup>[28]</sup>, delle *equazioni di Maxwell* e delle *equazioni di Einstein*<sup>[29]</sup>, delle *regole di Feynman*<sup>[30,31]</sup>, della *conservazione della carica*<sup>[2]</sup>, dell'*invarianza di gauge* e del *principio di equivalenza*<sup>[2,32]</sup> etc. Ciononostante, questa teoria ha avuto ed ha serie difficoltà nell'individuazione del set minimale di assunzioni su cui fondarsi e svilupparsi. Per questa ed altre ragioni

<sup>‡</sup>Per un approfondimento di ciò si veda Appendix I dell'articolo di D. Iagolnitzer E H. P. Stapp<sup>[27]</sup>.

ripercorse nel discorso "What is Quantum Field Theory, and What Did We Think It Is?"<sup>[33]</sup> di S. Weinberg, il programma di costruzione di una teoria pura della matrice S è stato rimpiazzato da altri programmi teorici che si fondano sulle teorie quantistiche di campo e cercano di inserire o ritrovare in queste ultime degli aspetti della teoria della matrice S.

## 2.3 Matrice S per l'emissione di una particella $(0_+, \pm\sigma)$

Si consideri un processo di scattering  $\alpha \rightarrow \alpha'$  in cui viene *emessa* una particella massless con quadrimpulso  $q = (\mathbf{q}, |\mathbf{q}|)^T$  a elicità  $\pm\sigma$  (con  $\sigma \geq 0$ ). Indicando con  $p$  tutte le variabili riguardanti le altre particelle coinvolte (supposte essere, per semplicità, delle particelle *scalari*, cioè con rappresentazione banale  $D(\Lambda) = 1$ ) e con  $S_{\pm\sigma}(\mathbf{q}, p)$  gli elementi della matrice S, la regola di trasformazione (2.30), in accordo con la (1.65) e la (1.68-2), può essere scritta in un nuovo formalismo<sup>[2]</sup>:

$$S_{\pm\sigma}(\mathbf{q}, p) = \sqrt{\frac{|\Lambda\mathbf{q}|}{|\mathbf{q}|}} \exp(\pm i\sigma\theta(\Lambda, \mathbf{q})) S_{\pm\sigma}(\Lambda\mathbf{q}, \Lambda p). \quad (2.34)$$

con  $\theta(\Lambda, \mathbf{q}) \equiv \theta(\tilde{W}(\Lambda, \mathbf{q}))$  definito come:

$$\theta(\tilde{W}(\Lambda, \mathbf{q})) \equiv \theta(L^{-1}(\mathbf{q})\Lambda^{-1}L(\Lambda\mathbf{q})). \quad (2.35)$$

Una conseguenza della (2.34) è che, nel caso di valori di  $\sigma$  interi, è sempre possibile scrivere gli elementi  $S_{\pm\sigma}(\mathbf{q}, p)$  della matrice S come il prodotto di "vettori" polarizzazione  $\epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{\mathbf{q}})$  (che non sono dei quadrivettori, si veda l'Appendice A.2) per un tensore simmetrico detto "funzione  $M$ " o "ampiezza  $M$ " (si veda l'Appendice A.3):

$$S_{\pm\sigma}(\mathbf{q}, p) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{q}|}} \epsilon_{\pm}^{\mu_1*}(\hat{\mathbf{q}}) \dots \epsilon_{\pm}^{\mu_\sigma*}(\hat{\mathbf{q}}) M_{\pm\mu_1 \dots \mu_\sigma}(\mathbf{q}, p)^{\ddagger}. \quad (2.36)$$

Le leggi di trasformazione di  $\epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{\mathbf{q}})$  e  $M(\mathbf{q}, p)$  sono le seguenti (Appendice A.2 e A.3):

$$\left( \Lambda_{\nu}^{\mu} - \frac{q^{\mu}}{|\mathbf{q}|} \Lambda_{\nu}^0 \right) \epsilon_{\pm}^{\nu}(\Lambda\hat{\mathbf{q}}) = \exp(\pm i\theta(\Lambda, \mathbf{q})) \epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{\mathbf{q}}), \quad (2.37-1)$$

$$M_{\pm\mu_1 \dots \mu_\sigma}(\mathbf{q}, p) = \Lambda_{\nu_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{\nu_\sigma}^{\mu_\sigma} M_{\pm\nu_1 \dots \nu_\sigma}(\Lambda\mathbf{q}, \Lambda p). \quad (2.37-2)$$

Bisogna ora capire sotto quali condizioni la forma (2.36) degli elementi  $S_{\pm\sigma}(\mathbf{q}, p)$  possa restituire la corretta regola di trasformazione di Lorentz (2.34) per la matrice S. Inserendo le (2.37) nella (2.36) si può trovare la legge di trasformazione della  $S_{\pm\sigma}(\mathbf{q}, p)$ :

$$S_{\pm\sigma}(\mathbf{q}, p) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{q}|}} \exp(\pm i\theta(\Lambda, \mathbf{q})) \left[ \epsilon_{\pm}^{\mu_1}(\Lambda\hat{\mathbf{q}}) - \frac{(\Lambda q)^{\mu_1}}{|\mathbf{q}|} \Lambda_{\nu}^0 \epsilon_{\pm}^{\nu}(\Lambda\hat{\mathbf{q}}) \right]^* \times \dots \quad (2.38)$$

$$\dots \times \left[ \epsilon_{\pm}^{\mu_\sigma}(\Lambda\hat{\mathbf{q}}) - \frac{(\Lambda q)^{\mu_\sigma}}{|\mathbf{q}|} \Lambda_{\nu}^0 \epsilon_{\pm}^{\nu}(\Lambda\hat{\mathbf{q}}) \right]^* M_{\pm\mu_1 \dots \mu_\sigma}(\Lambda\mathbf{q}, \Lambda p).$$

<sup>‡</sup>A volte, in letteratura, si utilizza la notazione  $\epsilon_{\pm}^{\mu_1}(\hat{\mathbf{q}}) \dots \epsilon_{\pm}^{\mu_\sigma}(\hat{\mathbf{q}}) \equiv \epsilon_{\pm}^{\mu_1, \dots, \mu_\sigma}(\hat{\mathbf{q}})$ .

Considerando una TLR infinitesima  $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$  (con  $\omega$  infinitesimo) la (2.38) diviene:

$$S_{\pm\sigma}(\mathbf{q}, p) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{q}|}} \exp(\pm i\theta(\Lambda, \mathbf{q})) \times \\ \times \prod_{n=1, \dots, \sigma} \left[ \epsilon_{\pm}^{\mu_n}(\Lambda \hat{\mathbf{q}}) - \frac{(q + \omega q)^{\mu_n}}{|\mathbf{q}|} (\delta_\nu^0 + \omega_\nu^0) \epsilon_{\pm}^{\nu}(\Lambda \hat{\mathbf{q}}) \right]^* \times \\ \times M_{\pm\mu_1 \dots \mu_\sigma}(\Lambda \mathbf{q}, \Lambda p). \quad (2.39)$$

Essendo  $\epsilon_{\pm}^0(\hat{\mathbf{q}}) = 0$  per la (A.9-4), i termini in  $\delta_\nu^0 \epsilon_{\pm}^{\nu}(\Lambda \hat{\mathbf{q}})$  sono tutti nulli. Inoltre, si trascurano i termini in  $(\omega q)^{\mu_n} \omega_\nu^0 \epsilon_{\pm}^{\nu}(\Lambda \hat{\mathbf{q}})$  poiché essi sono di ordine superiore al primo nel parametro infinitesimo  $\omega$ . Si può dunque fare una prima semplificazione della (2.39) in:

$$S_{\pm\sigma}(\mathbf{q}, p) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{q}|}} \exp(\pm i\theta(\Lambda, \mathbf{q})) \times \\ \times \prod_{n=1, \dots, \sigma} \left[ \epsilon_{\pm}^{\mu_n}(\Lambda \hat{\mathbf{q}}) - \frac{(q)^{\mu_n}}{|\mathbf{q}|} (\omega_\nu^0) \epsilon_{\pm}^{\nu}(\Lambda \hat{\mathbf{q}}) \right]^* \times \\ \times M_{\pm\mu_1 \dots \mu_\sigma}(\Lambda \mathbf{q}, \Lambda p). \quad (2.40)$$

Trascurando tutti i termini di ordine superiore al primo nel parametro  $\omega$ , allora nella (2.40) non restano tutti i possibili prodotti, ma solamente:

- uno in cui è presente il prodotto di tutte le  $\epsilon_{\pm}^{\mu_n^*}(\Lambda \hat{\mathbf{q}})$ , cioè:

$$\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{q}|}} \exp(\pm i\theta(\Lambda, \mathbf{q})) \epsilon_{\pm}^{\mu_1^*}(\Lambda \hat{\mathbf{q}}) \dots \epsilon_{\pm}^{\mu_\sigma^*}(\Lambda \hat{\mathbf{q}}) M_{\pm\mu_1 \dots \mu_\sigma}(\Lambda \mathbf{q}, \Lambda p), \quad (2.41)$$

che, confrontato con la (2.36), restituisce proprio l'elemento di matrice trasformato  $\sqrt{\frac{|\Lambda \mathbf{q}|}{|\mathbf{q}|}} \exp(\pm i\theta(\Lambda, \mathbf{q})) S_{\pm\sigma}(\Lambda \mathbf{q}, \Lambda p)$ ;

- una somma algebrica di  $\sigma$  prodotti in cui ci sono tutte le  $\epsilon_{\pm}^{\mu_n^*}(\Lambda \hat{\mathbf{q}})$  tranne, alternativamente, una, per esempio la  $j$ -esima, al cui posto c'è  $\omega_\nu^0 \epsilon_{\pm}^{\nu^*}(\Lambda \hat{\mathbf{q}}) q^{\mu_j}$ . Questi prodotti sono uguali tra loro per via della proprietà di simmetria del tensore  $M_{\pm\mu_1 \dots \mu_\sigma}(\Lambda \mathbf{q}, \Lambda p)$  che consente di scambiare gli indici muti. Inoltre, particolarizzando le (2.37) a questa TLR infinitesima e sostituendole in questi prodotti, si riescono a far comparire le  $\epsilon_{\pm}^{\mu_n^*}(\hat{\mathbf{q}})$  e  $M_{\pm\mu_1 \dots \mu_\sigma}(\mathbf{q}, p)$  piuttosto che le  $\epsilon_{\pm}^{\mu_n^*}(\Lambda \hat{\mathbf{q}})$  e  $M_{\pm\mu_1 \dots \mu_\sigma}(\Lambda \mathbf{q}, \Lambda p)$ . Da tutti questi step si ottiene:

$$-\frac{\sigma}{\sqrt{2|\mathbf{q}|^3}} \omega_\nu^0 \epsilon_{\pm}^{\nu^*}(\hat{\mathbf{q}}) q^{\mu_1} \epsilon_{\pm}^{\mu_2^*}(\hat{\mathbf{q}}) \dots \epsilon_{\pm}^{\mu_\sigma^*}(\hat{\mathbf{q}}) M_{\pm\mu_1 \dots \mu_\sigma}(\mathbf{q}, p). \quad (2.42)$$

Mettendo insieme queste osservazioni, allora, nel formalismo tensoriale, la regola di trasformazione per simmetrie di Lorentz della matrice S (2.38) diventa:

$$S_{\pm\sigma}(\mathbf{q}, p) = \sqrt{\frac{|\Lambda \mathbf{q}|}{|\mathbf{q}|}} \exp(\pm i\theta(\Lambda, \mathbf{q})) S_{\pm\sigma}(\Lambda \mathbf{q}, \Lambda p) + \\ - \frac{\sigma}{\sqrt{2|\mathbf{q}|^3}} \omega_\nu^0 \epsilon_{\pm}^{\nu^*}(\hat{\mathbf{q}}) q^{\mu_1} \epsilon_{\pm}^{\mu_2^*}(\hat{\mathbf{q}}) \dots \epsilon_{\pm}^{\mu_\sigma^*}(\hat{\mathbf{q}}) M_{\pm\mu_1 \dots \mu_\sigma}(\mathbf{q}, p) \quad (2.43)$$

Affinché possa essere ripristinato il corretto comportamento (2.34) della matrice S sotto trasformazioni di Lorentz, nella legge di trasformazione trovata (2.43) c'è bisogno che valga la *condizione di conservazione di M*:

$$q^{\mu_1} \epsilon_{\pm}^{\mu_2*}(\hat{\mathbf{q}}) \dots \epsilon_{\pm}^{\mu_\sigma*}(\hat{\mathbf{q}}) M_{\pm\mu_1\dots\mu_\sigma}(\mathbf{q}, p) = 0. \quad (2.44)$$

La condizione (2.44) implica l'invarianza della matrice S sotto *trasformazioni di gauge* dei vettori polarizzazione<sup>‡</sup>:

$$\epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{\mathbf{q}}) \rightarrow \epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{\mathbf{q}}) + \lambda_{\pm}(\mathbf{q}) q^{\mu}, \quad (2.45)$$

con  $\lambda_{\pm}(\mathbf{q})$  che è una funzione arbitraria.

Per il caso con  $\sigma = 1$  la (2.44) diventa:

$$q_{\mu} M_{\pm}^{\mu}(\mathbf{q}, p) = 0. \quad (2.46)$$

Diversamente, nel caso con  $\sigma = 2$  diviene:

$$\epsilon_{\pm}^{\nu}(\hat{\mathbf{q}}) q^{\mu} M_{\pm\mu\nu}(\mathbf{q}, p) = 0, \quad (2.47)$$

ma, dalla proprietà (A.9-5) per cui  $q_{\mu} \epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{\mathbf{q}}) = 0$ , si capisce subito che la condizione (2.47) si traduce in:

$$q^{\mu} M_{\pm\mu\nu}(\mathbf{q}, p) \propto q_{\nu}. \quad (2.48)$$

Si osservi che, grazie alla proprietà (A.9-2) per cui  $\eta_{\mu\nu} \epsilon_{\pm}^{\nu}(\mathbf{q}) \epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{\mathbf{q}}) = 0$ , sottrarre alla  $M_{\pm\mu\nu}(\mathbf{q}, p)$  un termine proporzionale a  $\eta_{\mu\nu}$  non altera gli elementi della matrice S definiti nella (2.36). Grazie a ciò, è sempre possibile ridefinire la  $M_{\pm\mu\nu}(\mathbf{q}, p)$  (sottraendole un termine proporzionale a  $\eta_{\mu\nu}$ ) in modo che la condizione (2.48) diventi:

$$q^{\mu} M_{\pm\mu\nu}(\mathbf{q}, p) = 0. \quad (2.49)$$

Nel seguito della tesi, si mostrerà come le condizioni di conservazione (2.46) e (2.49), che sono anche dette condizioni di gauge invarianza per la matrice S, siano legate alla *conservazione della carica elettrica* e al *principio di equivalenza*<sup>[2]</sup>.

