Università degli Studi di Napoli "Federico II"

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

TESI TRIENNALE IN FISICA

Classificazione dei buchi neri astrofisici

Relatori:

Prof. Salvatore Capozziello

Dr. Emmanuele Battista

Candidato:
Nello Bottigliero
Matr. N8500/1458

Anno Accademico 2022-2023

Indice

Introduzione

Indubbiamente la teoria della relativitá generale di Albert Einstein ha rivoluzionato non solo il corso della Fisica, ma anche il concetto di spazio e tempo nel suo complesso. La relativitá ristretta aveva giá introdotto il concetto di spazio-tempo in uno spazio quadridimensionale piatto e non euclideo, lo spazio di Minkowski. Sará peró la relativitá generale a espandere tale concetto a uno spazio quadridimensionale curvo e a legare il tutto con i campi gravitazionali.

Il fine ultimo della teoria é proprio quello di geometrizzare in qualsiasi punto lo spazio-tempo curvo in relazione al campo gravitazionale lí presente. É cosí che al concetto di segmento orientato che congiunge due punti in uno spazio lineare verrá sostituito il concetto di geodetica, la linea curva piú breve che congiunge due punti in uno spazio curvo. Allo scopo di geometrizzare uno spazio-tempo curvo, vengono utilizzate le equazioni delle geodetiche, che si possono scrivere come

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0, \tag{1}$$

dove il primo termine rappresenta l'accelerazione della particella test, mentre il secondo termine é riconducibile ai potenziali, quindi alle forze, le cause del moto. $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ é denominato "connessione affine" e lega due diversi sistemi di coordinate. In uno spazio in cui vale il principio di equivalenza esso é legato alla metrica $g_{\mu\nu}$ ed é noto anche come simbolo di Christoffel[3].

Grazie alla nozione di trasporto parallelo viene inoltre definito un oggetto matematico di enorme importanza per la teoria, il tensore di Riemann $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\sigma_{\beta\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\beta\mu}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}, \tag{2}$$

dove si é introdotta la notazione secondo cui la virgola seguita da un indice indica una derivazione rispetto alle coordinate contrassegnate da quell'indice; tale tensore fornisce un'indicazione quantitatva sulla curvatura della porzione di spazio-tempo su cui viene calcolato.

Le equazioni di campo Einstein sfruttano una contrazione a due indici del tensore di Riemann, il tensore di Ricci. Esse consentono di legare i campi gravitazionali presenti in una porzione di spazio-tempo con la geometria dello stesso. La prima e piú semplice soluzione di tali equazioni, trovata da Karl

Schwarzschild, é l'omonima metrica che descrive lo spazio-tempo attorno a una massa a simmetria sferica, non rotante e priva di carica elettrica[3].

Nel primo capitolo di questa tesi si parlerá della soluzione di Schwarzschild. Inoltre si analizzeranno brevemente le caratteristiche dell'evoluzione stellare, con particolare accento sulla tipologia di stelle che possono portare alla formazione di buchi neri stellari e sulle condizioni che devono verificarsi affinché si rompa l'equilibrio idrostatico sferico di queste ultime.

Nel secondo capitolo verranno trattati i buchi neri come oggetti astrofisici, i quali verranno caratterizzati rispetto alla loro massa e alla loro origine. Si affronteranno in dettaglio i buchi neri di massa stellare, si tratterà soprattutto della loro rilevazione nei sistemi binari. Si parlerá inoltre dei buchi neri supermassicci al centro delle galassie, ed in particolare si parlerá del buco nero presente al centro della Via Lattea.

Nel terzo capitolo si analizzeranno i buchi neri da un punto di vista piú concettuale. Inizialmente si discuterá riguardo le differenze tra i concetti di buco nero matematico, fisico ed astrofisico. Si enuncerá la metrica di Kerr per buchi neri rotanti privi di carica, di Reissner-Nordström per buchi neri non rotanti carichi e la metrica di Kerr-Newmann per buchi neri carichi rotanti. Si prenderá infine spunto dall'articolo di Oppenheimer e Snyder del 1939, intitolato "On Continued Gravitational Contraction", in cui si discute riguardo la possibile esistenza di corpi celesti come i buchi neri. Si cercherá infine di rispondere alla seguente domanda: Possono formarsi buchi neri astrofisici nell'universo fisico?

Capitolo 1

La soluzione di Schwarzschild

In questo capitolo introdurremo le equazioni di campo di Eintein ed il concetto di buco nero. Le equazioni di Einstein verrano esplicitate nel paragrafo (1.1). Nel paragrafo (1.2) illustreremo la soluzione di Schwarzschild esterna. Nel paragrafo (1.3) presenteremo la soluzione di Schwarzschild interna; parleremo di conseguenza delle possibili conclusioni per la vita di una stella.

1.1 La formulazione delle equazioni di Einstein

Il concetto di buco nero é entrato nella Fisica in seguito alla risoluzione, da parte di Karl Schwarzschild, delle equazioni di campo della relativitá generale formulata da Albert Einstein nel 1915. Come giá discusso nell'introduzione, la soluzione delle equazioni di Einstein restituisce la geometria dello spazio-tempo in conseguenza di una certa distribuzione di massa. Nella ricerca delle possibili equazioni di campo Einstein pensó che esse dovessero verificare necessariamente dei criteri [4]:

1. Devono essere scritte in forma tensoriale per obbedire al principio di covarianza generale;

2. Devono essere del secondo ordine;

3. Devono essere tali che per campi deboli si riducano all'equazione di Poisson della teoria classica della gravitazione.

Come giá anticipato nell'introduzione Eintsein pensó di partire da una contrazione a due indici del tensore di Riemann, il tensore di Ricci. La prima proposta fu la seguente:

$$R_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

dove χ é una costante di proporzionalitá e $T_{\mu\nu}$ é il tensore energia-impulso, la cui forma dipende dalla natura delle sorgenti del campo gravitazionale. Tuttavia questa scrittura delle equazioni di campo fu rigettata perché il primo membro, a differenza del secondo, ha una divergenza non nulla. Si rese quindi necessaria una riscrittura dell'equazione a partire dalle identitá di Bianchi. Il risultato fu un tensore $G_{\mu\nu}$ denominato tensore di Einstein che possiede divergenza nulla. L'analisi delle equazioni di Einstein per campi deboli fornisce inoltreil valore $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$, dove G é la costante di gravitazione universale. Le equazioni nella scrittura definitiva risultano quindi:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{1.2}$$

dove R é uno scalare proveniente da un'ulteriore contrazione del tensore di Ricci, denominato proprio scalare di Ricci. Si nota che il valore della costante di accoppiamento χ è particolarmente basso, dell'ordine di grandezza di 10^{-43} s^2/m kg. [3]

1.1.1 L'interpretazione delle equazioni di Einstein

Le equazioni di Einstein (1.2) creano un legame matematico tra il tensore di Riemann e il tensore energia-impulso. Il legame tra i due tensori crea un ponte tra due concetti di fondamentale importanza in relativitá generale; infatti il tensore di Riemann é direttamente collegato al tensore metrico, il quale descrive la geometria dello spazio-tempo, mentre il tensore energia-impulso regola la densitá di energia e il flusso di energia e quantitá di moto nello spazio-tempo; sono state quindi direttamente collegate la geometria dello spazio-tempo in un determinato punto con l'energia-impulso presenti nello stesso punto. Partendo da questo presupposto é quindi possibile dare un doppio significato concettuale alle equazioni di Einstein attraverso due possibili scritture delle stesse.

Nel primo caso le equazioni si scrivono come sono state precedentemente enunciate ed é la materia a essere sorgente della geometria dello spazio-tempo. In sostanza una data distribuzione di materia-energia deforma lo spazio-tempo facendo sí che esso assuma una determinata forma.

Nella seconda scrittura é invece la geometria dello spazio-tempo ad avere il ruolo di sorgente di una data distribuzione di materia-energia. Data una certa forma che assume lo spazio-tempo, la materia-energia si distribuisce in modo tale da accomodare la geometria. Verrá di seguito enunciata la seconda possibile scrittura:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\alpha\beta} - \frac{g_{\alpha\beta}}{2} T), \tag{1.3}$$

dove T é la traccia del tensore $T_{\mu\nu}$. Entrambe le interpretazioni sono concettualmente valide[3].