Quanto visto è facilmente estendibile a processi di emissione e assorbimento di molte particelle massless a elicità intera. Nel caso dell'assorbimento bisogna però far attenzione a rimpiazzare le  $\epsilon_{\pm}^*$  con le  $\epsilon_{\pm}$ <sup>[2]</sup>.

---

<sup>‡</sup>Si è partiti in gauge di Coulomb solo per una questione di convenienza (si veda l'Appendice A.2).

# Capitolo 3

## Teoria dei propagatori

In questo capitolo si dà un'introduzione alla teoria dei propagatori e delle funzioni di Green nella teoria quantistica sia in regime classico<sup>[34]</sup> che relativistico<sup>[35]</sup>. Specificatamente, si approfondirà lo studio del propagatore libero dell'equazione di Schrödinger e del propagatore libero dell'equazione di Klein-Gordon, prescrivendone, per entrambi, una condizione fisica di causalità. Per poter affrontare il problema dello scattering si svilupperà una teoria delle perturbazioni per il propagatore<sup>[34]</sup> e, conseguentemente, per la matrice S. Questo mostrerà che le proprietà di analiticità della matrice S assunte nell'articolo di Weinberg<sup>[2]</sup> (che sarà oggetto di studio nel [Capitolo 4](#)) sono ragionevolmente giustificate poiché esse rispecchiano le proprietà di analiticità del propagatore relativistico. Una trattazione alternativa ed esaustivamente rigorosa può essere sviluppata in teoria quantistica dei campi<sup>[6]</sup>, ma ciò si allontanerebbe dall'obiettivo di una pura teoria della matrice S.

### 3.1 Propagatori causali e funzioni di Green

Così come per ogni altra equazione differenziale lineare a derivate parziali, il problema della risoluzione dell'equazione di Schrödinger con una condizione iniziale può essere ricondotto a quello della risoluzione di un'equazione integrale che contenga, nella sua stessa formulazione, le condizioni iniziali. Per quanto riguarda l'equazione di Schrödinger tempo-dipendente (TDSE), il kernel della relativa equazione integrale sarà qui chiamato *propagatore*, mentre nel caso dell'equazione di Schrödinger tempo-indipendente (TISE) il kernel della corrispondente equazione integrale sarà chiamato *funzione di Green*<sup>‡</sup>. Questi due kernel sono l'uno la trasformata di Fourier dell'altro.

Scegliendo di adottare la *rappresentazione di Schrödinger*, si può scrivere l'evoluzione temporale di uno stato come:

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t') |\psi(t')\rangle, \quad (3.1)$$

dove  $U(t, t')$  è l'operatore unitario di evoluzione temporale che soddisfa l'equazione di Schrödinger:

$$(i\partial_t - H(t)) U(t, t') = 0, \quad (3.2)$$

---

<sup>‡</sup>Non c'è unanimità nella scelta dei due nomi, in molti testi i due termini vengono o confusi o interscambiati. Qui si è deciso di usare quella del testo di riferimento di K. Gottfried e T.M. Yan<sup>[34]</sup>.

con  $H(t)$  che è una generica hamiltoniana tempo-dipendente. Sia  $\mathcal{C}$  lo spazio delle configurazioni del sistema, sia  $\mathbf{r} \equiv (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  un suo punto e sia  $|\mathbf{r}\rangle$  l'autostato simultaneo di tutti gli operatori posizione. Sfruttando la relazione di completezza degli  $|\mathbf{r}\rangle$  si può scrivere l'evoluzione della funzione d'onda con il seguente operatore integrale:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' \langle \mathbf{r} | U(t, t') | \mathbf{r}' \rangle \psi(\mathbf{r}', t'). \quad (3.3)$$

Quest'ultima espressione dà l'evoluzione della funzione d'onda sia nel presente che nel futuro. Per avere un operatore integrale che agisca sulla funzione d'onda iniziale e mi restituisca la funzione d'onda propagata nel futuro, cioè per imporre una cosiddetta *condizione di causalità*, si introduce nella (3.3) il *propagatore "ritardato"*  $K$ , definito come:

$$K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \equiv \Theta(t - t') \langle \mathbf{r} | U(t, t') | \mathbf{r}' \rangle \quad (3.4)$$

dove  $\Theta(t)$  è la funzione gradino di Heaviside. L'evoluzione temporale della funzione d'onda è completamente nota se si conoscono la funzione d'onda  $\psi(\mathbf{r}', t')$  a un certo tempo  $t'$  e il propagatore  $K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ . Questo mostra come la meccanica quantistica sia una teoria *perfettamente causale* e che l'evoluzione temporale della funzione d'onda sia di tipo *deterministico*, così com'è deterministica l'evoluzione temporale in meccanica classica. Tutto ciò è vero a condizione che il sistema non venga perturbato e che su esso non venga effettuata una misura: in questo caso la funzione d'onda evolverebbe in modo imprevedibile, non deterministico, e collasserebbe con una certa probabilità in una delle autofunzioni dell'osservabile che si misura. Dalla definizione stessa è possibile interpretare il propagatore come l'ampiezza di probabilità di trovare il sistema, una volta che questo venga preparato in  $\mathbf{r}'$  al tempo  $t'$ , in un tempo  $t > t'$  nel punto  $\mathbf{r}$ . Questa è, a tutti gli effetti, concepibile come un'ampiezza di probabilità di transizione.

Differenziando rispetto al tempo la (3.4), utilizzando nel secondo membro l'equazione (3.2) e ricordando che  $\frac{d}{dt}\Theta(t) = \delta(t)$  è immediato verificare che il propagatore soddisfa l'equazione:

$$(i\partial_t - H(\mathbf{r}, t)) K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = i\delta(t - t')\delta^{(3N)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.5)$$

dove con  $H(\mathbf{r}, t)$  si è indicata l'hamiltoniana nella rappresentazione delle configurazioni. La (3.5) fa capire perché  $K$  è in molti testi chiamato funzione di Green: esso risolve il *problema fondamentale* della TDSE con la condizione di essere nullo per tempi  $t < t'$ . È importante osservare alcune proprietà del propagatore. Innanzitutto, per via della proprietà dell'evolvente temporale  $U(t, t') \xrightarrow{t \rightarrow t'} 1$ , deve allora risultare:

$$\lim_{t \rightarrow t'} K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \delta^{(3N)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.6)$$

Quindi, il propagatore  $K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$  per  $t > t'$ , può essere pensato come la soluzione  $\psi(\mathbf{r}, t)$  della TDSE con la condizione iniziale in  $t'$  singolare  $\psi(\mathbf{r}, t') = \delta^{(3N)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Inoltre, la proprietà di composizione  $U(t_3, t_1) = U(t_3, t_2)U(t_2, t_1)$  implica che:

$$K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \int d\mathbf{r}'' K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}'', t'') K(\mathbf{r}'', t''; \mathbf{r}', t') \quad t > t'' > t'. \quad (3.7)$$

Infine, denotata con  $D$  la dimensione dello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ , si capisce dalla (3.5) che le dimensioni del propagatore sono  $[K] = L^{-D}$ .

Quando l'hamiltoniana è tempo-indipendente, la trattazione si semplifica particolarmente. L'operatore di evoluzione temporale è  $U(t) = e^{-iH(t-t')}$  e, scegliendo  $t' = 0$ , si può scrivere il propagatore come:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \Theta(t) \langle \mathbf{r} | e^{-iHt} | \mathbf{r}' \rangle \quad (3.8)$$

Sia  $\{|\psi_{n\nu}\rangle\}$  una base formata dalle autofunzioni di  $H$  con energia  $E_n$  e con  $\nu$  che è un indice di degenerazione. Dall'inserzione dell'identità  $1_H = \sum_{n,\nu} |\psi_{n\nu}\rangle \langle \psi_{n\nu}|^\ddagger$  nel propagatore, si ottiene:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \Theta(t) \sum_{n,\nu} e^{-iE_n t} \psi_{n\nu}^*(\mathbf{r}') \psi_{n\nu}(\mathbf{r}). \quad (3.9)$$

Quest'ultima mostra che, nel caso di hamiltoniane  $H$  tempo-indipendenti, il propagatore è una serie di Fourier nel tempo con frequenze legate allo spettro di  $H$ . Una forma alternativa alla (3.9) è la seguente espressione come integrale di Fourier<sup>[34]</sup>:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \frac{i}{2\pi} \int_C dz e^{-izt} \sum_{n,\nu} \frac{\psi_{n\nu}^*(\mathbf{r}') \psi_{n\nu}(\mathbf{r})}{z - E_n}. \quad (3.10)$$

dove  $z = \xi + i\eta$  e  $C$  è la curva che attraversa  $-\infty < \xi < \infty$  appena sopra l'asse reale. Per verificare che la (3.9) e la (3.10) coincidano basta sfruttare i metodi di integrazione di contorno<sup>[36]</sup> dell'analisi complessa scegliendo, per  $t < 0$ , di chiudere la curva  $C$  nel semipiano complesso superiore, mentre per  $t > 0$ , nel semipiano inferiore. Si definisce la *funzione di Green "ritardata"* della TISE come l'inversa della (3.10) (la trasformata) quando  $z = E + i\epsilon$ , con parametro infinitesimo positivo  $\epsilon \rightarrow 0^+$ :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = -i \int_0^\infty dt e^{i(E+i\epsilon)t} K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \quad (3.11)$$

che equivale a:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = \sum_{n,\nu} \frac{\psi_{n\nu}^*(\mathbf{r}') \psi_{n\nu}(\mathbf{r})}{(E + i\epsilon) - E_n}. \quad (3.12)$$

Questo mostra che, considerando  $E$  come variabile complessa  $E + i\epsilon$ , la funzione di Green  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)$  ha dei poli semplici in corrispondenza degli autovalori  $E_n$  di  $H$ <sup>§</sup>. Dunque, per conoscere lo spettro energetico del sistema fisico d'interesse è sufficiente studiare le proprietà di analiticità di  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)$ . I residui  $Res[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E), E_n] \equiv R_n$ , invece, danno informazioni sulle autofunzioni di  $H$ :

$$R_n = \sum_{\nu} \psi_{n\nu}^*(\mathbf{r}') \psi_{n\nu}(\mathbf{r}). \quad (3.13)$$

Applicando  $(E - H(\mathbf{r}))$  alla (3.12) e sfruttando la proprietà della base di  $H$  per cui  $\sum_{n,\nu} \psi_{n\nu}^*(\mathbf{r}') \psi_{n\nu}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , si comprende che  $G$  è così chiamata perché risolve il problema fondamentale della TISE:

$$(E - H(\mathbf{r})) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = \delta^{(3N)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.14)$$

<sup>‡</sup>La sommatoria è in generale da intendersi come una notazione abbreviata per indicare una sommatoria sullo spettro discreto e un integrale sullo spettro continuo.

<sup>§</sup>In presenza parziale o totale di spettro continuo i poli si uniscono in branch cut<sup>[34]</sup>.

Le espressioni (3.9) e (3.12) mostrano che, nel caso di  $H$  tempo-indipendente, una volta noto il propagatore, o equivalentemente la funzione di Green, sono anche conosciuti, almeno implicitamente, lo spettro energetico di  $H$  e le relative autofunzioni d'onda. In questo senso il propagatore (o la funzione di Green) risolve completamente il problema quantomeccanico. Purtroppo, solo per una ristretta classe di problemi è facile trovare un'espressione analitica esatta di questi due. Per non rinunciare alla ricchezza di contenuto fisico del propagatore e della funzione di Green, si è sviluppata una teoria perturbativa che ha l'intento di fornire un'espressione approssimata di questi, da cui poter ottenere il maggior numero di informazioni sul sistema.

## 3.2 Propagatore e funzione di Green per particelle libere non relativistiche

Tra i pochi casi in cui è possibile trovare le espressioni analitiche esatte del propagatore e della funzione di Green c'è quello di un sistema di particelle libere in regime non relativistico. In questo paragrafo, si calcolerà il propagatore per un sistema di  $N$  particelle libere non relativistiche, mentre lo studio della funzione di Green sarà limitato al caso di una singola particella libera non relativistica.

L'hamiltoniana di un sistema di  $N$  particelle libere non relativistiche è tempo-indipendente e può essere scritta come:

$$H_0 = \sum_{n=1}^N \sum_{i=x,y,z} \frac{p_{n_i}^2}{2m_n}. \quad (3.15)$$

Dal fatto che ogni termine dell'hamiltoniana commuta con tutti gli altri segue che l'evolvente temporale è il prodotto di  $3N$  termini dello stesso tipo:

$$U(t) = e^{-iH_0 t} = \prod_{n=1}^N \prod_{i=x,y,z} e^{-i \frac{p_{n_i}^2}{2m_n} t} \quad (3.16)$$

Per valutare l'espressione (3.8) sarà quindi sufficiente calcolare il propagatore di un problema unidimensionale lungo  $x$  per una singola particella di massa  $m$  e impulso  $p$ :

$$K_0(x, x'; t) = \Theta(t) \langle x | e^{-i \frac{p^2}{2m} t} | x' \rangle. \quad (3.17)$$

Siano  $|\tilde{p}\rangle$  gli autostati dell'impulso, cioè  $p|\tilde{p}\rangle = \tilde{p}|\tilde{p}\rangle$ . La loro espressione come funzione d'onda spaziale è data dalle onde piane<sup>[4]</sup>:

$$\langle x | \tilde{p} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\tilde{p}x}. \quad (3.18)$$

Inserendo l'identità  $1_p = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{p} |\tilde{p}\rangle \langle \tilde{p}|^\dagger$  nella (3.17) si ottiene:

$$K_0(x - x'; t) = \frac{\Theta(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{p} \exp \left\{ i \left[ \tilde{p}(x - x') - \frac{\tilde{p}^2 t}{2m} \right] \right\}. \quad (3.19)$$

---

<sup>‡</sup>Si noti che per restare in regime non relativistico non si dovrebbe sommare su quegli impulsi comparabili o superiori a  $m$  (si veda il libro di J.J. Sakurai e J. Napolitano<sup>[4]</sup> a pp.58-59). Qui si ignora questa sottigliezza, ma si arriva comunque a un risultato corretto.

Il fatto che  $K_0$  dipenda dalla differenza  $x - x'$  rispecchia l'invarianza per traslazioni spaziali dell'hamiltoniana libera. Grazie a ciò, si può per comodità porre  $x' = 0$ . L'integrale (3.19) si calcola agevolmente, poiché è un integrale gaussiano. Esso restituisce l'espressione del propagatore libero unidimensionale:

$$K_0(x; t) = \Theta(t) \left( \frac{1}{2\pi i t} \right)^{\frac{1}{2}} (m)^{\frac{1}{2}} \exp\left(i \frac{m x^2}{2t}\right). \quad (3.20)$$

Per i discorsi fatti sopra, è immediata la generalizzazione della (3.20) che consente di ottenere l'espressione del propagatore libero per un sistema di  $N$  particelle:

$$K_0(\mathbf{r}; t) = \Theta(t) \left( \frac{1}{2\pi i t} \right)^{\frac{3N}{2}} \prod_{n=1}^N (m_n)^{\frac{3}{2}} \exp\left(i \frac{m_n r_n^2}{2t}\right), \quad (3.21)$$

con  $r_n^2 \equiv x_n^2 + y_n^2 + z_n^2$ .

Per quanto riguarda la funzione di Green libera non è così facile fornire un calcolo generalizzabile a un sistema di  $N$  particelle e per tale ragione si mostrerà solo il caso di una singola particella libera nello spazio tridimensionale. Essendo in questo caso  $H(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2m} \nabla_{\mathbf{r}}^2$ , la (3.14) può essere riscritta come:

$$(k^2 + \nabla_{\mathbf{r}}^2) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) = 2m \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.22)$$

dove si è definita  $k \equiv \sqrt{2mE}$ . Meno che per un fattore  $2m$ , la (3.22) è proprio il problema fondamentale dell'equazione di Helmholtz non omogenea. Nella (3.22) sia la sorgente  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  che l'operatore differenziale  $(\nabla_{\mathbf{r}}^2 + k^2)$  sono invarianti per traslazioni spaziali e per questa ragione la soluzione  $G_0$  rispecchierà questo comportamento. Perciò, si scriverà  $G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; k)$  e questo consente di avere la libertà di scegliere, per comodità,  $\mathbf{r}' = 0$ . Inoltre, essendo il laplaciano e la delta di Dirac invarianti per trasformazioni ortogonali, ci si aspetta che  $G_0$  dipenda da  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . La risoluzione della (3.22) è più facile se si passa in trasformata di Fourier poiché ciò converte l'equazione differenziale in un'equazione algebrica. Data:

$$G_0(\mathbf{r}; k) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} g(\mathbf{q}; k) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad (3.23)$$

allora, usando l'espressione della  $\delta$  di Dirac come integrale di Fourier e sostituendo la (3.23) nella (3.22), segue che debba essere soddisfatta l'equazione algebrica:

$$(k^2 - |\mathbf{q}|^2) g(\mathbf{q}; k) = 2m. \quad (3.24)$$

Dalla (3.24) si ottiene, per  $k^2 \neq |\mathbf{q}|^2$ , che  $g(\mathbf{q}; k) = 2m(k^2 - q^2)^{-1}$ . Per poter integrare la (3.23) bisogna però dare una *prescrizione* su come evitare le due singolarità di  $g$  in  $k^2 = |\mathbf{q}|^2$  (equivalente a  $E = |\mathbf{q}|^2/2m$ ) e questo è chiarito nella (3.12): è necessario rimpiazzare  $k$  con la variabile complessa  $k + i\epsilon$  (con  $\epsilon > 0$  e  $\epsilon \rightarrow 0^+$ ), spostando così i poli dall'asse reale al piano complesso. La procedura è detta *prescrizione  $+i\epsilon$*  ed è solo una delle possibili scelte che si possono fare. Regolarizzazioni diverse conducono a funzioni di Green diverse e con differente interpretazione fisica. Per esempio, la scelta  $+i\epsilon$  farà ritrovare proprio la funzione di Green "ritardata" precedentemente definita, cioè quella funzione di Green legata a un propagatore "ritardato" che rispetta il vincolo

di causalità chiarito. Un'altra possibile scelta potrebbe essere regolarizzare con  $-i\epsilon$ , ma ciò porterebbe alla cosiddetta funzione di Green "anticipata" che è quella legata a un propagatore che non soddisfa il vincolo di causalità, ma che verifica un'altra condizione che qui non sarà discussa. Continuando il calcolo, si può scrivere:

$$G_0(\mathbf{r}; k) = \frac{2m}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{(k+i\epsilon)^2 - q^2} - \frac{2m}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{(k+i\epsilon+q)(k+i\epsilon-q)}. \quad (3.25)$$

È utile passare dalle coordinate  $(q_x, q_y, q_z)$  a quelle sferiche  $(q, \theta, \phi)$  costruite in modo da far puntare il vettore  $\mathbf{r}$  lungo la direzione definita da  $\theta = 0$ . In questo modo, l'integrale (3.25) diventa:

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{r}; k) &= \frac{2m}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} dq q^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{e^{iq|\mathbf{r}|\cos\theta}}{(k+i\epsilon+q)(k+i\epsilon-q)} \\ &= \frac{2m}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dq q^2 \int_{-1}^1 d\mu \frac{e^{iq|\mathbf{r}|\mu}}{(k+i\epsilon+q)(k+i\epsilon-q)} \quad (\mu = \cos\theta) \\ &= \frac{2m}{(2\pi)^2 |\mathbf{r}|} \int_0^{+\infty} dq \frac{q (e^{iq|\mathbf{r}|} - e^{-iq|\mathbf{r}|})}{(k+i\epsilon+q)(k+i\epsilon-q)} \\ &= \frac{2mi}{(2\pi)^2 |\mathbf{r}|} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q e^{iq|\mathbf{r}|}}{(q-k-i\epsilon)(k+i\epsilon-q)}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

L'ultimo integrale è facilmente calcolabile sfruttando due strumenti dell'analisi complessa: il metodo dei residui e il lemma del cerchio grande. Essendo un metodo standard di integrazione, non è interessante discuterne i dettagli, ma se ne fornirà il risultato<sup>[37]</sup>:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q e^{iq|\mathbf{r}|}}{(q-k-i\epsilon)(k+i\epsilon-q)} = \pi i e^{ik|\mathbf{r}|}, \quad (3.27)$$

da cui, sostituendolo nella (3.26), si ricava:

$$G_0(\mathbf{r}; k) = 2m \left( -\frac{e^{ik|\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}|} \right), \quad (3.28)$$

o, più in generale, non scegliendo  $\mathbf{r}' = 0$ , ne consegue:

$$G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; k) = 2m \left( -\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right). \quad (3.29)$$

La (3.29) si presta a un'importante interpretazione fisica: la funzione di Green ritardata di una particella libera nello spazio tridimensionale può essere considerata come una funzione della posizione  $\mathbf{r}$  che descrive la propagazione di un'onda sferica uscente generata da una sorgente puntiforme sita in  $\mathbf{r}'$ .

### 3.3 Propagatore di Feynmann per l'equazione di Klein-Gordon

L'equazione di Klein-Gordon gioca un ruolo importante nella formulazione della meccanica quantistica relativistica. Ad un certo punto della storia sembrava che questa dovesse essere rigettata per via di alcuni problemi d'interpretazione delle sue soluzioni; tuttavia, con un'adeguata interpretazione che successivamente è stata data, si è mostrato che in realtà non c'è nulla di sbagliato in tale equazione<sup>[38]</sup>. Sebbene il suo più *naturale* impiego sia limitato ai problemi di particelle massive a spin nullo (nelle teorie di campo sono i cosiddetti *campi scalari*), ci sono diverse ragioni per cui è importante accennare al suo studio:

- storicamente, rappresenta il primo tentativo di formulazione di un'equazione d'onda quantistica di tipo relativistico. L'idea era formulare un'equazione Lorentz-invariante che trattasse coordinate spaziali e temporali allo stesso modo e che tenesse conto del fatto che l'espressione dell'energia di una particella libera (classica)  $E = \mathbf{p}^2/2m$ , dovesse essere rimpiazzata dalla relazione di dispersione relativistica  $E^2(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 + m^2$ <sup>[38]</sup>. Da quest'ultima già si capisce che una particella libera relativistica può possedere sia energia positiva che negativa.
- com'è mostrato nel libro di Weinberg<sup>[6]</sup>, nell'ambito della teoria quantistica dei campi, tutte le componenti  $\hat{\psi}_l(x)$  di un generico *campo* con massa  $m$  soddisfano l'equazione di Klein-Gordon:

$$(\square_x + m^2)\hat{\psi}_l(x) = 0, \quad \square_x \equiv -\partial^\mu \partial_\mu = -\nabla_{\mathbf{x}}^2 + \partial_t^2. \quad (3.30)$$

Questa trattazione esula dagli scopi della tesi e dallo spirito stesso della pura teoria della matrice S;

- essa rappresenta un esempio semplice e istruttivo atto a illustrare i paradigmi di base necessari per sviluppare teorie relativistiche più complicate, come, per esempio, la teoria di Dirac per le particelle a spin  $\frac{1}{2}$ .

Si consideri una particella libera a spin nullo descritta dalla funzione d'onda  $\psi(\mathbf{x}, t) \equiv \psi(x)$  soddisfacente l'equazione di Klein-Gordon:

$$(\square_x + m^2)\psi(x) = 0. \quad (3.31)$$

Per costruire il propagatore, che sarà indicato con  $\Delta_F$ , si cercherà la soluzione del problema fondamentale:

$$(\square_x + m^2)\Delta_F(x, x') = -\delta^{(4)}(x - x') \quad (3.32)$$

con la *condizione di causalità* per cui  $\Delta_F$  fa propagare le soluzioni a energia positiva in avanti nel tempo, mentre quelle a energia negativa indietro nel tempo. Questa richiesta è coerente con l'interpretazione di Feynman-Stückelberg secondo cui le soluzioni a energia negativa sono interpretabili come particelle a energia negativa che si propagano indietro nel tempo o, equivalentemente, come le rispettive antiparticelle a energia positiva che si propagano avanti nel tempo. Poiché sia l'operatore differenziale che la sorgente sono invarianti per traslazioni spaziotemporali allora risulterà  $\Delta_F(x, x') =$

$\Delta_F(x - x')$ . Perciò, senza perdita di generalità, si può scegliere convenientemente  $x' = 0$ . Si può passare in trasformata di Fourier, così come già fatto nel [Paragrafo 3.2](#), in modo tale da convertire l'equazione differenziale (3.32) in un'equazione algebrica. Sia:

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G(p) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - p^0 x^0)} \quad (3.33)$$

allora, mettendo la (3.33) nella (3.32) e ricordando la rappresentazione della  $\delta^{(4)}(x)$  come integrale di Fourier, si ottiene l'equazione algebrica:

$$(p^2 + m^2)G(p) = -1, \quad p^2 \equiv \mathbf{p}^2 - (p^0)^2. \quad (3.34)$$

Al di fuori delle singularità sulla *mass-shell*  $p^0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \equiv \pm E(\mathbf{p})$  (avendone esplicitato il segno, questa notazione prevede  $E(\mathbf{p}) > 0$ ), la (3.34) è risolta da:

$$G(p) = -\frac{1}{p^2 + m^2} = \frac{1}{(p^0 + E(\mathbf{p}))(p^0 - E(\mathbf{p}))}, \quad p^0 \neq \pm E(\mathbf{p}). \quad (3.35)$$

L'origine di soluzioni a energia negativa nelle teorie relativistiche è proprio specchio della singolarità in  $p^0 = -E(\mathbf{p})$ , che non è presente in teorie non relativistiche. Anche in questo caso, così come già fatto nel [paragrafo 3.2](#), per poter procedere al calcolo del propagatore  $\Delta_F$  bisogna fornire una prescrizione su come aggirare queste singolarità. La scelta della prescrizione specifica in modo completo il propagatore poiché ne fissa la condizione al "contorno". La condizione che si vuole imporre sul propagatore è la sopraccitata condizione di causalità. Si mostrerà che, scegliendo di rimpiazzare la  $E(\mathbf{p})$  con la variabile complessa  $E(\mathbf{p}) - i\epsilon$  (con  $\epsilon > 0$  e  $\epsilon \rightarrow 0^+$ ), si ottiene il cosiddetto *propagatore di Feynman* che rispetta la condizione di causalità richiesta in questo paragrafo. Infatti, usando i metodi di integrazione dell'analisi complessa<sup>[39]</sup>, si ricava:

$$\begin{aligned} \Delta_F(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{e^{-ip^0 x^0}}{(p^0 + E(\mathbf{p}) - i\epsilon)(p^0 - E(\mathbf{p}) + i\epsilon)} \\ &= \left[ -i \int \frac{d^3\mathbf{p} \Theta(t)}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{-iE(\mathbf{p})t} \right] + \left[ -i \int \frac{d^3\mathbf{p} \Theta(-t)}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{iE(\mathbf{p})t} \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Grazie alla presenza delle funzioni di Heaviside, il propagatore così trovato esibisce il comportamento causale richiesto. L'espressione (3.36) fa intuire che il primo termine è quello che propaga le soluzioni a energia positiva in avanti nel tempo, mentre il secondo propaga le soluzioni a energia negativa indietro nel tempo. Si può mostrare ancora più rigorosamente che questa intuizione è corretta utilizzando l'espressione esplicita delle soluzioni d'onda piana  $f_p^{(\pm)}(x)$ , a energia positiva (+) e negativa (-), dell'equazione di Klein-Gordon e mostrando che<sup>[39,35]</sup>:

$$\Delta_F(x - x') = -i \int d^3p f_p^{(+)}(x) f_p^{(+)*}(x') \Theta(t - t') - i \int d^3p f_p^{(-)}(x) f_p^{(-)*}(x') \Theta(t' - t) \quad (3.37)$$

Non essendo utile agli scopi della tesi, ciò non sarà approfondito, ma viene rimandato ai riferimenti bibliografici<sup>[35,39,40]</sup>.