1.2 La metrica di Schwarzschild

Una volta descritte le equazioni di campo di Einstein si puó discutere riguardo le possibili soluzioni. La soluzione di Schwarzschild esterna riguarda il caso piú semplice di tutti. Essa esprime il comportamento dello spazio-tempo attorno a una distribuzione di massa non rotante ed a simmetria sferica. Si parta quindi dal presupposto che sia nullo il tensore energia-impulso all'esterno della distribuzione di materia. Dunque le equazioni (1.2) scritte nel vuoto diventano:

$$R_{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 0. \tag{1.4}$$

Ricordando che le due scritture dalle equazioni di Einstein si equivalgono, si prenda in esame la prima. A questo punto si puó scrivere una metrica provvisoria. Data la simmetria del problema in esame possiamo introdurre le coordinate sferiche (t, r, θ, ϕ). I coefficienti di una generica metrica a simmetria sferica dipendono solo dalle variabili t ed r, per cui possiamo scrivere in tutta generalitá:

$$ds^2 = -A(r,t)c^2dt^2 + B(r,t)dr^2 + rC(r,t)drdt + D(r,t)d\Omega^2, \tag{1.5}$$

dove $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$. Si puó supporre, trovandoci in una metrica a simmetria sferica, di poter diagonalizzare il problema. Cosí facendo é possibile annullare il coefficiente del termine misto della metrica. Inoltre per questioni di simmetria é possibile porre $D = r^2$. Infine si assuma che le restanti incognite A e B siano degli esponenziali. Tale assunzione serve a scrivere una metrica che tenda rapidamente alla metrica piatta di Minkowski quando ci si allontana dalla sorgente. Possiamo dunque scrivere:

$$ds^2 = -e^{\nu}c^2dt^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2d\Omega^2, \tag{1.6}$$

dove le funzioni ν e λ sono entrambe funzioni del tempo e della distanza dall'oggetto. Si noti che con questa espressione si ottiene anche una metrica che non é mai singolare. Avendo supposto il sistema totalmente simmetrico rispetto alle variabili angolari, si considerano nel problema da risolvere solo le componenti del tensore di Ricci che coinvolgono componenti temporali e radiali. Si trova quindi un sistema di 3 equazioni nelle 2 incognite ν ed λ:

$$R_{00} = 0, \tag{1.7}$$

$$R_{01} = 0, \tag{1.8}$$

$$R_{11} = 0. \tag{1.9}$$

Per come é scritto, il sistema in questione non é linearmente indipendente. Si consideri quindi una di queste equazioni come vincolo del sistema, solitamente legato a quantitá conseravate come l'energia. Risulta conveniente a questo punto sfruttare le proprietá del tensore di Ricci per scrivere le sue componenti nel seguente modo:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\log(\sqrt{-g}) + \Gamma^\tau_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\tau}\log(\sqrt{-g}) - \Gamma^\tau_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\tau\beta}. \quad (1.10)$$

In questa equazione si é utilizzata la scrittura completa del tensore di Ricci come contrazione del tensore di Riemann, ovvero $R_{\alpha\beta} = R^\sigma{}_{\alpha\sigma\beta}$, e la seguente relazione per le connessioni affini:

$$\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\log(\sqrt{-g}), \quad (1.11)$$

dove g é il determinante della metrica $g_{\alpha\beta}$.

Avendo considerato questo problema come diagonalizzabile, ne risulta che il determinate del tensore metrico é semplicemente il prodotto degli elementi sulla diagonale principale. Risulta quindi essere:

$$\sqrt{-g} = e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} r^2 \sin(\theta). \quad (1.12)$$

Il passaggio successivo é quello di scrivere una lagrangiana riconducibile ai termini alla metrica. Si utilizzerá quindi la seguente lagrangiana:

$$L = -e^\nu\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 + e^\lambda\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 + r^2\sin^2(\theta)\left(\frac{dx^3}{ds}\right)^2 = 1, \quad (1.13)$$

dove ds^2 é stato introdotto nell'equazione (1.6). Una volta ottenuta la suddetta lagrangiana é possibile combinare le equazioni di Eulero-Lagrange con le equazioni delle geodetiche per ottenere i simboli di Cristhoffel necessari per risolvere le equazioni di Einstein. Verranno elencati di seguito i simboli di Cristhoffel non nulli.

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2c}\nu_t, \quad \Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{\nu_r}{2}, \quad \Gamma^0_{11} = \frac{1}{2c}e^{\nu-\lambda}\lambda_t \quad (1.14)$$

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}e^{\lambda-\nu}\nu_r, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{\lambda_r}{2}, \quad \Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01} = \frac{1}{2c}\lambda_t, \\ \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}, \quad \Gamma^1_{33} = -re^{-\lambda}\sin^2(\theta),\end{gathered} \quad (1.15)$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin(\theta)\cos(\theta). \quad (1.16)$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot(\theta). \quad (1.17)$$

Nelle equazioni (1.14) - (1.17) si é utilizzata la notazione secondo cui r al pedice sta per derivata rispetto alla coordinata x^1; allo stesso modo t al pedice sta per derivata temporale. É quindi adesso possibile ottenere una forma esplicita delle 3 equazioni che compongono il sistema (1.7)-(1.9) andando a sostituire i simboli di Cristhoffel con i valori trovati. Avremmo dunque:

$$R_{01} = \frac{\lambda_t}{cr} = 0, \tag{1.18}$$

$$R_{11} = \frac{-1}{2}(\nu_{rr} + \frac{\nu_r^2}{2} - \frac{\nu_r \lambda_r}{2} - \frac{2\lambda_r}{r}) = 0, \tag{1.19}$$

$$R_{00} = \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}(\nu_{rr} + \frac{\nu_r^2}{2} - \frac{\nu_r \lambda_r}{2} + \frac{2\nu_r}{r}) = 0. \tag{1.20}$$

Dalle (1.18) - (1.20) si puó immediatamente notare che in nessuna compare una dipendenza temporale per ν; inoltre si puó utilizzare la (1.18) per ottenere che anche λ é indipendente dal tempo. Si puó quindi dedurre che il sistema é interamente indipendente dal tempo. Si é quindi in presenza di un sistema statico che rispetta il teorema di Birkhoff[1]. L'esponenziale all'inizio della (1.20) puó essere semplificato dato che per ipotesi gli esponenziali e^ν ed e^λ sono non singolari. Si ottiene quindi il seguente sistema di 2 equazioni in 2 incognite:

$$\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r} = 0, \tag{1.21}$$

$$\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\lambda'}{r} = 0, \tag{1.22}$$

dove si é semplificata la notazione essendo il sistema dipendente solo da r. A questo punto si puó procedere sottraendo le due equazioni membro a membro, in modo da ottenere la seguente relazione tra ν e λ,

$$\frac{d}{dr}(\nu + \lambda) = 0. \tag{1.23}$$

Tale equazione mostra che i due parametri hanno una somma costante. Sapendo che il sistema é asintoticamente piatto, l'unica possibilitá che garantisce questa condizione é che la costante sia 0, cioé che ν e λ siano opposte. Si puó adesso sostituire λ con $-\nu$ nell'equazione (1.20) e risolvere nell'unica incognita rimasta ν

$$R_{00} = \frac{e^{2\nu}}{2}(\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r}) = 0. \tag{1.24}$$

Un'equazione del genere é facilmente integrabile e si ottiene dunque

$$\frac{1}{r}\left(re^\nu\right)'' = 0, \tag{1.25}$$

da cui:

$$e^\nu = C + \frac{D}{r}, \tag{1.26}$$

[1] Il teorema di Birkhoff afferma che ogni soluzione a simmetria sferica delle equazioni di campo di Einstein nel vuoto é necessariamente la soluzione statica di Schwarzschild [4].

dove C e D sono costanti di integrazione. Grazie all' ipotesi di piattezza asintotica, si ottiene $C = 1$; inoltre dallo studio per campi deboli si ottiene $D = -\frac{2\Phi}{c^2}$ dove Φ é il potenziale gravitazionale newtoniano. Otteniamo quindi: $e^\nu = g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$. La metrica puó dunque scriversi come

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)c^2 dt^2 - \left(\frac{dr^2}{1 - \frac{R_s}{r}}\right) - r^2 d\Omega^2, \tag{1.27}$$

dove R_s é denominato raggio di Schwarzschild, definito come

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}. \tag{1.28}$$

[3]

1.2.1 L'interpretazione della soluzione di Schwarzschild

Dalla soluzione descritta nell'equazione (1.27) si puó vedere che un oggetto avente raggio $r = R_s$ puó creare uno spazio-tempo cosí distorto da poter intrappolare persino i fotoni. Questa circostanza e dovuta al fatto che la velocitá di fuga necessaria ad allontanarsi dalla regione dello spazio-tempo $r = R_s$ risulta essere piú elevata della velocita della luce $c = 3 \times 10^8$m/s . Chiamiamo tale oggetto "buco nero". Concettualmente esso inizia quando il raggio dell'oggetto a simmetria sferica coincide con il suo raggio di Schwarzschild. Dalla definizione di raggio di Schwarzschild si vede che ottenere termini per i quali $\frac{R_s}{r} \simeq 1$ c'é bisogno di masse enormi contratte in sfere di piccolissime dimensioni. Per esempio il Sole diventerebbe un buco nero se fosse contratto fino ad avere un raggio di 3 km rispetto agli attuali 7×10^5 km [3].