### 3.4 Teoria delle perturbazioni per il propagatore e applicazione alla matrice S

Uno dei più importanti impieghi dei propagatori è lo sviluppo di una *teoria delle perturbazioni*. Questa fornisce una potente tecnica per ottenere informazioni fisiche su un problema quantomeccanico di difficile risoluzione analitica. Si consideri la situazione in cui il sistema è descritto da un'hamiltoniana  $H = H_0 + V$ , dove  $H_0$  è l'hamiltoniana del sistema libero di cui si sa risolvere analiticamente il problema e  $V$  è un potenziale che viene trattato come una "piccola" perturbazione. Non si discuteranno i criteri di applicabilità e le condizioni che  $H_0$  e  $V$  devono soddisfare affinché si possa procedere con un approccio perturbativo, poiché questi sono argomenti sottili e non utili al fine della presente trattazione. Tuttavia, si supporrà, senza troppe preoccupazioni, che questi siano verificati. Inoltre, per semplicità di calcolo, si studierà un sistema quantistico in regime non relativistico (sarà quindi valida l'equazione di Schrödinger) costituito da una sola particella. Questo rappresenta un utile toy model che dà risultati validi anche in casi più complessi e che si presta facilmente a generalizzazioni.

Con l'intento di trattare  $V$  come perturbazione si può riscrivere la (3.5) come:

$$(i\partial_{t_1} - H_0(\mathbf{x}_1)) K(x_1; x_2) = V(x_1)K(x_1; x_2) + i\delta^{(4)}(x_1 - x_2), \quad (3.38)$$

dove si è posto  $x_i^\mu \equiv (\mathbf{x}_i, t_i)^T$ . Si ricordi che, per com'è stato costruito, il propagatore è non nullo solo quando  $x_1^0 > x_2^0$ , cioè quando  $t_1 > t_2$ . Sia  $K_0(x_1, x_2)$  il propagatore libero noto relativo al problema con  $H_0$ . Esso risolve l'equazione:

$$(i\partial_{t_1} - H_0(\mathbf{x}_1)) K_0(x_1; x_2) = i\delta^{(4)}(x_1 - x_2). \quad (3.39)$$

L'equazione (3.38) implica che:

$$K(x_1; x_2) = K_0(x_1; x_2) - i \int d^4x_3 K_0(x_1; x_3) V(x_3) K(x_3; x_2), \quad (3.40)$$

con la condizione di causalità che impone  $t_1 > t_3 > t_2$ . Per vederlo, basta applicare  $(i\partial_{t_1} - H_0(\mathbf{x}_1))$  alla (3.40) e usare la (3.39). Questa procedura può essere iterata sostituendo l'espressione completa di  $K(x_1; x_2)$  (3.40) nella stessa  $K(x_3; x_2)$  presente sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned} K(x_1; x_2) = & K_0(x_1; x_2) - i \int d^4x_3 K_0(x_1; x_3) V(x_3) K_0(x_3; x_2) + \\ & + (-i)^2 \int d^4x_3 d^4x_4 K_0(x_1; x_3) V(x_3) K_0(x_3; x_4) V(x_4) K(x_4; x_2), \end{aligned} \quad (3.41)$$

con  $t_1 > t_3 > t_4 > t_2$ . La (3.40) è del primo ordine in  $V$ , la (3.41), invece, è del secondo ordine in  $V$ . Si può continuare ad iterare il procedimento finché non si raggiunge l'ordine in  $V$  desiderato:

$$\begin{aligned} K(x_1; x_2) = & K_0(x_1; x_2) - i \int d^4x_3 K_0(x_1; x_3) V(x_3) K_0(x_3; x_2) + \\ & + (-i)^2 \int d^4x_3 d^4x_4 K_0(x_1; x_3) V(x_3) K_0(x_3; x_4) V(x_4) K(x_4; x_2) + \dots \end{aligned} \quad (3.42)$$

L'espansione completa in tutte le potenze della perturbazione  $V$  si può sintetizzare nella notazione compatta:

$$K = K_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n (V K_0)^n \right]. \quad (3.43)$$

L'espressione in serie di  $V$  (3.42) possiede un'importante interpretazione grafica<sup>[35,41]</sup> che risulta essere ancora più evocativa se la si sostituisce nella (3.3). Pur non entrando nei dettagli di questo metodo diagrammatico, è fruttuoso alla comprensione darne un accenno. L'espansione (3.42) racchiude tutti i possibili modi in cui la particella può andare da  $x_2$  a  $x_1$  soddisfacendo la condizione di causalità richiesta: l'ordine zero in  $V$  descrive la situazione in cui la particella, per andare da  $x_2$  a  $x_1$ , non interagisca col potenziale, il primo ordine in  $V$  la situazione in cui avvenga una sola interazione in  $x_3$  tra  $x_2$  e  $x_1$  (cioè  $t_1 > t_3 > t_2$ ), il secondo ordine il caso in cui avvengano, in  $x_3$  e  $x_4$  compresi tra  $x_2$  e  $x_1$  (cioè  $t_1 > t_3 > t_4 > t_2$ ), due interazioni col potenziale, e così via.

A differenza del [Capitolo 2](#) in cui si sono convenientemente utilizzati la rappresentazione di Heisenberg e lo "spazio" dei momenti, per studiare e rendere manifeste alcune proprietà di Lorentz-invarianza degli stati e della matrice S, la trattazione sui propagatori appena sviluppata, il cui fine è stato definire questi oggetti matematici e delinearne le proprietà di analiticità, ha adottato la rappresentazione di Schrödinger nello "spazio" delle configurazioni. Poiché si vuole ora esplicitare il legame tra matrice S e i propagatori, è vantaggioso adattare la prima al quadro di Schrödinger e, in particolare, riscriverla nello "spazio" delle configurazioni. Ciò risulterà particolarmente semplice se si tiene in mente lo schema generale di un problema di scattering e il significato fisico della matrice S come ampiezza di probabilità di transizione.

Si indichino con  $\phi(x)$  le note autofunzioni d'onda dell'hamiltoniana libera  $H_0(\mathbf{x})$  e con  $\psi(x)$  quelle ignote del problema di scattering  $H(x) = H_0(\mathbf{x}) + V(x)$  che si suppone poter essere trattato perturbativamente. Si può riscrivere la (3.40) come:

$$K(x; x') = K_0(x; x') - i \int d^4x_1 K_0(x; x_1) V(x_1) K(x_1; x'), \quad (3.44)$$

con  $t > t_1 > t'$ . La (3.44) fornisce un metodo iterativo per trovare  $K$  in termini di  $V$  e  $K_0$  e quindi per costruire la funzione d'onda  $\psi(x)$  nel futuro volta nota la funzione d'onda  $\psi(x')$  in un certo momento del passato. Ciò è manifesto nell'espressione:

$$\psi(x) = \int d^3\mathbf{x}' K(x; x') \psi(x'), \quad t > t'. \quad (3.45)$$

Un problema di scattering nella rappresentazione di Schrödinger è descritto da una funzione d'onda  $\psi(x)$  che nei limiti di  $t \rightarrow \pm\infty$  rispetto al momento dell'interazione, si riduca<sup>‡</sup> alle soluzioni del problema libero  $\phi_i(x)$  per  $t \rightarrow -\infty$  e  $\phi_f(x)$  per  $t \rightarrow +\infty$ . Per via di ciò, si usa dire che l'effetto della perturbazione  $V$  è quello di indurre una certa probabilità di transizione da uno stato stazionario di  $H_0$  a un altro. Questo discorso sottende ipotesi sul potenziale che non saranno discusse, ma che sono ben esaminate nei testi di J. R. Taylor<sup>[42]</sup> e di P. Caldirola, R. Cirelli e G. M. Prosperi<sup>[5]</sup>.

<sup>‡</sup>A rigore, bisognerebbe introdurre una nozione di convergenza per chiarire questo passaggio mostrando che, a  $t \rightarrow \pm\infty$ , qualsiasi valore medio calcolato su  $|\psi\rangle$  restituisce lo stesso risultato se calcolato su un certo  $|\phi_i\rangle$ . Per un approfondimento si veda il libro di J. R. Taylor<sup>[42]</sup>.

Sia  $\psi^+(x)$  la particolare funzione d'onda del problema di scattering caratterizzata dal fatto che è noto il suo asintoto libero  $\phi_i(x)$  a  $t \rightarrow -\infty$  poiché si conosce com'è stato preparato il sistema dallo sperimentatore. È chiara l'analogia di  $\psi^+(x)$  con lo stato "in" definito nel [Capitolo 2](#): essi sono solo due modi diversi, in termini di rappresentazioni, di formulare lo stesso problema. Dalle informazioni che si hanno è possibile conoscere la funzione d'onda  $\psi^+(x)$  nel futuro scrivendo<sup>[35]</sup>:

$$\psi^+(x) = \lim_{t' \rightarrow -\infty} \int d^3 \mathbf{x}' K(x; x') \phi_i(x'). \quad (3.46)$$

Sostituendo la (3.44) nella (3.46) e utilizzando l'espressione (3.45) si ricava:

$$\psi^+(x) = \phi_i(x) - i \int d^4 x_1 K_0(x; x_1) V(x_1) \psi^+(x_1). \quad (3.47)$$

Come già accennato, nel futuro remoto  $t \rightarrow +\infty$  dopo l'interazione, la funzione d'onda converge nuovamente a una delle soluzioni  $\phi_f(x)$  del problema libero. Tutte le informazioni sul processo di scattering sono contenute nelle ampiezze di probabilità  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \phi_f(t) | \psi^+(t) \rangle$  che descrivono la possibilità per  $\psi^+(x)$  di essere rivelata, a  $t \rightarrow +\infty$ , come un'onda piana  $\phi_f(x)$  di momento  $\mathbf{p}_f$ . Queste ampiezze di probabilità sono proprio gli elementi della matrice S che saranno ora indicati come  $S_{i \rightarrow f}$ :

$$\begin{aligned} S_{i \rightarrow f} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \phi_f(t) | \psi^+(t) \rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int d^3 \mathbf{x} \phi_f^*(x) \psi^+(x), \end{aligned} \quad (3.48)$$

da cui, utilizzando la (3.47), si ottiene:

$$\begin{aligned} S_{i \rightarrow f} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int d^3 \mathbf{x} \phi_f^*(x) \left[ \phi_i(x) - i \int d^4 x_1 K_0(x; x_1) V(x_1) \psi^+(x_1) \right] \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) - i \lim_{t \rightarrow +\infty} \int d^3 \mathbf{x} d^4 x_1 \phi_f^*(x) K_0(x; x_1) V(x_1) \psi^+(x_1). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Inserendo la (3.47) ricorsivamente nella (3.49) è possibile ottenere una serie perturbativa i cui termini hanno la medesima interpretazione della serie (3.42) per il propagatore: essi rappresentano tutti i possibili modi in cui un certo stato iniziale può realizzarsi in un dato stato finale. Questa serie mostra come le *proprietà di analiticità* della matrice S siano legate a quelle del propagatore libero e alla condizione di causalità imposta. Ciò è rafforzato dall'osservazione del [Capitolo 2](#) sulla (2.18) e dalle rispettive serie di Dyson (2.22)-(2.23) e più espressamente nell'esame della matrice S nello "spazio" dei momenti esposta nel libro di J. Binney e D. Skinner<sup>[43]</sup> nella sezione §12.2.2 o con una trattazione più avanzata, che conduce alle regole di Feynman, nella sezione §6.3 del libro di Weinberg<sup>[6]</sup>. Sebbene questi risultati siano stati qui derivati in un regime non relativistico, le conseguenze continuano a valere anche in trattazioni relativistiche<sup>[6,35]</sup>: la matrice S nello "spazio" dei momenti rispecchia una struttura a poli come quella della trasformata del propagatore di Feynman  $\Delta_F$  (3.35)-(3.36).

Congenialmente con lo spirito della pura teoria della matrice S, nel [Capitolo 4](#) si assumerà questo non più come un teorema, ma come un ragionevole postulato sulla matrice S e se ne cercheranno le conseguenze. Ancora una volta, così come anticipato nel [Capitolo 2](#), l'approccio è quello di analizzare dei risultati delle teorie quantistiche in regime relativistico e capire quali tra questi risultati possano essere eletti a principi primi, su cui fondare, esaustivamente, una nuova teoria.

# Capitolo 4

## Teorema di Weinberg

In questo capitolo si mostrerà come dalle sole assunzioni di Lorentz-invarianza e struttura a poli della matrice  $S$  di un processo in cui avvenga l'emissione di una particella  $(0_+, \pm\sigma)$  di bassa energia, discendano come teoremi la *conservazione della carica elettrica*, nel caso in cui la particella emessa sia un fotone ( $\sigma = \pm 1$ ), e l'*uguaglianza tra massa inerziale e massa gravitazionale*, nel caso in cui la particella emessa sia un gravitone  $\sigma = \pm 2$ . Inoltre, si arriverà al risultato secondo cui le particelle massless a elicità intera  $\sigma \geq 3$ , nel limite di basse energie, non possano accoppiarsi a qualsivoglia forma di momento o energia. Questi risultati, frutto dell'ingegno di S. Weinberg, sono stati pubblicati per la prima volta nel 1964<sup>[6]</sup> e in letteratura prendono il nome di *Teorema di Weinberg* o di *Teoremi del fotone e del gravitone soffici (o molli)*.

### 4.1 Carica elettrica e carica gravitazionale come costanti di accoppiamento nel limite sofficie

È possibile, entro certi limiti, costruire una teoria assiomatica della matrice  $S$ . Un tale approccio è basato sull'idea di voler trovare gli elementi della matrice  $S$  senza passare per gli strumenti della teoria quantistica dei campi, ma parametrizzandoli in modo diretto. La parametrizzazione la si fa nel modo più generale possibile andando ad imporre che gli elementi soddisfino le particolari proprietà definite dagli assiomi. Un'ampia trattazione dei possibili postulati, che qui non sarà discussa, è esposta nei testi di R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. Olive, J. C. Polkinghorne<sup>[24]</sup> e di D. Iagolnitzer<sup>[25]</sup>. I risultati ottenuti nel [Capitolo 2](#) sulla Lorentz-invarianza della matrice  $S$  e nel [Capitolo 3](#) sulla struttura a poli di questa in una teoria perturbativa, devono fare da guida sulla scelta degli *assiomi*. In accordo con la trattazione dell'articolo di S. Weinberg<sup>[2]</sup>, si decide proprio di elevare a postulati i risultati visti sulla Lorentz-invarianza e sulla struttura a poli della matrice  $S$  e se ne indagano le conseguenze.