1.3 L'equilibrio idrostatico sferico

In questo paragrafo tratteremo le equazioni (1.2) all'interno di una distribuzione di materia a simmetria sferica, come puó essere una stella. Si discuterá successivamente riguardo il possibile collasso gravitazionale di una stella.

Si vuole adesso trattare l'equilibrio di un corpo a simmetria sferica, e determinare in quali condizioni esso cede al collasso gravitazionale e genera un buco nero. [4] Si chiami per definizione l'oggetto in questione "stella". Si consideri quindi la situazione in cui la stella ha un raggio di Schwarzschild considerevolmente piú piccolo del proprio raggio. In tale situazione la stella é in vita. In queste condizioni lo spazio-tempo attorno alla stella sará approssimabile ad uno spazio-tempo di Minkowski. Non é affatto necessario che una stella termini il suo ciclo di vita con un collasso gravitazionale tale da creare una singolaritá nello spazio-tempo, ma allo stesso tempo ci sono notevoli evidenze dell'esitenza di buchi neri di massa stellare. Andremo quindi ad analizzare quali condizioni deve presentare una stella perché sia possibile che essa termini la sua vita diventando un buco nero [4].

Si tratta quindi la stella come un fluido continuo a simmetria sferica, e si analizza la soluzione di Schwarzschild interna, ovvero la soluzione che si ottiene risolvendo le equazioni di Einstein in presenza di materia. Ció vuol dire che il tensore energia-impulso in questo caso é diverso da zero. Data la simmetria sferica del problema, la metrica assumerá la stessa forma funzionale del caso della soluzione esterna di Schwarzschild, vedi equazione (1.6). In questo caso le funzioni incognite verranno indicate con α e β. Avremo quindi:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}c^2dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2. \tag{1.29}$$

Vanno quindi risolte le equazioni di Einstein nella loro forma completa:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{1.30}$$

Lo studio delle componenti del tensore $G_{\mu\nu}$ procede in analogia al caso precedente. Dunque a partire dalla lagrangiana:

$$L = -e^{2\alpha(r)}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 + e^{2\beta(r)}\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 + r^2\sin^2(\theta)\left(\frac{dx^3}{ds}\right)^2, \tag{1.31}$$

si ottiene:

$$G_{00} = \frac{1}{r^2}e^{2(\alpha(r)-\beta(r))}(2r\partial_r\beta(r) - 1 + e^{2\beta(r)}), \tag{1.32}$$

$$G_{11} = \frac{1}{r^2}(2r\partial_r\alpha(r) + 1 - e^{2\beta(r)}), \tag{1.33}$$

$$G_{22} = r^2e^{-2\beta(r)}[\partial_r^2\alpha(r) + (\partial_r\alpha(r))^2 - \partial_r\alpha(r)\partial_r\beta(r) + \frac{1}{r}((\partial_r\alpha(r)\partial_r\beta(r))], \tag{1.34}$$

$$G_{33} = \sin^2(\theta)G_{22}. \tag{1.35}$$

Come giá anticipato, a differenza della soluzione esterna, dobbiamo considerare anche il tensore energia-impulso, il quale grazie all'assunzione di stelle come fluidi perfetti puó essere scritto in forma semplice come:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho c^2)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \tag{1.36}$$

dove ρ e p sono rispettivamente la densitá di massa a riposo e la pressione della stella, mentre U_μ é la quadrivelocitá, che in questa trattazione verrá considerata come adimensionale.

Dalla scrittura della lagrangiana si trovano facilmente le componenti della quadrivelocitá che compaiono nell'espressione del tensore $T_{\mu\nu}$. Quindi le componenti di $T_{\mu\nu}$ sono:

$$T_{00} = e^{2\alpha(r)}\rho c^2, \quad T_{11} = e^{2\beta(r)}p, \quad T_{22} = r^{2p}, \quad T_{33} = r^2\sin^2(\theta)p. \tag{1.37}$$

Si possono adesso scrivere le equazioni di Einstein:

$$G_{00} = \frac{1}{r^2}e^{-2\beta}(2r\partial_r\beta - 1 + e^{2\beta}) = 8\pi G\rho, \tag{1.38}$$

$$G_{11} = \frac{1}{r^2}e^{-2\beta}(2r\partial_r\alpha + 1 - e^{2\beta}) = \frac{8\pi G\rho,}{c^2}, \tag{1.39}$$

$$G_{22} = e^{-2\beta}[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{1}{r}((\partial_r\alpha\partial_r\beta)] = \frac{8\pi G\rho,}{c^2}, \tag{1.40}$$

dove non é stata riportata l'equazione per la componente 33 perché essa risulta proporzionale all'equazione per la componente 22 . A questo punto si nota che l'equazione (1.38) dipende solo da β, per cui si puó utilizzare un parametro $m(r)$ da sostituire all'interno delle equazioni:

$$m(r) = \frac{r - re^{-2\beta(r)}c^2}{2G}. \tag{1.41}$$

Sostituendo tale funzione nell'equazione (1.38), si trova:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2\rho, \tag{1.42}$$

da cui:

$$m(r) = 4\pi\int_0^r \rho(r')r'^2dr'. \tag{1.43}$$

É inoltre possibile trovare il coefficiente della metrica e^β in relazione al parametro $m(r)$:

$$e^\beta = \left(\sqrt{1 - \frac{Gm(r)}{rc^2}}\right)^{-1}. \tag{1.44}$$

A questo punto sembra che si possa interpretare il parametro $m(r)$ come una massa integrata rispetto all'interno della stella fino al raggio r. Infatti integrando fino a R si ottiene $M = m(r)$. Bisogna peró stare attenti perché per ottenere la vera massa della stella, ovvero la massa propria, bisogna valutare l'integrale della funzione ρ rispetto al volume proprio. L'elemento di volume proprio é dato :

$$\sqrt{\gamma}drd\theta d\phi = e^\beta r^2\sin(\theta)drd\theta d\phi, \tag{1.45}$$

dove γ é il determinante del tensore metrico spaziale γ_{ij}. Per cui la massa propria presenta la seguente espressione:

$$M' = 4\pi\int_0^r \rho(r')r'^2e^{\beta(r')}dr' = 4\pi\int_0^r \rho(r')r'^2dr'\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2Gm(r')}{r'c^2}}}. \tag{1.46}$$

La differenza tra le due espressioni della massa é proporzionale, attraverso un fattore c^2, all'energia di legame dovuta alla mutua interazione gravitazionale tra gli elementi del fluido:

$$E_l = (M' - M)c^2 > 0. \tag{1.47}$$

Si puó sostituire l'espressione di $m(r)$ anche nell'equazione (1.39), ottenendo cosí

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{Gm(r) + 4\pi G r^3 p}{r[r - 2Gm(r)]}. \tag{1.48}$$

Si puó inoltre sfruttare la conservazione del tensore energia-impulso, da cui si ottiene

$$(p + \rho c^2)\frac{d\alpha}{dr} = -\frac{dp}{dr}. \tag{1.49}$$

A questo punto é possibile combinare le equazioni (1.48) e (1.49), per trovare l'equazione di Tolman-Oppenheimer-Volkoff o equazione dell'equilibrio idrostatico:

$$\frac{dp}{dr} = -(p + \rho c^2)\frac{Gm(r) + 4\pi G r^3 p}{r[r - 2Gm(r)]}. \tag{1.50}$$

Come noto da prima il parametro $m(r)$ é legato a $\rho(r)$ attraverso l'equazione (1.43), per cui per ottenere un sistema di equazioni chiuso c'é bisogno di un'altra relazione. Si puó dunque utilizzare l'equazione di stato. Essa ci dará la pressione del sistema in relazione alla densitá di energia e all'entropia del sistema. Si consideri in questa situazione trascurabile l'entropia del sistema. Infine si assuma che la densitá di massa ρ sia costante all'interno della stella e nulla fuori come nel caso di un fluido incompressibile, dovrá valere:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0, & r \leqslant R, \\ 0, & r < R, \end{cases} \tag{1.51}$$

da cui $m(r) = \rho_0 \frac{4\pi r^3}{3}$ con $r \leqslant R$.