Si consideri un vertice di interazione (Fig. 4.1) in cui viene emessa una particella massless *sofficie* di quadrimpulso  $q^\mu = (\mathbf{q}, |\mathbf{q}|)^T$  a elicità intera  $\pm\sigma$  da parte di una particella di massa  $m$  anche nulla, con spin  $J = 0$  (quindi  $\sigma_J = \sigma'_J = 0$ ) e quadrimomento  $p_n^\mu = (\mathbf{p}, E(\mathbf{p}))^T$ . È detta *sofficie* o *molle* una particella che abbia energia molto bassa rispetto alle energie delle altre particelle coinvolte nel processo. Nel caso specifico, questo limite di basse energie può essere descritto richiedendo  $q \rightarrow 0$ . L'ampiezza di

probabilità del processo di emissione ha proprio la forma (2.36):

$$S_{\pm\sigma}(\mathbf{q}, p_n) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{q}|}} \epsilon_{\pm}^{\mu_1*}(\hat{\mathbf{q}}) \dots \epsilon_{\pm}^{\mu_\sigma*}(\hat{\mathbf{q}}) M_{\pm\mu_1 \dots \mu_\sigma}(\mathbf{q}, p_n). \quad (4.1)$$

Innanzitutto, si vuole parametrizzare espressamente la  $M_{\pm\mu_1, \dots, \mu_\sigma}(\mathbf{q}, p_n)$  imponendone il carattere tensoriale visto nel [Paragrafo 2.3](#) del [Capitolo 2](#). Dalla conservazione del quadrimpulso  $p_n - q = p'_n$  si può allora pensare ad  $M$  come una funzione di  $p_n$  e  $p'_n$ . Il limite  $q \rightarrow 0$  corrisponde alla condizione  $p_n \simeq p'_n$ , per cui  $M$  diviene una funzione della sola  $p$ . Per inciso, il fatto che  $p_n \simeq p'_n$  fa anche intuire che se  $p_n$  è una particella fisicamente osservabile, anche detta *reale*, quindi *on-shell*  $p_n^2 = -m_n^2$ , allora anche la particella  $p'_n$  dovrà essere, approssimativamente, *on-shell* con  $p_n'^2 \simeq m_n'^2$ . Questo implica anche che  $m_n' \simeq m_n$ . Dalle considerazioni appena fatte, si capisce che l'unico modo di costruire  $M$  come un tensore è:

$$M_{\pm\mu_1, \dots, \mu_\sigma}(p_n) = f(p_n^2) p_{n\mu_1} \dots p_{n\mu_\sigma}, \quad (4.2)$$

dove  $f(p_n^2)$  è una generica funzione di  $p_n^2 \equiv p_n^\mu p_{n\mu}$  ed è quindi dipendente dalla specie della particella emittente. Nel caso di particelle emittenti con spin  $J > 0$ , se si moltiplica per una  $\delta_{\sigma_J \sigma'_J}$  la  $M$  espressa nella (4.2), essa continua ad essere un tensore dal momento che la  $\delta_{\sigma_J \sigma'_J}$  è invariante sotto trasformazioni di Lorentz. Si può dimostrare<sup>[2]</sup> che questa generalizzazione a particelle  $J > 0$  non è l'unica possibile che preservi il carattere tensoriale di  $M$ , ma è la sola a essere compatibile con la condizione di Lorentz-invarianza della matrice  $S$  totale.

Si può scegliere, per convenzione,  $f(p^2) = \mathcal{C}_1 e_n$  nel caso dei fotoni ( $\sigma = \pm 1$ ) e  $f(p_n^2) = \mathcal{C}_2 f_n$  nel caso dei gravitoni ( $\sigma = \pm 2$ ), con  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  che sono due costanti contenenti fattori  $i, \pi, G_N$ , mentre  $e_n$  ed  $f_n$  sono costanti che però dipendono dalla specie della particella emittente e, per questa ragione, saranno chiamate *costanti di accoppiamento* della particella  $p_n$  alla particella sofficie  $q$ . Le costanti di accoppiamento, in qualche modo, caratterizzano l'interazione. Si può dimostrare che<sup>[6]</sup>, con un'adeguata scelta delle costanti  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ ,  $e_n$  è identificabile proprio con la carica elettrica della particella  $p_n$ , mentre la  $f_n$  è identificabile con il rapporto tra massa inerziale e massa gravitazionale della particella  $n$  emittente se questa è non relativistica, mentre col rapporto tra massa gravitazionale e il doppio dell'energia totale relativistica nel caso di particella  $n$  emittente relativistica. In formule, indicando con  $\tilde{m}_n$  la massa gravitazionale e con  $m_n$  la massa inerziale, l'identificazione è proprio la seguente:

$$\tilde{m}_n = f_n \left[ 2E(\mathbf{p}_n) - \left( \frac{m_n^2}{E(\mathbf{p}_n)} \right) \right]. \quad (4.3)$$

In regime non relativistico si ha  $E(\mathbf{p}_n) \simeq m_n$ , per cui:

$$f_n = \frac{\tilde{m}_n}{m_n}, \quad (4.4)$$

mentre, per particelle relativistiche vale  $E(\mathbf{p}_n) \gg m_n$ , quindi:

$$f_n = \frac{\tilde{m}_n}{2E(\mathbf{p}_n)}. \quad (4.5)$$

Questo identificazione, che qui sarà considerata vera e non verrà dimostrata, è di fondamentale importanza per dare un senso fisico alle grandezze in gioco in questo capitolo. Pertanto, al lettore che voglia assicurarsi che questa identificazione sia valida a tutti gli effetti, si consiglia la lettura della Sezione II dell'articolo di Weinberg<sup>[2]</sup>, la quale risulta essere più che esaustiva per lo scopo, e la lettura dell'appendice C della tesi di D. Zarrilli<sup>[44]</sup> che ne arricchisce la comprensione attraverso una classica applicazione.

Dunque, nel caso in cui venga emesso un fotone sofficce da parte della particella  $p_n$ , la matrice  $S$  (4.1) si scriverà come:

$$S_{\pm 1}(\mathbf{q}, p_n) = \frac{\mathcal{C}_1 e_n [p_n \cdot \epsilon_{\pm}^*(\hat{\mathbf{q}})] \delta_{\sigma_J \sigma'_J}}{\sqrt{2|\mathbf{q}|}}, \quad (4.6)$$

e nel caso in cui venga emesso un gravitone sofficce come:

$$S_{\pm 2}(\mathbf{q}, p_n) = \frac{\mathcal{C}_2 f_n [p_n \cdot \epsilon_{\pm}^*(\hat{\mathbf{q}})]^2 \delta_{\sigma_J \sigma'_J}}{\sqrt{2|\mathbf{q}|}}, \quad (4.7)$$

dove  $p_n \cdot \epsilon_{\pm}^* \equiv p_{n\mu} \epsilon_{\pm}^{\mu*}(\hat{\mathbf{q}})$ . Più in generale, per l'emissione di una particella sofficce a elicità intera  $\pm\sigma$  ( $\sigma = 3, 4, \dots$ ) da parte di una particella  $p_n$  con  $J > 0$  si avrà:

$$S_{\pm\sigma}(\mathbf{q}, p_n) = \frac{\mathcal{C}_{(\sigma)} g_n^{(\sigma)} [p_n \cdot \epsilon_{\pm}^*(\hat{\mathbf{q}})]^{\sigma} \delta_{\sigma_J \sigma'_J}}{\sqrt{2|\mathbf{q}|}}. \quad (4.8)$$

Prima di concludere questo paragrafo si vuole far osservare che l'espressione del vertice (4.8) differisce per un fattore  $1/2E(\mathbf{p}_n)$  rispetto a quello della (4.16) dell'articolo di Weinberg<sup>[2]</sup>. La ragione di tale differenza risiede nel fatto che Weinberg, per arrivare alla definizione di carica elettrica e carica gravitazionale, riporta implicitamente tutto in funzione della parte spaziale  $\mathbf{p}_n$ . La misura d'integrazione Lorentz-invariante nel caso spaziale è proprio  $d\mu = d^3\mathbf{p}/2E(\mathbf{p})$ . Si può scegliere, tuttavia, di definire la misura come  $d\tilde{\mu} = d^3\mathbf{p}$  e aggiungere il fattore  $1/2E(\mathbf{p})$  a tutte le funzioni che sono possibili oggetto di integrazioni. In questa tesi, invece, a meno dei punti in cui è espressamente chiarito, la misura adottata è quella 4-dimensionale Lorentz-invariante  $d\mu_L = d^4p$  e quindi non va aggiunto il fattore  $1/2E(\mathbf{p})$  nelle ampiezze di vertice. Si noti, infine, che il fattore discusso è già apparso nella (3.36) dopo aver effettuato un'integrazione in  $p^0$ .

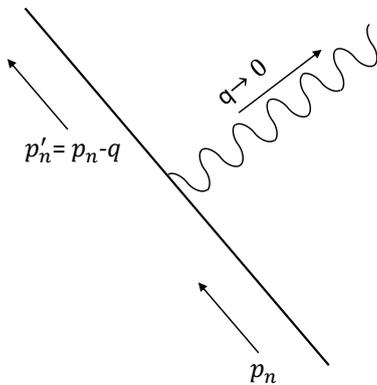


Figura 4.1: Diagramma del singolo vertice di emissione.

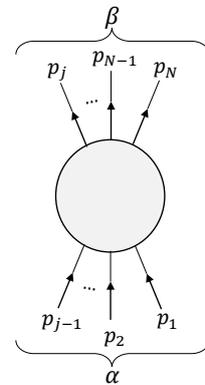


Figura 4.2: Diagramma del processo  $S_{\alpha \rightarrow \beta}$ .

## 4.2 Conservazione della carica elettrica e principio di equivalenza

Sia  $S_{\alpha \rightarrow \beta}$  la matrice  $S$  descrivente un processo  $\alpha \rightarrow \beta$  (Fig. 4.2) che coinvolge diverse specie di particelle con quadrimpulsi  $p_1^\mu, p_2^\mu, \dots, p_n^\mu, \dots, p_N^\mu$ . Sia inoltre  $S_{\alpha \rightarrow \beta}^{\pm\sigma}$  la matrice  $S$  del processo  $\alpha \simeq \alpha' \rightarrow \beta' \simeq \beta$ , differente dal precedente solo per il fatto che in esso venga emessa una particella massless *soffice* a elicità intera  $\pm\sigma$  e quadrimpulso  $q^\mu$ . La  $S_{\alpha \rightarrow \beta}^{\pm\sigma}$ , in accordo con un approccio perturbativo, può essere pensata come una somma di termini che descrivono processi in cui la particella soffice viene emessa da una linea *esterna* di particelle entranti  $\alpha$  o uscenti  $\beta$ , più una somma di termini che rappresentano i processi in cui la particella viene invece emessa da linee *interne* (Fig. 4.3). Essendo  $\beta' \simeq \beta$  o  $\alpha' \simeq \alpha$  nel limite soffice, allora i diversi termini della somma sono ragionevolmente ottenibili<sup>‡</sup> come il prodotto di un'ampiezza  $S_{\alpha \rightarrow \beta}$  che descrive il verificarsi del processo  $\alpha \rightarrow \beta$  e che è comune a tutti i termini, per la particolare ampiezza di vertice di emissione della particella soffice che contiene i propagatori (relativi alla linea che connette il punto di emissione al resto del diagramma) ed è differente da termine a termine poiché dipende dalla specie della particella emittente e dal tipo di linea emittente (interna o esterna). La parte dell'ampiezza non comune a tutti i termini sarà indicata con  $S_{\pm\sigma, n}(\mathbf{q}, p_n)$  quando la particella soffice è attaccata a una linea  $n$  esterna ( $n = 1, 2, \dots, j-1, j, \dots, N$ ), mentre, per ragioni che saranno chiare a breve, non sarà specificata la forma di questa quando è attaccata a linee interne. Riassumendo in formule, si è arrivati al risultato secondo cui, nel limite  $|\mathbf{q}| \rightarrow 0$ :

$$S_{\alpha \rightarrow \beta}^{\pm\sigma} = S_{\alpha \rightarrow \beta} \cdot \left[ \sum_{n=\alpha, \beta} (S_{\pm\sigma, n}(\mathbf{q}, p_n)) + \sum_{INT} (...) \right], \quad (4.9)$$

dove con  $\sum_{INT}(...)$  si intende la somma delle ampiezze specifiche dei processi in cui la particella soffice è attaccata a una linea interna, mentre  $\sum_{n=\alpha, \beta}$  è la somma di tutte quelle in cui è emessa da linee esterne. Questa fattorizzazione, in realtà, è più significativa della semplice ragionevolezza del discorso appena fatto: essa è una diretta conseguenza del *principio di decomposizione in cluster* che afferma che processi fisici che avvengano in regioni spaziali sufficientemente distanti debbano produrre risultati scorrelati e, conseguentemente, una matrice  $S$  del processo totale fattorizzabile nelle matrici  $S$  dei singoli processi.<sup>§</sup> Nel caso specifico, si può pensare applicabile questo principio se si tiene in mente la relazione di indeterminazione posizione-momento: per esempio, nel caso dell'emissione da parte della particella  $p'_j$  (situazione descritta nel terzo diagramma della Fig. 4.3), quanto più è piccolo il momento  $q$  della particella soffice emessa, tanto più piccola sarà l'incertezza  $\Delta p'_j$  (essendo  $p_j$  proprio quello misurato e  $p'_j \simeq p_j$ ) e tanto più grande sarà la  $\Delta x'_j$  che rappresenta l'indeterminazione sulla distanza percorsa dalla particella prima dell'emissione, per cui, quest'ultima può anche essere molto grande.

È facile specificare l'ampiezza  $S_{\pm\sigma, n}(\mathbf{q}, p_n)$  quando la particella soffice è attaccata a una linea esterna. Essa sarà data dall'ampiezza del vertice d'emissione (4.8) multi-

<sup>‡</sup>La fattorizzabilità di  $S_{\alpha \rightarrow \beta}^{\pm\sigma}$  è esplicitamente dimostrata nella sezione 6.1] del libro di J. M. Jauch e F. Rohrlich<sup>[45]</sup>

<sup>§</sup>L'argomento è ben approfondito nel Capitolo 4 del libro di S. Weinberg<sup>[6]</sup> e nel libro di D. Iagolnitzer<sup>[25]</sup>.

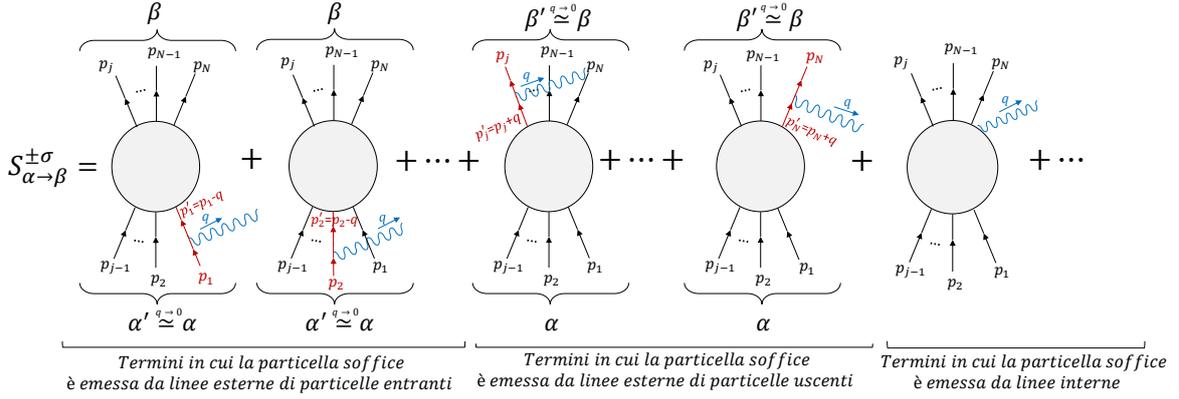


Figura 4.3: Espressione diagrammatica dei termini la cui somma restituisce  $S_{\alpha \rightarrow \beta}^{\pm \sigma}$ .

plicata per un ulteriore propagatore (espresso nello "spazio" dei momenti come nella (3.35)) che è associato alla linea che connette il punto di emissione di  $q$  al resto del diagramma, cioè associato alla particella indicata in Fig. 4.3 come  $p'_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ). Il propagatore impone la struttura a poli della matrice  $S$ . Si osservi che le particelle entranti o uscenti, essendo proprio le particelle fisiche che si osservano, sono *on-shell*, cioè vale  $p_n^2 = -m_n^2$ . Per la stessa ragione, anche la particella soffice emessa è *on-shell*, per cui  $q^2 = 0$ . Il propagatore relativistico (nello "spazio" dei momenti) associato alle particelle  $p'_n$  ha una diversa espressione a seconda che la particella soffice sia attaccata a una linea esterna di particelle entranti o a una linea esterna di particelle uscenti<sup>‡</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p_n - q)^2 + m_n^2} &= -\frac{1}{2p_n \cdot q} && \text{(particella } n \text{ entrante),} \\ \frac{1}{(p_n + q)^2 + m_n^2} &= +\frac{1}{2p_n \cdot q} && \text{(particella } n \text{ uscente),} \end{aligned} \quad (4.10)$$

dove con  $p_n \cdot q \equiv p_{n\mu} q^\mu$ . Allora, a meno di fattori costanti, la  $S_{\pm\sigma,n}(\mathbf{q}, p_n)$  nel limite soffice sarà:

$$S_{\pm\sigma,n}(\mathbf{q}, p_n) \propto \frac{\eta_n g_n^{(\sigma)} [p_n \cdot \epsilon_{\pm}^*(\hat{\mathbf{q}})]^\sigma \delta_{\sigma_J \sigma'_J}}{\sqrt{|\mathbf{q}|} p_n \cdot q}. \quad (4.11)$$

dove  $\eta_n = +1$  se  $n$  è una particella uscente e  $\eta_n = -1$  se è una particella entrante.

Nel caso in cui la particella soffice emessa sia attaccata a una linea interna, invece, nella relativa ampiezza non comparirà un fattore di propagazione divergente del tipo  $(p_n \cdot q)^{-1}$  poiché le linee interne descrivono delle particelle, dette *virtuali*, che non sono fisicamente osservabili e quindi esse sono *off-shell*, cioè con  $p^2 \neq -m^2$ ; pertanto, non si può fare per le linee interne la stessa trattazione sul propagatore vista sopra per le linee esterne, la quale ha dato luogo, proprio grazie alla validità della relazione di dispersione  $p^2 = -m^2$ , al polo  $(p_n \cdot q)^{-1}$  per  $q \rightarrow 0$ . Questo fa intuire che, nel limite  $q \rightarrow 0$ , sebbene siano non nulli i termini dovuti all'emissione della particella soffice da parte di una linea interna, essi sono sottodominanti rispetto a quelli in cui l'emissione

<sup>‡</sup>Si sta tacitamente facendo l'assunzione che la particella virtuale  $p'_n$  abbia la stessa massa della particella reale  $p_n$ . In realtà, ciò si dimostra rigorosamente in teoria quantistica dei campi a partire dalla simmetria di gauge.

avviene a partire da una linea esterna e, per questa ragione, si possono trascurare tutti i termini della  $\sum_{INT}(\dots)$  rispetto a quelli della  $\sum_{n=\alpha,\beta}(\dots)$ . Una dimostrazione più rigorosa di questo semplice ragionamento è presente nel testo di J. M. Jauch e F. Rohrlich<sup>[45]</sup> o nell'articolo di R. Jackiw<sup>[46]</sup> che generalizza quello di F.E. Low<sup>[47]</sup>.

Da quanto argomentato, si può affermare che i termini che contano nel computo della  $S_{\alpha \rightarrow \beta}^{\pm\sigma}$  nel limite sofficie sono proprio i soli  $S_{\pm\sigma,n}(\mathbf{q}, p_n)$ , per cui la (4.9) diventa:

$$S_{\alpha \rightarrow \beta}^{\pm\sigma} \propto S_{\alpha \rightarrow \beta} \cdot \left[ \sum_{n=\alpha,\beta} \frac{\eta_n g_n^{(\sigma)} [p_n \cdot \epsilon_{\pm}^*(\hat{\mathbf{q}})]^{\sigma} \delta_{\sigma_J \sigma'_J}}{\sqrt{|\mathbf{q}|} p_n \cdot q} \right]. \quad (4.12)$$

Nel caso in cui la particella emessa sia un fotone, la (4.12) si può riscrivere, in accordo con le notazioni del [Paragrafo 4.1](#), come:

$$S_{\alpha \rightarrow \beta}^{\pm 1} \propto S_{\alpha \rightarrow \beta} \cdot \left[ \sum_{n=\alpha,\beta} \frac{\eta_n e_n [p_n \cdot \epsilon_{\pm}^*(\hat{\mathbf{q}})] \delta_{\sigma_J \sigma'_J}}{\sqrt{|\mathbf{q}|} p_n \cdot q} \right], \quad (4.13)$$

mentre, nel caso dell'emissione di un gravitone, come:

$$S_{\alpha \rightarrow \beta}^{\pm 2} \propto S_{\alpha \rightarrow \beta} \cdot \left[ \sum_{n=\alpha,\beta} \frac{\eta_n f_n [p_n \cdot \epsilon_{\pm}^*(\hat{\mathbf{q}})]^2 \delta_{\sigma_J \sigma'_J}}{\sqrt{|\mathbf{q}|} p_n \cdot q} \right]. \quad (4.14)$$

Le espressioni (4.13) e (4.14) sono proprio della forma (2.36). È utile riconoscere nella (4.13) la funzione  $M$  nel caso dell'emissione di un fotone sofficie:

$$M^{\mu}(\mathbf{q}, \alpha \rightarrow \beta) = \mathcal{N}_1 S_{\alpha \rightarrow \beta} \cdot \left[ \sum_{n=\alpha,\beta} \frac{\eta_n e_n p_n^{\mu} \delta_{\sigma_J \sigma'_J}}{p_n \cdot q} \right], \quad (4.15)$$

e la funzione  $M$  nel caso dell'emissione di un gravitone sofficie:

$$M^{\mu\nu}(\mathbf{q}, \alpha \rightarrow \beta) = \mathcal{N}_2 S_{\alpha \rightarrow \beta} \cdot \left[ \sum_{n=\alpha,\beta} \frac{\eta_n f_n p_n^{\mu} p_n^{\nu} \delta_{\sigma_J \sigma'_J}}{p_n \cdot q} \right], \quad (4.16)$$

dove le  $\mathcal{N}_1$  e  $\mathcal{N}_2$  sono due costanti. Come visto nel [Paragrafo 2.3](#), la sola covarianza della funzione  $M$  non è sufficiente a garantire la Lorentz-invarianza della matrice  $S$ . Per imporre la Lorentz-invarianza della matrice  $S$  bisogna richiedere che sia verificata la condizione di conservazione (2.44). Nel caso dell'emissione di un fotone questa condizione da soddisfare è proprio la (2.46) che, in termini della funzione  $M$  esplicita (4.15), corrisponde col richiedere che sia verificata la:

$$\sum_{n=\alpha,\beta} \eta_n e_n = 0. \quad (4.17)$$

Ricordando che  $\eta_n = +1$  se la particella emittente è in  $\beta$  e  $\eta_n = -1$  se la particella emittente è in  $\alpha$  e che la costante di accoppiamento  $e_n$  è stata identificata con la carica elettrica della particella emittente  $p_n$ , allora la (4.17) corrisponde proprio alla

*conservazione della carica elettrica* nella reazione  $\alpha \rightarrow \beta$ . In conclusione, affinché la matrice S costruita per l'emissione di un fotone soffice risulti Lorentz-invariante, la somma delle cariche delle particelle entranti  $\alpha$  deve essere uguale alla somma delle cariche delle particelle uscenti  $\beta$ :

$$\sum_{n=\alpha,\beta} \eta_n e_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=\beta} e_n - \sum_{n=\alpha} e_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=\beta} e_n = \sum_{n=\alpha} e_n. \quad (4.18)$$

Analogamente, imporre la Lorentz-invarianza della matrice S descrivente l'emissione di un gravitone soffice, significa imporre la condizione di conservazione su  $M$  (2.49). In termini della funzione  $M$  nella forma esplicita (4.14), questa richiesta corrisponde col verificarsi della:

$$\sum_{n=\alpha,\beta} \eta_n f_n p_n^\mu = 0. \quad (4.19)$$

La reazione  $\alpha \rightarrow \beta$  può essere una reazione qualunque e quindi i quadrimpulsi  $p_n^\mu$  sono arbitrari, meno che per il fatto che essi debbano soddisfare la conservazione del quadrimpulso totale (2.31) che è una diretta conseguenza della stessa Lorentz-invarianza della matrice S (si veda il [Paragrafo 2.2](#)). Nel caso in questione, si può scrivere la conservazione del quadrimpulso totale come:

$$\sum_{n=\alpha,\beta} \eta_n p_n^\mu = 0. \quad (4.20)$$

L'unico modo affinché la (4.19) possa essere verificata qualsiasi siano i  $p_n^\mu$  soddisfacenti la (4.20), è quello secondo cui *tutte* le particelle  $p_n$  abbiano costanti di accoppiamento alla particella soffice  $f_n$  uguali tra loro, cioè la costante di accoppiamento gravitazionale a basse energie è *universale*:

$$f_n = f \quad \forall n. \quad (4.21)$$

Si noti che in *tutte* le particelle sono inclusi anche i fotoni e i gravitoni stessi: questo risultato, dunque, è in accordo sia con l'esperimento di L. Eötvös e R. H. Dicke secondo cui, per particelle massive a riposo, la massa inerziale è uguale alla massa gravitazionale, sia con l'esperimento di A. Eddington riguardante la deflessione della luce da parte del Sole. Come afferma Weinberg<sup>[23]</sup> «*non c'è una teoria Lorentz-invariante in cui i gravitoni soffici non interagiscono con fotoni e gravitoni diversamente da quanto fanno con le particelle massive*». In accordo con il risultato (4.21) e con le identificazioni (4.4)-(4.5), si può affermare che dall'assunzione di Lorentz-invarianza della matrice S segue che, nel limite soffice, le particelle massless a elicità  $\pm 2$ , qui chiamate gravitoni, debbano accoppiarsi allo stesso modo a tutte le forme di energia e momento. Questo risultato, confrontato anche con ciò che si è visto nel [Paragrafo 4.2](#), va oltre la sola dimostrazione del *principio di equivalenza*.

Infine, le dimostrazioni svolte consentono di dedurre un altro risultato interessante. Dall'ampiezza (4.12) di un processo di emissione di una particella massless soffice a elicità  $\pm\sigma$  con  $\sigma = 3, 4, \dots$ , è facile ricavarne, grazie al confronto con la (2.36), la funzione  $M$  del processo:

$$M^{\mu_1, \dots, \mu_\sigma} = \mathcal{N}_{(\sigma)} S_{\alpha \rightarrow \beta} \cdot \left[ \sum_{n=\alpha,\beta} \frac{\eta_n g_n^{(\sigma)} [p_n^{\mu_1} \dots p_n^{\mu_\sigma}] \delta_{\sigma_J \sigma'_J}}{\sqrt{|\mathbf{q}|} p_n \cdot q} \right]. \quad (4.22)$$

La condizione di conservazione (2.44) che impone la Lorentz-invarianza della matrice S, sulla base della (4.22) si può esplicitare come:

$$\sum_{n=\alpha,\beta} \eta_n g_n^{(\sigma)} [p_n \cdot \epsilon_{\pm}^*(\hat{\mathbf{q}})]^{\sigma-1} = 0. \quad (4.23)$$

Quest'ultima può anche essere riscritta come:

$$\sum_{n=\alpha,\beta} \eta_n g_n^{(\sigma)} p_n^{\mu_1} \dots p_n^{\mu_{\sigma-1}} = 0. \quad (4.24)$$

A meno dei casi in cui  $\sigma = 1$  e  $\sigma = 2$  che sono stati già affrontati, non esiste alcun modo di verificare la (4.23) per *tutti* i possibili quadrimomenti  $p_1^\mu, p_2^\mu, \dots, p_n^\mu, \dots, p_N^\mu$  soddisfacenti la conservazione del quadrimpulso totale (4.20). Questo non significa che le particelle massless a elicità intera  $\sigma > 2$  non possano esistere, ma solo che esse nel limite di bassa energia non possano avere accoppiamenti che permangono con qualsivoglia forma di energia o impulso. Di conseguenza, questo comportamento non rende candidabili le particelle massless a elicità intera  $\sigma \geq 3$  come possibili particelle che descrivono la gravità, poiché quest'ultima si sperimenta anche nel limite di basse energie e, più in generale, esse non possono essere mediatrici di forze che seguono la legge dell'inverso del quadrato della distanza.