É quindi possibile adesso integrare l'equazione ed ottenere $p(r)$, trovando la seguente espressione:

$$p(r) = \rho_0 c^2 \left[\frac{R\sqrt{R - \frac{2GM}{c^2}} - \sqrt{R^3 - \frac{2GMr^2}{c^2}}}{\sqrt{R^3 - \frac{2GMr^2}{c^2}} - 3R\sqrt{R - \frac{2GM}{c^2}}} \right]. \tag{1.52}$$

Il problema puó quindi considerarsi risolto, le componenti della metrica sono date dai valori di $e^{\beta(r)}$ ed $e^{\alpha(r)}$, con $e^{\alpha(r)}$ dato dalla seguente espressione:

$$e^{\alpha(r)} = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{2GMr^2}{R^3c^2}}. \tag{1.53}$$

É possibile inoltre notare che le due soluzioni di Schwarzschild possono considerarsi due parti dello stesso problema con la condizione che le due soluzioni devono coincidere sul bordo della sorgente. Come ci si aspettava la pressione tende ad aumentare nell'avvicinarsi al nucleo della stella. Chiaramente non puó divergere perché un punto a pressione infinita é per definizione una singolaritá dello spazio-tempo; analizzando l'equazione integrata della pressione, ci si puó rendere facilmente conto che per un certo raggio R fissato esiste una massa limite per la quale emerge una singolaritá nello spazio-tempo [4]:

$$M_{max} = \frac{4Rc^2}{9G}. \tag{1.54}$$

Si ricorda che questo risultato é stato raggiunto con un'approssimazione molto forte, considerando la densitá della stella come costante. Il risultato tuttavia resiste anche quando la suddetta approssimazione viene notevolmente indebolita.

Si puó quindi affermare che solo una piccola parte delle stelle va incontro ad un collasso gravitazionale tale da creare una singolaritá nello spazio-tempo. Per ogni stella l'equilibrio nel corso della sua vita é garantito dalle reazioni nucleari, le quali garantiscono una temperatura molto alta a cui corrisponde una pressione di radiazione tale da contrastare il collasso gravitazionale. Quando il combustibile nucleare si esaurisce la temperatura inizia a decrescere drasticamente e la stella inizia a contrarsi sotto l'influenza della gravitá. Tale processo potrebbe essere contrastato dalla pressione di degenerazione di Fermi; infatti quando gli elettroni vengono spinti molto vicini dalla gravitá, essi resistono ad un'ulteriore compressione sulla base del principio di esclusione di Pauli. Le stelle che rimangono in equilibrio grazie a questo principio vengono chiamate "nane bianche"; esse hanno dimensioni paragonabili a quelle della Terra, ma hanno una massa paragonabile alla massa del Sole. Sono quindi oggetti estremamente densi. La maggior parte delle stelle termina il suo ciclo di vita in una nana bianca. Esiste peró un limite, chiamato limite di Chandrasekar, che fissa a 1.4 $M_\odot$ la massa limite di una nana bianca. Oltre tale massa stabilita la pressione di degenerazione garantita dal principio di Fermi non é piú sufficiente a contrastare l'attrazione gravitazionale; quando ció accade gli elettroni sono forzati a collassare fino combinarsi coi protoni in un decadimento beta inverso per dare vita a neutroni e neutrini, dove questi ultimi volano via. Si definisce una stella con le caratteristiche sopra citate come una "stella di neutroni". Essa é caratterizzata da un raggio dell'ordine di grandezza di 10 km e una massa che supera il limite di Chandrasekar. Da ció si comprende che esse sono caratterizzate da una denistá media di circa $7.16 \times 10^{17}\text{kg/m}^3$; un oggetto del genere é inoltre caratterizzato da una scarsa luminositá intrinseca, ma da un intenso campo magnetico e da un rapido movimento di rotazione sul proprio asse. Queste due caratteristiche combinate fanno sí che le particelle circostanti vengano notevolmente accelerate, generando cosí una pulsar, cioé una radiosorgente particolarmente intensa.

Come visto in precedenza, nelle equazioni dell'equilibrio idrostatico sferico (1.50) esiste un limite, chiamato limite di Oppenhaimer-Volkoff, oltre il quale una stella di neutroni non riesce piú a mantenere una configurazione di equilibrio. In questa situazione il processo di collasso gravitazionale non é piú in alcun modo frenabile e si va incontro alla formazione di un buco nero di massa stellare. Per una stella di neutroni di raggio standard di 10km il limite di Oppenhaimer-Volkoff si attesta intorno alle 3-4 $M_\odot$ [4].

Capitolo 2

La classificazione dei buchi neri

Nel seguente capitolo classificheremo i buchi neri in relazione alla propria massa. Le categorie in cui vengono divisi i buchi neri sono tre [9]:

1. buchi neri di massa stellare;

2. buchi neri di massa intermedia;

3. buchi neri supermassicci.

Approfondiremo riguardo l'origine, le caratteristiche e le osservazioni avute in questi anni per ogni categoria di buchi neri. Infine nel paragrafo 2.3.1 daremo un piccolo approfondimento riguardo Sagittarius A*, il buco nero supermassiccio al centro della Via Lattea.

2.1 I buchi neri di massa stellare

I buchi neri meno massicci sono chiamati "buchi neri di massa stellare" e la loro massa va dalle 3 $M_\odot$ fino alle 100 $M_\odot$. Essi si formano attraverso il collasso gravitazionale di una stella particolarmente massiva (di almeno 15 $M_\odot$) che avviene quando la stella in questione esaurisce il suo combustibile.

Come si é visto nel capitolo precedente, la contrazione della stella fa sí che si rompa l'equilibrio idrostatico sferico e che la stella collassi in un buco nero. Di questa tipologia di buchi neri vengono rilevati quelli che fanno parte delle binarie-X, le quali rappresentano una particolare tipologia di stelle binarie che emetteno una gran quantitá di radiazioni nei raggi X (circa 10^{41} positroni al secondo). La grande emissione di raggi X in sistemi di questo tipo é dovuta al trasferimento di materia da un elemento del sistema (generalmente una stella) all'altro (una nana bianca, una stella di neutroni o un buco nero). Tale radiazione viene quindi intercettata dai nostri rivelatori di raggi X che riescono a risalire alla massa dell'elemento che acquisisce materia dalla stella [9].

2.1.1 La scoperta dei buchi neri di massa stellare

Le osservazioni di raggi X iniziarono verso la fine degli anni 60' allorché i rivelatori di raggi X a bordo dei satelliti scoprirono una gran sorgente di raggi X nella galassia. Grazie a parametri quali la luminositá di tali radiazioni[1] e la loro variabilitá temporale si ipotizzó che esse fossero il prodotto di un sistema binario come quello sopra descritto, ovvero le binarie-X.

Le binarie-X possono essere distinte in due categorie: la prima categoria corrisponde alle binarie denominate HMXB (dall'inglese, high-mass X-binary) in cui l'elemento che cede materia é una supergigante O-B (cioé una stella blu o azzurra, secondo la classificazione stellare di Harvard). É evidente che tale categoria comprende le binarie-X piú massive. La seconda categoria é formata dalle cosiddette LMXB (dall'inglese, low mass X-binary), caratterizzate da una stella donatrice K-M (cioé una stella rossa o arancione, secondo la classificazione stellare di Harvard) e da periodi orbitali notevolmente piú brevi rispetto ad un sistema HMBX.