# Conclusioni

In questo lavoro di tesi, si sono innanzitutto affrontati alcuni degli argomenti di basilare importanza nella fisica moderna, quali l'impiego delle trasformazioni di simmetria in fisica nel [Capitolo 1](#), il problema dello scattering e la definizione della matrice S nel [Capitolo 2](#), la teoria dei propagatori e il ruolo della causalità nel [Capitolo 3](#). Si sono così costruiti degli strumenti funzionali alla dimostrazione del *Teorema di Weinberg* proposta nel [Capitolo 4](#). Il teorema afferma che, dalle sole assunzioni di struttura a poli della matrice S come quella della teoria delle perturbazioni e di Lorentz-invarianza della matrice S in un processo di scattering con  $N$  particelle esterne e in cui venga emessa, da una di queste, un'ulteriore particella massless a elicità intera  $\pm\sigma$  di bassa energia e di quadrimpulso  $q^\mu = (\mathbf{q}, |\mathbf{q}|)^T$ , si ritrova che debba essere soddisfatta la seguente condizione di ordine  $\sigma - 1$  negli  $N$  momenti esterni  $p_1^\mu, \dots, p_N^\mu$ :

$$\sum_{i=1}^N g_i^{(\sigma)} p_i^{\mu_1} \dots p_i^{\mu_{\sigma-1}} = 0,$$

dove  $g_i^{(\sigma)}$  è la costante di accoppiamento tra l' $i$ -esima particella emittente e la particella massless emessa. Nei casi in cui  $\sigma = 1$  e  $\sigma = 2$ , il verificarsi della condizione di conservazione appena vista ha per conseguenze la validità del "principio" di equivalenza e della conservazione della carica elettrica. Questi ultimi due sono solitamente assunti come principi in due teorie *distinte*, mentre qui vengono ricavati come dei teoremi in una *stessa* teoria. Nel caso di  $\sigma > 2$ , invece, si ritrova che le particelle massless a basse energie non possano interagire con nessuna forma di energia o momento. Inoltre, dalle medesime assunzioni, discende anche che la matrice S debba essere invariante sotto trasformazioni di gauge dei vettori polarizzazione  $\epsilon_\pm^\mu(\hat{\mathbf{q}})$ :

$$\epsilon_\pm^\mu(\hat{\mathbf{q}}) \rightarrow \epsilon_\pm^\mu(\hat{\mathbf{q}}) + \lambda_\pm(\mathbf{q})q^\mu,$$

con  $\lambda_\pm(\mathbf{q})$  che è una funzione arbitraria.

Prima di concludere, si vuole fare una precisazione: in alcuni passaggi della dimostrazione non si è avuto un rigore impeccabile e ciò è giustificato dal fatto che tuttora non esista una formulazione completa della teoria della matrice S. Per esempio, è generalmente ignoto come le proprietà di analiticità della matrice S siano legate alla condizione di causalità<sup>[24]</sup>. Ciononostante, si è scelto di studiare il Teorema di Weinberg e di ripercorrerne la trattazione storica del 1964<sup>[2]</sup> per diverse ragioni, due delle quali sono:

- la teoria della matrice S, così come afferma lo stesso Weinberg<sup>[33]</sup>, è in parte viva all'interno di altre teorie moderne. Parafrasando delle sue parole<sup>[33]</sup>, si può dire che le teorie effettive di campo attuali hanno una filosofia simile a quella che si

era prefissata la teoria della matrice  $S$  e che una teoria quantistica di campo è in realtà l'attuazione pratica di una teoria della matrice  $S$ ;

- è istruttivo vedere come un tentativo di questo genere incarni lo spirito riduzionista e unificatore degli scienziati. Lo scopo teoretico alla base è quello di voler costruire una teoria fisica fondata sul numero minimo di principi quanto più universali possibili. Ciò consentirebbe di poter unificare in una *stessa* descrizione un'ampia classe di fenomeni che sono relativi ai diversi tipi di interazione e che vengono descritti da diversi tipi di teorie.

Infine, come si può evincere dal suo articolo<sup>[2]</sup>, tutta la trattazione portata avanti da Weinberg è stata motivata anche da un'assunzione implicita: credere che una simile teoria potesse esistere.

# Appendice A

## A.1 Scelta di $L_p$ per la classe $(0_+, \sigma)$

Nel caso di particelle massless, la convenzione che si sceglie per  $L_p$ <sup>[2,23]</sup>, cioè per le trasformazioni che portano  $k^\mu = (0, 0, \kappa, \kappa)^T$  nell'effettivo impulso della particella  $p^\mu = (\mathbf{p}, |\mathbf{p}|)^T$ , è la seguente:

$$L_p \equiv L(\mathbf{p}) \equiv R(\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|), \quad (\text{A.1})$$

dove  $B(|\mathbf{p}|)$  è un boost lungo la direzione del terzo asse (cioè quella di  $\hat{\mathbf{k}}$ ) che porta la particella di energia  $\kappa$  ad avere energia  $|\mathbf{p}|$ :

$$B(|\mathbf{p}|) \equiv \{B^\mu{}_\nu(\mathbf{p})\} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\left(\ln \frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right) & \sinh\left(\ln \frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right) \\ 0 & 0 & \sinh\left(\ln \frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right) & \cosh\left(\ln \frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

mentre  $R(\hat{\mathbf{p}})$  è una rotazione nel piano che contiene  $\hat{\mathbf{k}}$  e  $\hat{\mathbf{p}}$  e che porta la direzione del terzo asse (cioè quella di  $\hat{\mathbf{k}}$ ) a coincidere con quella di  $\hat{\mathbf{p}}$ . Scegliendo un certo sistema di riferimento che consenta di scrivere  $\hat{\mathbf{p}}$  come:

$$\hat{\mathbf{p}} = (-\sin(\Theta) \cos(\Phi), \sin(\Theta) \sin(\Phi), \cos(\Theta))^T, \quad (\text{A.3})$$

allora  $R^\mu{}_\nu(\hat{\mathbf{p}})$  sarà rappresentabile come la rotazione con angoli di Eulero  $(0, \beta, \gamma)$ :

$$R(\hat{\mathbf{p}}) \equiv \{R^\mu{}_\nu(\hat{\mathbf{p}})\} \doteq \begin{pmatrix} \cos(\Theta) \cos(\Phi) & \sin(\Phi) & -\sin(\Theta) \cos(\Phi) & 0 \\ -\cos(\Theta) \sin(\Phi) & \cos(\Phi) & \sin(\Theta) \sin(\Phi) & 0 \\ \sin(\Theta) & 0 & \cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Vettori polarizzazione

È utile definire i "vettori"<sup>‡</sup> polarizzazione trasversale<sup>[2,23]</sup>  $\epsilon_\pm^\mu(\hat{\mathbf{p}})$  per una particella massless con momento diretto lungo  $\hat{\mathbf{p}}$ :

$$\epsilon_\pm^\mu(\hat{\mathbf{p}}) \equiv R^\mu{}_\nu(\hat{\mathbf{p}})\epsilon_\pm^\nu, \quad (\text{A.5})$$

---

<sup>‡</sup>Si vedrà che questi non si trasformano come quadrivettori.

dove  $\epsilon_{\pm}^{\mu}$  è la polarizzazione per una particella con momento diretto lungo  $\hat{\mathbf{k}}$ :

$$\epsilon_{\pm}^{\mu} \equiv \epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{\mathbf{k}}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0, 0)^{T\dagger}. \quad (\text{A.6})$$

Dalle (A.4)-(A.6) discende che:

$$\epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{\mathbf{p}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(\Theta) \cos(\Phi) \pm i \sin(\Phi), \cos(\Theta) \sin(\Phi) \pm i \cos(\Phi), \sin(\Theta), 0)^T. \quad (\text{A.7})$$

Dal momento che  $B(\mathbf{p})$  non ha alcun effetto su  $\epsilon_{\pm}^{\mu}$  allora si può anche scrivere la (A.5) come:

$$\epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{\mathbf{p}}) = L^{\mu}_{\nu}(\mathbf{p})\epsilon_{\pm}^{\nu}. \quad (\text{A.8})$$

È immediato verificare le seguenti proprietà di  $\epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{\mathbf{p}})$ :

$$\epsilon_{\pm\mu}^*(\mathbf{p})\epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{\mathbf{p}}) = 1, \quad (\text{A.9-1})$$

$$\epsilon_{\pm\mu}(\mathbf{p})\epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{\mathbf{p}}) = 0, \quad (\text{A.9-2})$$

$$\epsilon_{\pm}^{\mu*}(\mathbf{p}) = \epsilon_{\mp\mu}(\mathbf{p}), \quad (\text{A.9-3})$$

$$\epsilon_{\pm}^0(\hat{\mathbf{p}}) = 0, \quad (\text{A.9-4})$$

$$p_{\mu}\epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{\mathbf{p}}) = 0. \quad (\text{A.9-5})$$

In generale, non è sufficiente che un oggetto matematico sia descritto da indici per poter essere un tensore, ma c'è bisogno che questo rispetti delle opportune leggi di trasformazione. Si mostrerà<sup>[23]</sup> che, sebbene  $\epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{\mathbf{q}})$  sia chiamato vettore, esso non lo è poiché non si trasforma come tale. Il comportamento dei vettori polarizzazione sotto trasformazioni di Lorentz può essere trovato considerando:

$$\begin{aligned} (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\eta}\epsilon_{\pm}^{\eta}(\Lambda\hat{\mathbf{p}}) &= [\Lambda^{-1}L(\Lambda\mathbf{p})]^{\mu}_{\eta}\epsilon_{\pm}^{\eta} \\ &= L^{\mu}_{\nu}(\mathbf{p}) [L^{-1}(\mathbf{p})\Lambda^{-1}L(\Lambda\mathbf{p})]^{\nu}_{\eta}\epsilon_{\pm}^{\eta}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

da cui si vede subito che la trasformazione  $\tilde{W}(\Lambda, \mathbf{p}) \equiv L^{-1}(\mathbf{p})\Lambda^{-1}L(\Lambda\mathbf{p})$  appartiene al gruppo piccolo, poiché essa lascia il quadrivettore  $k^{\mu} = (0, 0, \kappa, \kappa)^T$  invariato. Quindi, essa può essere rappresentata nella forma (1.56), con parametri definiti da  $\alpha(\tilde{W}), \beta(\tilde{W}), \theta(\tilde{W})$ . Da questa, si può immediatamente ricavare come si trasforma  $\epsilon_{\pm}^{\eta}$  sotto una trasformazione  $\tilde{W}(\Lambda, \mathbf{p})$ :

$$\tilde{W}^{\nu}_{\eta}\epsilon_{\pm}^{\eta} = \exp(\pm i\theta(\Lambda, \mathbf{p}))\epsilon_{\pm}^{\nu} + X_{\pm}(\Lambda, \mathbf{p})k^{\nu}, \quad (\text{A.11})$$

dove:

$$\theta(\Lambda, \mathbf{p}) \equiv \theta(\tilde{W}(\Lambda, \mathbf{p})), \quad (\text{A.12-1})$$

$$X_{\pm}(\Lambda, \mathbf{p}) \equiv \frac{\alpha(\tilde{W}(\Lambda, \mathbf{p})) \pm i\beta(\tilde{W}(\Lambda, \mathbf{p}))}{\kappa\sqrt{2}}. \quad (\text{A.12-2})$$

Usando le (A.8) e (A.11) nella (A.10) si ricava:

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\eta}\epsilon_{\pm}^{\eta}(\Lambda\hat{\mathbf{p}}) = \exp(\pm i\theta(\Lambda, \mathbf{p}))\epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{\mathbf{p}}) + X_{\pm}(\Lambda, \mathbf{p})p^{\mu}. \quad (\text{A.13})$$

---

<sup>†</sup>Si sta sottintendendo di stare in una generalizzazione della *gauge di Coulomb* elettromagnetica: esistono solo due "vettori" polarizzazione indipendenti ed entrambi sono ortogonali alla direzione di propagazione della particella massless, cioè  $p_i\epsilon_{\pm}^i(\hat{\mathbf{p}}) = 0$ . Inoltre, per essi vale  $\epsilon_{\pm}^0 \equiv 0$ <sup>[6]</sup>.

La (A.13) mostra che  $\epsilon_{\pm}^{\mu}$  non è un quadrivettore, poiché c'è il termine aggiuntivo  $X_{\pm}(\Lambda, \mathbf{p})p^{\mu}$  che rende la trasformazione non tensoriale. Si può trovare un'espressione di  $X_{\pm}(\Lambda, \mathbf{p})$  in termini di  $\epsilon_{\pm}(\hat{\mathbf{p}})$  valutando la (A.13) in  $\mu = 0$ :

$$X_{\pm}(\Lambda, \mathbf{p})|\mathbf{p}| = (\Lambda^{-1})^0_{\eta} \epsilon_{\pm}^{\eta}(\Lambda \hat{\mathbf{p}}). \quad (\text{A.14})$$

Sfruttando la (A.14), la (A.13) può risciversi come:

$$\left( (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\eta} - (\Lambda^{-1})^0_{\eta} \frac{p^{\mu}}{|\mathbf{p}|} \right) \epsilon_{\pm}^{\eta}(\Lambda \hat{\mathbf{p}}) = \exp(\pm i\theta(\Lambda, \mathbf{p})) \epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{\mathbf{p}}), \quad (\text{A.15})$$

o, ricordando che  $\epsilon_{\pm}^0 = 0$ , come:

$$\left( (\Lambda^{-1})^j_i - (\Lambda^{-1})^0_i \frac{p^j}{|\mathbf{p}|} \right) \epsilon_{\pm}^i(\Lambda \hat{\mathbf{p}}) = \exp(\pm i\theta(\Lambda, \mathbf{p})) \epsilon_{\pm}^j(\hat{\mathbf{p}}). \quad (\text{A.16})$$

Quest'ultima mette in evidenza il fatto che l'angolo  $\theta(\Lambda, \mathbf{p})$  non dipenda da  $|\mathbf{p}|$ .