Una delle prime binarie-X scoperte fu la HMXB contenente il buco nero di massa stellare denominato Cyg X-1; tale sistema binario é composto da Cyg X-1 e dalla supergigante O denominata "HDE 226868". In seguito vedremo come si é capito che la controparte della stella HDE 226868 fosse un buco nero di massa stellare. Innanzitutto é possibile dimostrare che la massa dei due elementi di una binaria-X é correlata al periodo orbitale P_{orb} e all'ampiezza di velocitá radiale K della stella in modo tale da ottenere la funzione di massa data dalla seguente equazione [5]:

$$f(M_x) = \frac{K^3 P_{orb}}{2\pi G} = \frac{M_x^3 \sin^3 i}{(M_x + M_c)^2}, \tag{2.1}$$

dove G é la costante di gravitazione universale, mentre i é l'angolo di inclinazione. Nella (2.1) compaiono due masse. M_x é la massa della stella del sistema binario in esame, mentre M_c é la massa dell'oggetto collassato, cioé del buco nero. La massa espressa da $f(M_x)$ risulta essere un limite inferiore della massa M_x della stella. Il fattore cruciale per la trattazione di questa tipologia di oggetti é la massa M_c. Tale massa é peró caratterizzata da un valore particolarmente elevato e da un ampio intervallo di incertezza per un sistema HMXB.

I dati trovati per quanto riguarda l'ampiezza di velocitá radiale K e il periodo orbitale P_{orb} del sistema Cyg X-1 furono rispettivamente: $K = 64$km/s, $P_{orb} = 5.6$ giorni. Andando a mettere questi dati nell'equazione (2.1) si trova una massa di $33M_{\odot}$ per quanto riguarda la supergigante HDE

[1] La luminositá dei raggi X é circa uguale alla luminositá di Eddington.

226868. Tale valore porterebbe, avendo assunto un angolo di inclinazione i di $90°$, a una massa dell'oggetto compatto di $7M_{\odot}$. Tuttavia il gran margine di errore di cui sopra si é parlato conduce a una sovrastima della massa stellare fino a un fattore 3. Si é quindi stabilito un limite inferiore per la massa di HDE 226868, attestato a $10M_{\odot}$, e un limite superiore per quanto riguarda l'angolo di inclinazione i, attestato a $60°$. Utilizzando tali valori limite sia per la massa della stella che per l'angolo di inclinazione, si é giunti ad una massa per l'oggetto compatto di circa $4M_{\odot}$. Come ricavato nel capitolo precedente, questa massa supera il limite di Oppenheimer-Volkoff per una stella di neutroni, equazione (1.50). Ci troviamo quindi di fronte, con tutta probabilitá, ad un buco nero di massa stellare [5].

Successivamente alla scoperta di Cyg X-1, furorno rilevati molti altri candidati come possibli buchi neri di massa stellare. Il criterio che si utilizzó per stabilire se in una binaria-X fosse presente un buco nero di massa stellare riguardó la funzione di massa introdotta nell'equazione (2.1). Dall'analisi dell'equazione é emerso il seguente criterio: se una binaria-X possiede una funzione di massa tale che $f(M_x) \geqslant 5M_{\odot}$, indipendentemente da qualsiasi assunzione per M_c ed i, allora ció indica che la massa del corpo compatto supera la soglia di Oppenheimer-Volkoff (1.50) e, di conseguenza, sarebbe necessariamente un buco nero di massa stellare. Con questo criterio, dopo la scoperta di Cyg X-1 sono stati svelati piú di 20 buchi neri di massa stellare in binarie-X [5].

Nonostante il buon numero di buchi neri di massa stellare rilevati, risulta chiaro che questi sono solo una goccia nell'oceano. Si é infatti potuto stimare, tramite studi dinamici di XRT (dall'inglese, X-ray transient) che 3 bianarie-X su 4 contengono un buco nero di massa stellare. Inoltre, dagli studi di XRT condotti dal 1975 ad oggi, si evince che esiste una popolazione di circa 10^3 binarie-X dormienti. Infine l'attaule modello per lo studio dell'evoluzione stellare prevede una popolazione di circa 10^9 buchi neri di massa stellare per la Via Lattea [5].

Nella tabella 2.1 riportiamo alcuni buchi neri di massa stellare, o seri candidati ad esserlo, con i rispettivi valori della massa, del periodo orbitale P_{orb}, e della funzione di massa del sistema binario $f(M_x)$, oltre che al tipo di sistema binario (HMXB, LMXB oppure IMXB, dove quest'ultimo acronimo indicap dall'inglese Intermediate Mass X-Binary). Nella tabella si possono trovare buchi neri con differenti caratteristiche che li contraddistinguono. Si é giá discusso di Cyg X-1, il primo buco nero di massa stellare scoperto. Inoltre si possono sicuramente annoverare tra i candidati buchi neri piú massivi, come V404 Cyg ed LMC X-1, nonché quello riconosciuto come il piú grande buco nero di massa stellare della Via Lattea, ovvero GRS 1915+105a. C'é peró un altro buco nero la cui massa é fonte di dibattito, ovvero LB-1.

Difatti, attraverso i telescopi LAMOST[2] e Keck[3] é stato trovato il sistema binario contenente una supergigante di tipo B di massa stimata $8.2M_{\odot}$ e il buco nero di massa stellare LB-1 di massa stimata $68M_{\odot}$; nonostante il gran margine di errore sulla massa del buco nero (circa una decina di $M_{\odot}$), si ottiene comunque una massa superiore alle 50 $M_{\odot}$; tale valore é abbastanza insolito, dato che il buco nero di massa stellare piú pesante misurato fino ad ora ammonta a sole 15 $M_{\odot}$ [1]. Successivamente l'attribuzione di una massa del genere a LB-1 é stata messa fortemente in dicussione, affermando che le misurazioni fatte da LAMOST e Keck avessero attribuito una massa del genere al buco nero in virtú di elementi che non fanno parte del disco di accrescimento di LB-1 e sono esterni al sistema binario che lo ospita; si é quindi attribuita ad LB-1 una massa compresa tra le 5 e le 20 $M_{\odot}$ [6].

2.2 I buchi Neri di massa intermedia

La seconda categoria di buchi neri é formata dai buchi neri di massa compresa tra le $100M_{\odot}$ e $10^6M_{\odot}$. Essi vengono denominati per l'appunto "buchi neri di massa intermedia". Questi sono i buchi neri piú strani poiché, data la loro massa, non possono essere stati originati né dal collasso gravitazionale di una stella, né possono aver avuto la stessa origine dei buchi neri supermassicci. Si rende necessario precisare che attualmente non esistono evidenze che confermino in maniera netta la loro esistenza [8, 9]. In ogni caso, l'esistenza dei buchi neri di massa intermedia é supportata dall'ipotesi che questi possano essere stati i semi degli attuali buchi neri supermassicci, di cui abbiamo traccia solo dopo centinaia di milioni di anni dallo scoppio del Big Bang. Risulta dunque di notevole importanza la ricerca di buchi neri di massa intermedia, difatti grazie ad essi si ha la possibilitá di ricostruire con maggiore precisione lo sviluppo che hanno i buchi neri fino a diventare buchi neri supermassicci, da cui chiaramente sarebbe possibile in teoria dedurre l'origine di questi ultimi.

Le ipotesi riguardanti l'origine dei buchi neri di massa intermedia sono 3. Si pensa che essi possano essere originati dal collasso gravitazionale di stelle della Popolazione III [4] di massa superiore alle 260 $M_{\odot}$. Sappiamo infatti che potrebbero finire la propria vita come supernove liberando i metalli che successivamente vengono trovati nel ciclo di vita delle stelle di popolazione I e II. Nel caso in cui ció non dovesse avvenire, tali stelle potrebbero collassare in un buco nero di massa superiore alle 100 $M_{\odot}$. Inoltre, i buchi neri

[2] Il Large Sky Area Multi-Object Fibre Spectroscopic Telescope é un telescopio riflettore meridiano, situato nell'osservatorio di Xinglong, in Cina.

[3] L'Osservatorio "Keck" é un osservatorio astronomico costituito da due telescopi riflettori gemelli, situato a 4145 m s.l.m., sulla sommitá del vulcano Mauna Kea, nelle isole Hawaii.

[4] Ipotetica popolazione di stelle piú antica di tutte. Le stelle di popolazione III sono le piú calde e massicce, e sono caratterizzate dall'assenza di metalli.

Tabella 2.1: Elenco di alcuni buchi neri di massa stellare scoperti sino ad ora. Vengono inoltre riportati: la massa M_x del buco nero, la funzione di massa $f(M_x)$, il periodo orbitale P_{orb} della stella e la classificazione del sistema binario. Per ulteriori dettagli si rimanda alle referenze [5, 10].

Buco nero	M_x $M_\odot$	$f(M_x)$ $M_\odot$	P_{orb} [days]	Classificazione
Cyg X-1	10 ± 3	0.244 ± 0.005	5.600	HMXB
V404 Cyg	12 ± 2	6.09 ± 0.04	6.471	LMXB
Cygnus X-3	8-14	2.4 ± 1.1	0.2	HMXB
GRO J0422+32	4 ± 1	1.19 ± 0.02	0.212	LMXB
LMC X-1	10.9 ± 1.4	0.14 ± 0.05	4.229	HMXB
4U 1543-475	9.4 ± 1.0	0.25 ± 0.01	1.125	IMXB
LB-1	Incerta	1.202 ± 0.007	78.80	HMXB
GRS 1915+105a	14 ± 4	9.5 ± 3.0	33.5	LMXB
H1705-250	6 ± 2	4.86 ± 0.13	0.520	LMXB
XTE J1819-254	7.1 ± 0.3	3.13 ± 0.13	2.816	IMXB
A0620-003	11 ± 2	2.72 ± 0.06	0.325	LMXB

di massa intermedia potrebbero essere il prodotto di fusioni incontrollate in cluster nucleari o, in ultima ipotesi, del collasso diretto di gas pre-galattici. Potenzialmente ammassi di questo tipo sono tutti dei semi di buco nero supermassiccio; difatti essi nel corso del tempo, attraverso fusioni e accrescimenti possono ingrandirsi gradualmente fino a raggiungere la massa di un buco nero supermassiccio.

L'origine dei buchi neri di massa intermedia puó essere classificata in base alla loro massa. Assegniamo ai buchi neri di massa intermedia risultato del collasso di una stella di Popolazione III una massa compresa tra $10^2 M_\odot$ e 10^3 $M_\odot$; come potevamo immaginare, compatibilmente con la loro origine, anche la loro massa é vicina a quella di un buco nero di massa stellare. Per quanto riguarda i buchi neri di massa intermedia risultato di fusioni incontrollate in cluster nucleari, troviamo una massa nell'ordine di grandezza di $10^4\ M_\odot$. In ultimo assegniamo ai buchi neri di massa intermedia risultato di un collasso diretto di gas pre-galattici una massa compresa tra 10^5 e $10^6\ M_\odot$ [9, 8].

Centinaia di candidati buchi neri di massa intermedia sono stati trovati nell'universo osservabile attraverso l'osservazione di AGN (dall'inglese, Active Galactic Nuclei) in galassie nane. Si tratta di una regione compatta situata al centro di molte galassie da cui viene emessa una gran quantitá di energia nello spettro elettromagnetico. Gli AGN si formano attorno ai buchi neri supermassicci, i quali hanno al loro esterno un disco di accrescimento formato da materia che accelera e raggiunge velocitá paragonabili a quella della luce. Gli AGN possono formarsi anche in buchi neri con massa inferiore a $10^6\ M_\odot$, fornendo in questo caso un'evidenza per la presenza di buchi neri di massa intermedia. Decine di altri candidati di buchi neri di massa intermedia sono stati osservati in ammassi globulari o nelle periferie di galassie massive che hanno subito da poco la fusione con galassie nane.

Attualmente si pensa che i buchi neri di massa intermedia possano inoltre formarsi attraverso la fusione di sistemi binari contenenti buchi neri di massa stellare. Queste fusioni sono importanti sorgenti di onde gravitazionali, le quali possono essere intercettate da LIGO e Virgo [5]. Grazie a tali interferometri é stato possibile trovare un buco nero di massa intermedia di $142\ M_\odot$ [9].

2.3 I buchi neri supermassicci

L'ultima categoria di buchi neri comprende i buchi neri supermassicci. Questi hanno una massa superiore a $10^6\ M_\odot$ e puó arrivare fino a $10^{10}\ M_\odot$. Tipicamente si trovano al centro delle galassie piú grandi, mentre, per quanto riguarda le galassie piú piccole, si é ancora incerti circa la loro eventuale presenza al centro [9]. A differenza dei buchi neri di massa stellare, l'origine dei buchi neri supermassicci é ancora incerta ed é ancora attualmente allo studio. Si pensa, infatti, che essi siano il risultato dell'evoluzione di buchi neri di massa stellare attraverso il loro naturale accrescimento nonché il risultato della fusione con altri buchi neri avvenuta nel corso del tempo [9].

Il rilevamento di buchi neri supermassicci si basa sulla misurazione del moto delle stelle al centro delle galassie. Risulta evidente come il buco nero supermassiccio, posto al centro della galassia, eserciti una notevole influenza sulle stelle circostanti le quali sembrano gravitare attorno ad uno spazio vuoto. Ció che rende visibile un buco nero supermassiccio é l'AGN causato dal proprio disco di accrescimento; difatti un AGN puó irraggiare

[5] Il Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory é un osservatorio statunitense ideato per il rilevamento delle onde gravitazionali. Virgo é un interferometro finalizzato alla rilevazione di onde gravitazionali situato nel comune di Cascina, in Italia.

fino a un trilione di volte l'energia del Sole, illuminando la galassia in cui esso risiede e rendendo direttamente percepibili i buchi neri. Proprio grazie alle radiazioni emanate dai corrispondenti AGN, nel 2019 otto radiotelescopi distribuiti in zone diverse della Terra sono stati in grado di fotografare il buco nero supermassiccio M87* situato nella galassia Messier 87, la cui massa é dell'ordine di 10^9 $M_{\odot}$. Nel 2021, é stato inoltre fotografato il buco nero supermassiccio presente al centro della Via Lattea, denominato Saggittarius A*, la cui massa é dell'ordine di 10^6 $M_{\odot}$ [9].

2.3.1 Il buco nero al centro della Via Lattea

Il concetto di buco nero ha cominciato ad assumere inequivocabile credibilitá quando si inizió ad osservare il moto delle stelle al centro della Via Lattea. É stato possibile infatti decifrare dal moto delle stelle il potenziale gravitazionale a cui esse sono soggette. La misurazione dell'elevato moto proprio[6], e, successivamente, delle accelerazioni di alcune stelle, identificó la presenza di un potenziale gravitazionale generato da una massa oscura compatta. Successivamente, ulteriori osservazioni hanno fornito una forte evidenza della presenza di un buco nero supermassiccio al centro della Via Lattea [2].

La storia delle osservazioni riguardo l'esistenza dell'oggetto in questione inizió negli anni trenta, per la precisione nell'aprile del 1933, quando Karl Jansky, all'epoca considerato uno dei maggiori esponenti della radioastronomia, scoprí un'intensa sorgente di onde radio provenire dalla costellazione del Sagittario che puntavano verso il centro della galassia. Per questo motivo chiamó l'ipotetico oggetto sorgente "Sagittarius A".

Negli anni Settanta furono fatte ulteriori osservazioni di Sagittarius A. Da esse fu chiaro che l'oggetto in questione fosse composto da piú sottocomponenti sovrapposti. Tra il 13 e il 15 febbraio del 1974 gli astronomi Bruce Balick e Robert Brown, utilizzando l'interferometro di base del National Radio Astronomy Observatory, scoprirono "Sagittarius A*", un sottocomponente particolarmente compatto e luminoso di Sagittarius A. Fu chiaro quasi da subito che Sagittarius A* avesse tutte le carte in regola per essere un buco nero supermassiccio.

Le prove finali di questa ipotesi furono trovate il 16 ottobre del 2002, quando furono riportate le osservazioni del movimento delle stelle presenti intorno alla zona di Sagittarius A*. Dalla ricostruzione delle traiettorie delle suddette stelle si osservó che durante il loro moto esse subivano delle considerevoli accelerazioni quando si avvicinavano alla radiosorgente Sagittarius A*. Fu osservata in particolare la stella piú vicina a Sagittarius A*, denominata S0-2, il cui periodo orbitale é di soli 16 giorni. U na volta che

[6]Il moto proprio é la misura astrometrica dei cambiamenti osservati nella posizione apparente delle stelle o di altri oggetti celesti nel cielo, visti dal centro di massa del Sistema Solare, rispetto allo sfondo astratto delle stelle piú distanti.