### A.3 Costruzione della "funzione $M$ "<sup>[2]</sup>

Si consideri un processo  $\alpha \rightarrow \alpha'$  in cui viene emessa una particella massless con impulso  $\mathbf{q}$  ed elicità intera  $\pm\sigma$ . Tutte le variabili delle altre particelle (supposte per comodità *scalari*, cosicché abbiano rappresentazione di Lorentz banale) sono raccolte nell'etichetta  $p$  che contiene le informazioni sui vari quadrimpulsi, sugli spin per le particelle massive, sulle elicità per particelle massless e così via. Si divida l'insieme di tutte le possibili  $\{\mathbf{q}, p\}$  in classi di equivalenza disgiunte: la  $\{\mathbf{q}', p'\}$  è in relazione d'equivalenza con  $\{\mathbf{q}, p\}$  se e solo se esse sono ottenibili l'una dall'altra attraverso una trasformazione di Lorentz<sup>‡</sup>. Per l'assioma della scelta, si può prendere arbitrariamente un rappresentante per ogni classe e ognuno di questi sarà indicato con  $\{\mathbf{q}_c, p_c\}$  (questa argomentazione è una generalizzazione di quanto visto nel §1.4 del [Capitolo 1](#)). Questo corrisponde a scegliere un particolare SRI in cui le particelle in gioco vengono osservate con variabili  $\mathbf{q}_c$  e  $p_c$ . Per ogni  $\{\mathbf{q}, p\}$  di una data classe esisterà una trasformazione di Lorentz  $L^{\mu}_{\nu}(\mathbf{q}, p)$  tale che, scelta la  $\{\mathbf{q}_c, p_c\}$  nella medesima classe, restituisca:

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}(\mathbf{q}, p)\mathbf{q}_c, \quad p = L(\mathbf{q}, p)p_c. \quad (\text{A.17})$$

Tenendo presente la proprietà (A.9-1), è possibile costruire una funzione  $M_{\pm}(\mathbf{q}_c, p_c)$  che soddisfi la (2.36) per i fissati  $\{\mathbf{q}_c, p_c\}$  di ogni classe. Ciò si verifica definendo:

$$M_{\pm}^{\mu_1, \dots, \mu_{\sigma}}(\mathbf{q}_c, p_c) \equiv \sqrt{2|\mathbf{q}_c|} \epsilon_{\pm}^{\mu_1}(\hat{\mathbf{q}}_c) \dots \epsilon_{\pm}^{\mu_{\sigma}}(\hat{\mathbf{q}}_c) S_{\pm\sigma}(\mathbf{q}_c, p_c). \quad (\text{A.18})$$

Quest'ultima, si può generalizzare a un SRI generico in cui le particelle vengano osservate con variabili  $\mathbf{q}, p$  nel modo seguente:

$$M_{\pm}^{\mu_1, \dots, \mu_{\sigma}}(\mathbf{q}, p) \equiv L^{\mu_1}_{\nu_1}(\mathbf{q}, p) \dots L^{\mu_{\sigma}}_{\nu_{\sigma}}(\mathbf{q}, p) M_{\pm}^{\nu_1, \dots, \nu_{\sigma}}(\mathbf{q}_c, p_c). \quad (\text{A.19})$$

<sup>‡</sup>Il fatto che sia una relazione d'equivalenza discende dalle proprietà definenti del gruppo di Lorentz (elemento neutro, inverso e regola di prodotto).

Si può subito dimostrare che la  $M_{\pm}(\mathbf{q}, p)$  così definita è un tensore simmetrico. Infatti:

$$\begin{aligned} M_{\pm}^{\mu_1, \dots, \mu_{\sigma}}(\mathbf{q}, p) &= L^{\mu_1}_{\nu_1}(\mathbf{q}, p) \dots L^{\mu_{\sigma}}_{\nu_{\sigma}}(\mathbf{q}, p) \times \\ &\times L_{\rho_1}^{\nu_1}(\Lambda \mathbf{q}, \Lambda p) \dots L_{\rho_{\sigma}}^{\nu_{\sigma}}(\Lambda \mathbf{q}, \Lambda p) M_{\pm}^{\rho_1, \dots, \rho_{\sigma}}(\Lambda \mathbf{q}, \Lambda p), \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

da cui, osservando che  $L(\mathbf{q}, p)L^{-1}(\Lambda \mathbf{q}, \Lambda p)$  corrisponde alla trasformazione  $\Lambda^{-1}$  poiché trasforma  $\{\Lambda \mathbf{q}, \Lambda p\} \rightarrow \{\mathbf{q}_c, p_c\} \rightarrow \{\Lambda \mathbf{q}, \Lambda p\}$ , si ottiene la legge di trasformazione covariante che mette in luce il carattere tensoriale di  $M_{\pm}$ :

$$M_{\pm}^{\mu_1, \dots, \mu_{\sigma}}(\mathbf{q}, p) = \Lambda_{\rho_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{\rho_{\sigma}}^{\mu_{\sigma}} M_{\pm}^{\rho_1, \dots, \rho_{\sigma}}(\Lambda \mathbf{q}, \Lambda p). \quad (\text{A.21})$$

Si verificherà, inoltre, che la funzione  $M_{\pm}$  così definita soddisfa la (2.36). Inserendo nella (A.19) la legge di trasformazione dei vettori polarizzazione (A.15) con  $\Lambda = L^{-1}(\mathbf{q}, p)$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\pm}^{\mu_1^*}(\hat{\mathbf{q}}) \dots \epsilon_{\pm}^{\mu_{\sigma}^*}(\hat{\mathbf{q}}) M_{\pm \mu_1, \dots, \mu_{\sigma}}(\mathbf{q}, p) &= \\ \exp(\pm i\sigma\theta(L^{-1}(\mathbf{q}, p), \mathbf{q})) \left[ \epsilon_{\pm}^{\mu_1}(\hat{\mathbf{q}}_c) - \frac{(q_c)^{\mu_1}}{|\mathbf{q}|} L^0_{\nu_1}(\mathbf{q}, p) \epsilon_{\pm}^{\nu_1}(\hat{\mathbf{q}}_c) \right]^* &\times \dots \\ \dots \times \left[ \epsilon_{\pm}^{\mu_{\sigma}}(\hat{\mathbf{q}}_c) - \frac{(q_c)^{\mu_{\sigma}}}{|\mathbf{q}|} L^0_{\nu_{\sigma}}(\mathbf{q}, p) \epsilon_{\pm}^{\nu_{\sigma}}(\hat{\mathbf{q}}_c) \right]^* &M_{\pm \mu_1, \dots, \mu_{\sigma}}(\mathbf{q}_c, p_c). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

La proprietà (A.9-5) per cui  $q_c^{\mu_n} \epsilon_{\pm \mu_n}(\hat{\mathbf{q}}_c) = 0$ , combinata con la definizione (A.18), stabilisce che  $q_c^{\mu_1, \dots, \mu_{\sigma}} M_{\pm \mu_1, \dots, \mu_{\sigma}}(\mathbf{q}_c, p_c) = 0$  e perciò si può semplificare la (A.22) in:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\pm}^{\mu_1^*}(\hat{\mathbf{q}}) \dots \epsilon_{\pm}^{\mu_{\sigma}^*}(\hat{\mathbf{q}}) M_{\pm \mu_1, \dots, \mu_{\sigma}}(\mathbf{q}, p) &= \\ \exp(\pm i\sigma\theta(L^{-1}(\mathbf{q}, p), \mathbf{q})) \epsilon_{\pm}^{\mu_1^*}(\hat{\mathbf{q}}_c) \dots \epsilon_{\pm}^{\mu_{\sigma}^*}(\hat{\mathbf{q}}_c) &M_{\pm \mu_1, \dots, \mu_{\sigma}}(\mathbf{q}_c, p_c), \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

da cui, riutilizzando la definizione (A.18) e usando la proprietà (A.9-1) secondo la quale  $\epsilon_{\pm \mu_n}^*(\mathbf{q}_c) \epsilon_{\pm}^{\mu_n}(\hat{\mathbf{q}}_c) = 1$ , deriva:

$$\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{q}|}} \epsilon_{\pm}^{\mu_1^*}(\hat{\mathbf{q}}) \dots \epsilon_{\pm}^{\mu_{\sigma}^*}(\hat{\mathbf{q}}) M_{\pm \mu_1, \dots, \mu_{\sigma}}(\mathbf{q}, p) = \sqrt{\frac{|\mathbf{q}_c|}{|\mathbf{q}|}} \exp(\pm i\sigma\theta(L^{-1}(\mathbf{q}, p), \mathbf{q})). \quad (\text{A.24})$$

Infine, si osservi che al membro destro di quest'ultima è presente la formula (2.34) con  $\Lambda = L^{-1}$ , perciò risulta che:

$$\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{q}|}} \epsilon_{\pm}^{\mu_1^*}(\hat{\mathbf{q}}) \dots \epsilon_{\pm}^{\mu_{\sigma}^*}(\hat{\mathbf{q}}) M_{\pm \mu_1, \dots, \mu_{\sigma}}(\mathbf{q}, p) = S_{\pm}(\mathbf{q}, p), \quad (\text{A.25})$$

come volevasi dimostrare.

# Bibliografia

- [1] Werner, H., *Fisica e filosofia* (Il Saggiatore, 2015).
- [2] Weinberg, S., *Photons and Gravitons in S-Matrix Theory: Derivation of Charge Conservation and Equality of Gravitational and Inertial Mass*, [Phys. Rev. \*\*135\*\*, B1049 \(1964\)](#).
- [3] Wigner, E. and Sellitto, M., *L'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali*, Biblioteca minima (Adelphi, 2017).
- [4] Sakurai, J. J., *Modern quantum mechanics; rev. ed.* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1994).
- [5] Caldirola, P., Cirelli, R. and Prosperi, G., *Introduzione alla fisica teorica*, Varia. Architettura (UTET, 1982).
- [6] Weinberg, S., *The Quantum Theory of Fields, Volume 1: Foundations* (Cambridge University Press, 2005).
- [7] Barone, V., *Relatività. Principi e applicazioni*, Programma di mat. fisica elettronica (Bollati Boringhieri, 2004).
- [8] Fonda, L. and Ghirardi, G., *Symmetry Principles in Quantum Physics*, Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies: Theoretical physics (M. Dekker, 1970).
- [9] Tung, W., *Group Theory in Physics* (World Scientific, 1985).
- [10] Wigner, E. P., *On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group*, [Annals Math. \*\*40\*\*, 149 \(1939\)](#).
- [11] Bargmann, V., *Note on Wigner's Theorem on Symmetry Operations*, [Journal of Mathematical Physics \(New York\) \(U.S.\) \*\*10\*\*.1063/1.1704188](#).
- [12] Bohm, D., *Quantum Theory*, Dover books in science and mathematics (Dover Publications, 1989).
- [13] Woit, P., *Quantum Theory, Groups and Representations: An Introduction* (Springer International Publishing, 2017).
- [14] Cornwell, J., *Group Theory in Physics: Volume 1* (Elsevier Science, 1986).
- [15] Bargmann, V., *On Unitary Ray Representations of Continuous Groups*, [Annals of Mathematics \*\*59\*\*, 1 \(1954\)](#).

- [16] Lorentz, H., Einstein, A., Minkowski, H., Weyl, H. and Sommerfeld, A., *The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity*, Dover Books on Physics and Mathematical Physics (Dover, 1952).
- [17] Poincaré, H., *Sur la dynamique de l'électron*, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **21**, 129 (1906).
- [18] Bargmann, V. and Wigner, E. P., *Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations*, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **34**, 211 (1948).
- [19] Barnich, G. and Oblak, B., *Notes on the BMS group in three dimensions: I. Induced representations*, *JHEP* **06**, 129 (2014), [arXiv:1403.5803 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1403.5803) .
- [20] Mackey, G., *Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics*, Math Lecture Notes Series (W. A. Benjamin, 1968).
- [21] Inui, T., Tanabe, Y. and Onodera, Y., *Group Theory and Its Applications in Physics*, Springer Series in Solid-State Sciences (Springer Berlin Heidelberg, 1996).
- [22] Weinberg, S., *Feynman Rules for Any Spin. II. Massless Particles*, *Phys. Rev.* **134**, B882 (1964).
- [23] *Lectures on particles and field theory* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1965).
- [24] Eden, R. J., Landshoff, P. V., Olive, D. I. and Polkinghorne, J. C., *The analytic S-matrix* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966).
- [25] Iagolnitzer, D., *Scattering in Quantum Field Theories: The Axiomatic and Constructive Approaches* (Princeton University Press, 1993).
- [26] Lee, T., *Particle Physics and Introduction to Field Theory: Revised and Updated First Edition*, Contemporary concepts in physics (Taylor & Francis, 1981).
- [27] Iagolnitzer, D., *Analyticity Properties of the S-Matrix: Historical Survey and Recent Results in S-Matrix Theory and Axiomatic Field Theory*, *Acta Phys. Austriaca Suppl.* **23**, 235 (1981).
- [28] Stapp, H. P., *Derivation of the CPT Theorem and the Connection between Spin and Statistics from Postulates of the S-Matrix Theory*, *Phys. Rev.* **125**, 2139 (1962).
- [29] Weinberg, S., *Photons and Gravitons in Perturbation Theory: Derivation of Maxwell's and Einstein's Equations*, *Phys. Rev.* **138**, B988 (1965).
- [30] Weinberg, S., *Feynman Rules for Any Spin*, *Phys. Rev.* **133**, B1318 (1964).
- [31] Weinberg, S., *Feynman Rules for Any Spin. II. Massless Particles*, *Phys. Rev.* **134**, B882 (1964).
- [32] Weinberg, S., *Derivation of gauge invariance and the equivalence principle from Lorentz invariance of the S-matrix*, *Phys. Lett.* **9**, 357 (1964).

- 
- [33] Weinberg, S., *What is Quantum Field Theory, and What Did We Think It Is?* (1997).
- [34] Gottfried, K. and Yan, T., *Quantum Mechanics: Fundamentals*, Graduate Texts in Contemporary Physics (Springer New York, 2003).
- [35] Bjorken, J. D. and Drell, S. D., *Relativistic quantum mechanics*, International series in pure and applied physics (McGraw-Hill, New York, NY, 1964).
- [36] Bak, J. and Newman, D., *Complex Analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics (Springer New York, 1999).
- [37] Chong, Y., *The Green's Function for a Free Particle* (2021).
- [38] Sakurai, J., *Advanced Quantum Mechanics*, Always learning (Pearson Education, Incorporated, 2006).
- [39] Gingrich, D. M., *Propagator for the Klein-Gordon Equation* (2004).
- [40] Gingrich, D. M., *Solutions of the Klein-Gordon Equation* (2004).
- [41] Gingrich, D. M., *Propagator Theory* (2004).
- [42] Taylor, J., *Scattering Theory: The Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions*, Dover Books on Engineering (Dover Publications, 2012).
- [43] Binney, J. and Skinner, D., *The Physics of Quantum Mechanics* (OUP Oxford, 2013).
- [44] Zarrilli, D., *Teorema di Weinberg, Tesi triennale*, Università degli studi di Napoli Federico II (2021).
- [45] Jauch, J. M. and Rohrlich, F., *The theory of photons and electrons. The relativistic quantum field theory of charged particles with spin one-half*, 2nd ed., Texts and Monographs in Physics (Springer, Berlin, 1976).
- [46] Jackiw, R., *Low-Energy Theorems for Massless Bosons: Photons and Gravitons*, *Phys. Rev.* **168**, 1623 (1968).
- [47] Low, F. E., *Bremsstrahlung of Very Low-Energy Quanta in Elementary Particle Collisions*, *Phys. Rev.* **110**, 974 (1958).