S0-2 aveva raggiunto il periastro, é stato possibile adattare il suo moto con un'orbita kepleriana. Ínoltre si é data una stima sia della massa che della distanza R_0 dal centro galattico del buco nero in questione. Grazie al suo breve periodo orbitale, la stella S0-2 fornisce il miglior vincolo possibile sulla massa del buco nero centrale e su R_0.

Mettendo insieme tutti i dati rilevati, si é potuto affermare, con buona probabilitá, l'esistenza del buco nero. Dall'osservazione del moto di S0-2 é stato possibile stimare la massa del buco nero in $(4.1 \pm 0.6) \times 10^6\ M_\odot$; inoltre si é misurato che Sagittarius A* si trova a circa 2.7×10^4 anni luce dalla Terra, ed occupa un volume paragonabile a quello del sistema solare [2]. Successivamente é stata osservata anche la presenza di un buco nero di dimensioni intermedie a poca distanza da Sagittarius A*. Ció fortifica l'idea che i buchi neri supermassicci al centro delle galassie si formino inglobando una quantitá sempre piú grande di oggetti astronomici, compresi buchi neri di dimensioni inferiori.

Capitolo 3

I buchi neri nell'universo fisico

In questo capitolo verranno analizzati i diversi concetti buco nero e la validitá dell'attuale modello di buco nero astrofisico. Nel paragrafo 3.1 verranno descritte le 3 diverse definizioni concettuali possibili di buco nero; verranno inoltre enunciate nel sottoparagrafo 3.1.1 le metriche di Kerr per buchi neri carichi, di Reisnner-Nordström per buchi neri rotanti, infine la metrica di Kerr-Newmann per buchi neri che posseggono contemporaneamente carica e momento angolare.

Nel paragrafo 3.2 si cercherá di capire se sia possibile la formazione di un buco nero astrofisico nell'universo fisico.

Infine nel paragrafo 3.3 si confermerá la fondatezza del modello di buco nero astrofisico e si elencheranno le possibili prove indirette che indicano l'effettiva presenza di buchi neri astrofisici nell'universo.

3.1 Le definizioni concettuali di buco nero

É possibile definire un buco nero utilizzando tre differenti concetti. In primo luogo definiamo un buco nero matematico come una soluzione delle equazioni di Einstein nel vuoto descrivente un oggetto esteso, composto da un orizzonte degli eventi e da un'ergosfera[1]. Esso ha le caratteristiche di un oggetto puntiforme e la sua massa é completamente concentrata al centro, in un punto chiamato "singolaritá". Il buco nero matematico é completamente caratterizzato da soli tre parametri, ovvero la massa, la carica ed il momento angolare. Le diverse soluzioni di buco nero ricavate in relativitá generale verranno brevemente considerate nella sezione 3.1.1. Risulta chiaro

[1] L'ergosfera, in un buco nero rotante, é una regione avente la forma di un ellissoide per bassi regimi di rotazione, il cui confine vicino ai poli, tende a combaciare con l'orizzonte degli eventi, ma in prossimitá dell'equatore se ne distacca. É la zona in cui puó essere compiuto un lavoro in grado di aumentare l'energia di una particella che vi entra [7].

da questa definizione che sia impossibile qualunque tipo di comunicazione tra l'interno e l'esterno del buco nero; inoltre, come assicurato dal teorema di Birkhoff, una persona al di fuori dell'orizzonte degli eventi non puó osservare la singolaritá, né puó distinguere se le proprietá del buco nero (massa, carica e momento angolare) siano concentrate in un punto, o siano distribuite in tutto il volume dell'orizzonte degli eventi [11].

Parliamo invece di buco nero fisico come di un oggetto la cui massa non é completamente concentrata in un punto, ma é totalmente contenuta nell'orizzonte degli eventi indipendentemente dalla distribuzione di materia al suo interno. É possibile che un buco nero fisico non possieda carica o momento angolare, o nel caso piú semplice, il caso giá analizzato da Schwarzschild, non possieda nessuno delle due. Deduciamo quindi che concettualmente un buco nero fisico non é necessariamente un buco nero matematico, infatti é vero inoltre che un buco nero fisico potrebbe non avere una singolaritá al centro.

Definiamo in ultimo un buco nero astrofisico come un buco nero fisico che puó formarsi attraverso processi astrofisici nell'universo fisico; inoltre la sua formazione deve necessariamente avvenire in un tempo minore dell'etá dell'universo [11].

3.1.1 Soluzioni di buco nero in relativitá generale

Sono state trovate negli anni Sessanta le soluzioni delle equazioni di Einstain anche per un buco nero che presenti carica, momento angolare, o entrambe le caratteristiche insieme. Verranno qui enunciatele metriche date dalle sopracitate soluzioni senza particolari approfondimenti. Per ulteriori dettagli, si veda la referenza [4].

Metrica di Reissner Nordström per un buco nero dotato di carica:

$$ds^2 = -\Delta dt^2 + (\Delta)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{3.1}$$

con Δ definito da:

$$\Delta = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G(Q^2 + P^2)}{r^2}, \tag{3.2}$$

dove Q é la carica elettrica totale del buco nero, P é la carica magnetica totale e M é la massa.

Metrica di Kerr per un buco nero dotato di momento angolare:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{2GMar\sin^2(\theta)}{\rho^2}(dtd\phi + d\phi dt) + \frac{\rho^2}{\Delta'}dr^2 +$$
$$+\rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2(\theta)}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta'\sin^2(\theta)\right] d\phi^2, \tag{3.3}$$

con Δ' definito da:

$$\Delta' = r^2 - 2GMr + a^2, \tag{3.4}$$

e ρ definito in modo tale che:

$$\rho^2(r,\theta) = r^2 + a^2 \cos^2(\theta), \tag{3.5}$$

con a definito come momento angolare per unitá di massa, tale che $a = \frac{J}{M}$.

Infine per ottenere la metrica generale per un buco nero rotante carico basta sostituire alla metrica di Kerr $2GMr$ con $2GMr - G(Q^2 - P^2)$. Si ottiene cosí la metrica di Kerr-Newmann [4].

3.2 Formazione di un buco nero astrofisico nell' universo fisico

Nel 1939 furono Oppenheimer e Snyder a chiedersi se fosse effettivamente possibile la formazione di un buco nero astrofisico nell'universo fisico. La loro ricerca si incentró sulla fine della vita di una stella massiccia. Essi affermarono che quando quest'ultima esaurisce tutte le fonti di reazioni nucleari inizierá il processo di collasso gravitazionale che fará sí che gran parte della materia che la costituiva si ritrovi addensata in uno spazio dalle dimensioni di gran lunga inferiori a quando essa produceva energia nucleare. Tale contrazione continuerá per un tempo indefinito [11].

I due scienziati studiarono il fenomeno del collasso gravitazionale sia dal punto di vista di un osservatore solidale con la stella collassante, sia dal punto di vista di un osservatore esterno e arrivarono a due conclusioni opposte per i due casi. Un osservatore solidale con il collasso gravitazionale vedrá la formazione del buco nero in un tempo finito, mentre un osservatore esterno vedrá la formazione dello stesso in un tempo infinito. Data l'etá finita dell'universo si puó concludere che nessun osservatore esterno potrá mai osservare un collasso gravitazionale, ma solo una gran quantitá di materia accumulata appena fuori l'orizzonte degli eventi che sembra congelata lí. Un oggetto del genere frutto di un collasso gravitazionale viene chiamato "stella congelata". Assunto che gli osservatori di un fenomeno fisico devono necessariamente essere esterni, i due scienziati giunsero alla conclusione che non puó formarsi un buco nero astrofisico nell'universo fisico [11].

Calcolando il moto di particelle test in caduta libera verso un buco nero dal punto di vista di un osservatore esterno, si vede che esse si fermano sulla soglia dell'orizzonte degli eventi per un tempo infinito, generando la stella congelata di cui si é parlato prima. In questa trattazione si é peró trascurata la massa della materia che cade nel buco nero. Si puó invece asserire che quest'ultima ha un'influenza sulla struttura dell'orizzonte degli eventi di un buco nero. Nei collassi astrofisici reali c'é sempre ulteriore materia tra l'osservatore e il guscio di materia in caduta osservato; tale materia aggiuntiva é attratta dal campo gravitazionale generato dal guscio di materia collassante nell'orizzonte degli eventi, per cui si viene a indurre la formazione di un secondo guscio di materia, esterno al primo. Questo modello a due gusci da come risultato che il guscio piú interno puó interamente attraversare l'orizzonte degli eventi anche per un osservatore esterno, mentre la superficie esterna del secondo guscio puó solo asintoticamente avvicinarsi all'orizzonte degli eventi, pur non potendo mai arrivare alla singolaritá in un tempo finito per un osservatore esterno. Si puó quindi da ció asserire che buchi neri astrofisici possono formarsi nell'universo fisico, ma che questi non sono buchi neri matematici; infatti, data l'etá finita dell'universo, la materia non potrá mai arrivare al punto di singolaritá [11].

3.3 Prove dell'esistenza dei buchi neri astrofisici

Come si é visto nel paragrafo precedente, la caratteristica distintiva dei buchi neri astrofisici é di avere tutta la massa gravitante racchiusa nell'orizzonte degli eventi. Da tale definizione si capisce che risulta impossibile avere una prova diretta dell'esistenza di un buco nero astrofisico; difatti per definizione l'orizzonte degli eventi é una regione dello spazio-tempo che non emette luce, invisibile. Vanno quindi cercate delle prove indirette dell'esistenza di questi ultimi. Prima di andare ad analizzare le possibili prove indirette di buchi neri astrofisici effettivamente esistenti nell'univeros fisico, é possibile definire 5 criteri per poter stabilire la fondatezza del concetto di buco nero astrofisico e del modello che ne consegue [11]:

1. Il concetto e il modello teorico basato sui buchi neri astrofisici puó essere utilizzato per spiegare una serie di fenomeni osservativi comuni, noti in precedenza.

2. Lo stesso concetto e modello teorico basato sui buchi nero astrofisici puó essere utilizzato per spiegare il volume sempre crescente di nuovi fenomeni osservativi.

3. Nessuna controprova viene avanzata contro il modello basato sui buchi neri astrofisici.

4. Lo scenario di formazione ed evoluzione dei buchi neri dedotto da questi fenomeni osservativi é autoconsistente, fisicamente e astrofisicamente ragionevole.

5. Non esiste un modello teorico alternativo che possa spiegare gli stessi o anche piú fenomeni con lo stesso o addirittura migliore successo del modello di buco nero astrofisico.

Una volta accettato il modello di buchi neri astrofisici, e accantonata l'idea di avere delle prove dirette della loro esistenza, concentriamo la nostra attenzione sulle evidenze indirette che possono mostrarci l'effettiva esistenza di tali oggetti. Studiamo quindi cosa accade alla materia che circonda l'orizzonte degli eventi di un buco nero, alla ricerca di possibili evidenze osservative che possano essere giustificate solo con la presenza di un buco nero. Elenchiamo di seguito una serie di effetti che vengono utilizzati per fornire una prova indiretta della presenza di un buco nero [11]:

1. La superficie di un buco nero o la materia che lo colpisce non produce alcuna radiazione rilevabile da un osservatore distante; questa é una manifestazione dell'orizzonte degli eventi di un buco nero.

2. In un buco nero esiste un'orbita circolare stabile piú interna, oltre la quale la materia cade liberamente; questo raggio orbitale é una funzione monotona del momento angolare di un buco nero. In alcuni casi é possibile sfruttare questo effetto di relativitá generale per misurare lo spin di un buco nero, ad esempio adattando lo spettro continuo o le linee sfocate prodotte dalla regione interna di un disco di accrescimento attorno a un buco nero.

3. L'enorme potenziale gravitazionale attorno a un buco nero puó produrre dei forti effetti di lensing gravitazionale, da cui é possibile rivelare la presenza di un buco nero.

4. Il potenziale gravitazionale attorno a un buco nero puó inoltre causare un grande accumulo di materia attorno ad esso tale da convertire parte della sua energia da massa a riposo in radiazione; potrebbe esserci un buco nero in accrescimento rilevato in questo modo.

5. Per un buco nero in rotazione, la sua ergosfera costringerá qualsiasi cosa si trovi al suo interno (comprese le linee del campo magnetico) a ruotare con essa; il meccanismo di Penrose puó consentire di estrarre l'energia di spin di un buco nero per alimentare forti deflussi. A volte i deflussi possono essere prodotti anche da dischi di accrescimento attorno a buchi neri non rotanti. É possibile rilevare tali deflussi di energia e utilizzarli come prova indiretta della presenza di un buco nero.

Conclusioni

In questa tesi si sono studiati i buchi neri come risultato delle equazioni di Einstein, come oggetti astrofisici, e in ultimo si é analizzato il concetto stesso di buco nero da varie prospettive. Si é visto innanzitutto come essi siano nati come caso limite delle equazioni di Einstein, per poi successivamente diventare un effettivo oggetto di studi. Si sono classificati, rispetto alla loro massa, i buchi neri astrofisici nelle attuali 3 categorie. Considerata l'attuale quantitá di informazioni ancora limitata circa i buchi neri di massa intermedia, questo risulta, in potenziale, un argomento di studi di vasta portata. I buchi neri di massa intermedia potrebbero, infatti, costituire in sé i concetti chiave per comprendere in che modo abbiano origine i buchi neri super massicci al centro delle galassie maggiori; e non solo, ma anche per conoscere la maniera in cui i buchi neri di massa stellare crescono col passare del tempo. Proprio i buchi neri supermassicci sono fonte di una gran moltitudine di studi. Difatti, avere maggiori informazioni sulla loro origine e sul loro comportamento potrebbe condurci ad avere una maggiore conoscenza sia della galassia che li ospita che dei meccanismi di evoluzione dell'universo. Parametri come la loro massa, la loro estensione e la distanza dal centro galattico sono di fondamentale importanza per caratterizzare l'intera galassia che li ospita e per confrontarla con le altre galassie.

Il concetto di buco nero matematico fornito dalle equazioni di Eintesin non corrisponde ai buchi neri che effettivamente riusciamo a localizzare nell'universo fisico. Si sono forniti dei ragionamenti atti a validare il modello di buchi neri astrofisici nell'universo fisico come consistente e unico in grado di spiegare una serie di fenomeni. Si sono infine forniti dei fenomeni fisici rivelabili che possono essere usati come evidenza indiretta della presenza di buchi neri. Come si é detto, attualmente e nei prossimi anni i buchi neri sono e saranno una delle principali frontiere di ricerca ; si deduce dunque che piú conosciamo questi ancora misteriosi oggetti e piú approfondita sará la nostra conoscenza dell'universo in tutte le sue sfaccettature.

Bibliografia

[1] M. Abdul-Masih et al. On the signature of a 70-solar-mass black hole in lb-1. *Nature*, 580, 2020,29 april.

[2] A. Boehle et al. An improved distance and mass estimate for sgr a* from a multistar orbit analysis. *The Astrophysical Journal*, 830, 2016,.

[3] S. Capozziello and M. Funaro. *Introduzione alla relatività generale.* Liguori Editore, Napoli, 2005.

[4] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity.* Cambridge University Press, Cambridge, 7 2019.

[5] J. Casares. Observational evidence for stellar-mass black holes. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 2(S238):3–12, 2006.

[6] K. El-Badry and E. Quataert. Not so fast: LB-1 is unlikely to contain a 70-solar-mass black hole. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 493(1):L22–L27, 01 2020.

[7] K. Griest. "physics 161: Black holes: Lecture 22". 2010,26 Febrary.

[8] J. S. Jenny E. Greene and L. C. Ho. Intermediate mass black holes. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 58:257-312, 2020.

[9] M. Mezcua. Black holes. *arXiv*, (2110.08629), 2021.

[10] Shenar, T. et al. The "hidden" companion in lb-1 unveiled by spectral disentangling. *AA*, 639:L6, 2020.

[11] S.-N. Zhang. Astrophysical Black Holes in the Physical Universe. *arXiv*, (1003.0291), 2010.